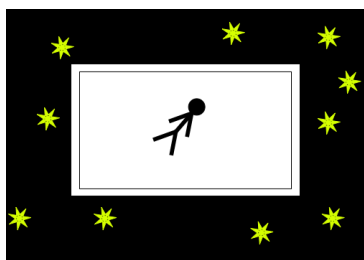


# ERŐ-E A GRAVITÁCIÓ?

1

Inerciarendszer (IR): olyan vonatkoztatási rendszer, ahol érvényes  
Newton első törvénye ( $\vec{F}_e = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$ )

1. példa:



← ez pl. IR (Newton és Einstein egyetért)

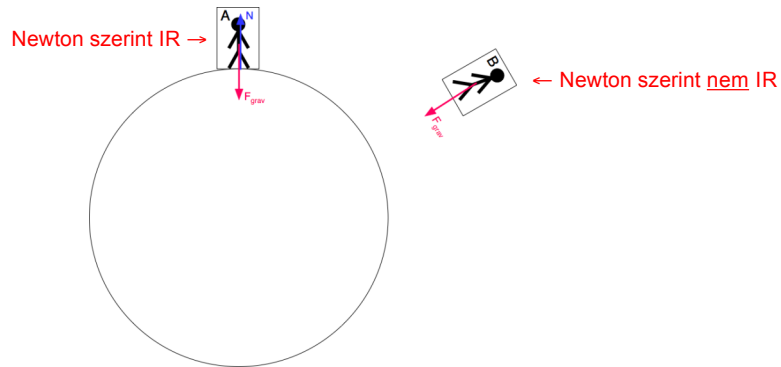
Inerciarendszerben tett felfedezések:

- (1) Amikor valaki gyorsul (azaz *erő hat rá*, pl. a fal megüti, egy gumikötél meghúzza), azt becsukott szemmel is *érzi*.
- (2) Érvényes az ún. Maximális Öregedés Elve (M.Ö.E.): két esemény között az az óra regisztrálja a legtöbb eltelt időt, amelyre a két esemény között nem hatott erő.

2

2. példa:

Newton szerint: A inerciarendszer, B nem az, a gravitáció pedig erő.



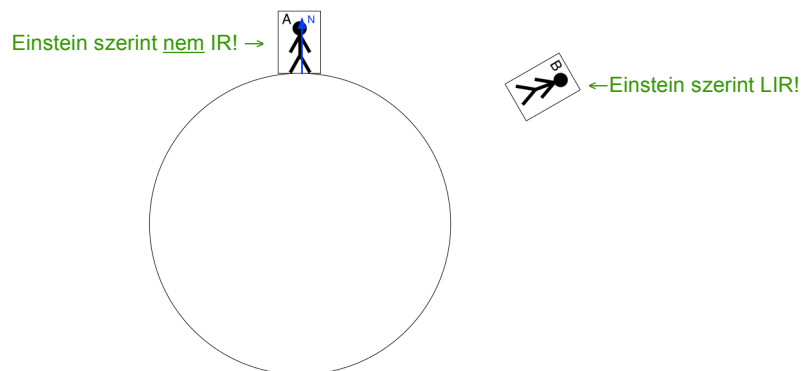
Csakhogy a fenti "IR"-ben a következő felfedezéseket tesszük:

- (1) "Amikor valakire erő hat, azt becsukott szemmel is érzi, **kivéve a gravitációs erőt (azt ugyanis nem érzi).**"
- (2) "A M.Ö.E. **módosított formában** érvényes: két esemény között az az óra regisztrálja a legtöbb eltelt időt, amelyre a két esemény között **csak a gravitációs erő hat.**"

3

2. példa:

Einstein szerint: a gravitáció *nem* erő (pl. azért, mert nem érezzük), és a B az inerciarendszer, nem pedig az A.

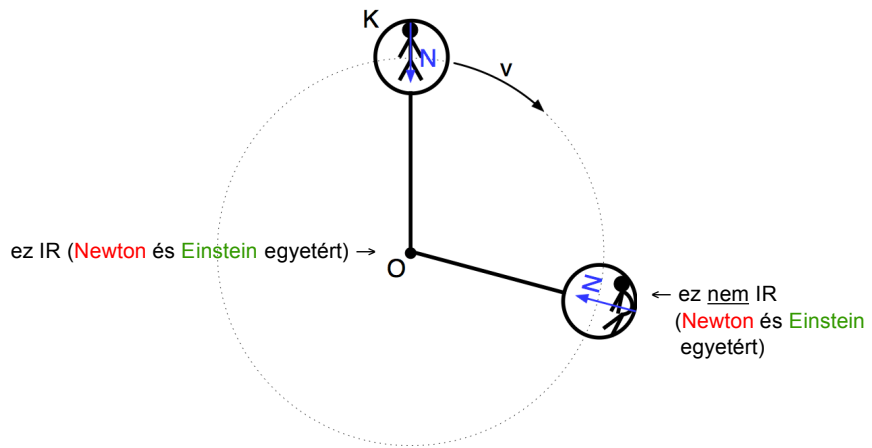


Az eredeti (IR-re tett) megállapítások B-ben változatlanul *érvényben maradnak*:

- (1) Amikor valakire erő hat, azt becsukott szemmel is *érzi*.
- (2) M.Ö.E.: két esemény között az az óra regisztrálja a legtöbb eltelt időt, amelyre a két esemény között *nem* hatott erő.

4

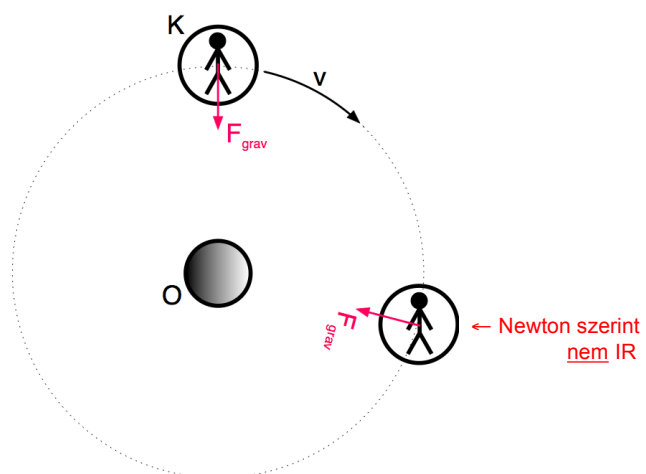
3. példa:



Körhinta inerciarendszerben. A körpályára kényszerítő erő a felület nyomóereje (vagy a Coulomb- vagy a Lorentz-erő, stb.).

5

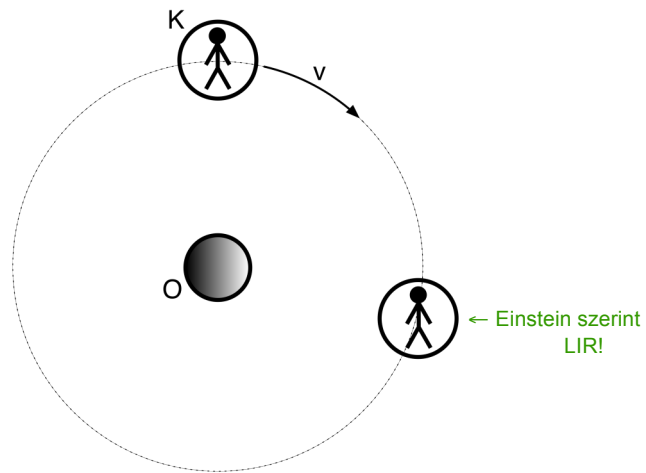
4. példa:



Gravitációs körhinta. A "körpályára" kényszerítő "erő" a gravitáció (amit a kabin utasa *nem* érez).

6

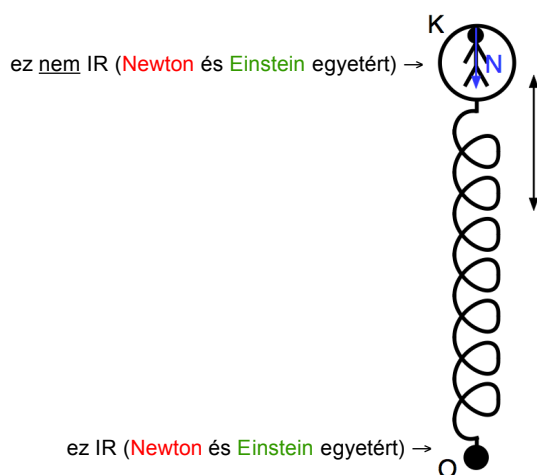
4. példa:



Gravitációs körhinta. "Gravitációs erő" nem létezik!

7

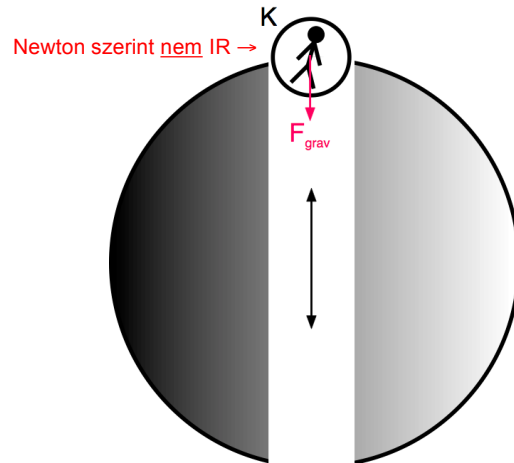
5. példa:



Rugó inerciarendszerben. Az utas szinuszos gyorsulását a felület nyomóereje okozza.

8

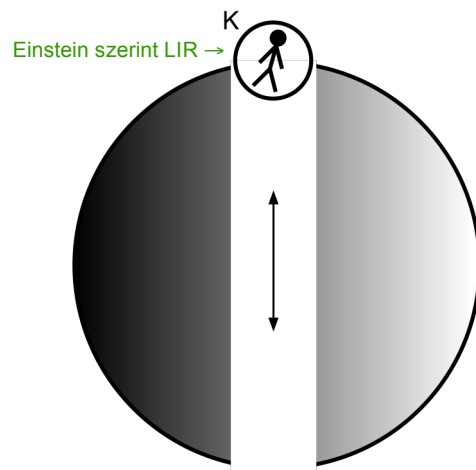
6. példa:



Gravitációs rugó. Az utas "szinuszos gyorsulását" a gravitációs "erő" okozza (amit az utas *nem* érez).

9

6. példa:



Gravitációs rugó. "Gravitációs erő" nem létezik!

10

## EKVIVALENCIA-ELV:

Egy csak a gravitáció hatására (azaz “szabadon”) mozgó vonatkoztatási rendszer (lokálisan\*) ugyanolyan, mint egy gravitáló testektől távoli inerciarendszer.

Egy a Földön nyugvó vonatkoztatási rendszer (lokálisan\*) ugyanolyan, mint egy gravitáló testektől távoli gyorsuló vonatkoztatási rendszer.

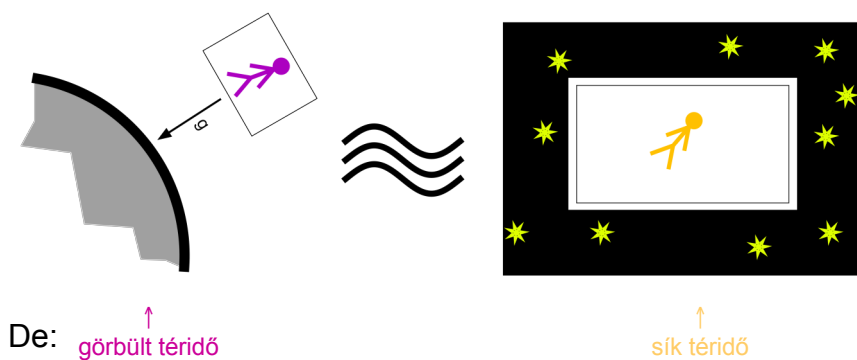
\*a téridő kis tartományában.

11

## EKVIVALENCIA-ELV:

Egy csak a gravitáció hatására (azaz “szabadon”) mozgó vonatkoztatási rendszer lokálisan ugyanolyan, mint egy gravitáló testektől távoli inerciarendszer.

[A gravitáció a Földön “kikapcsolható” azzal, ha elengedjük magunkat.]

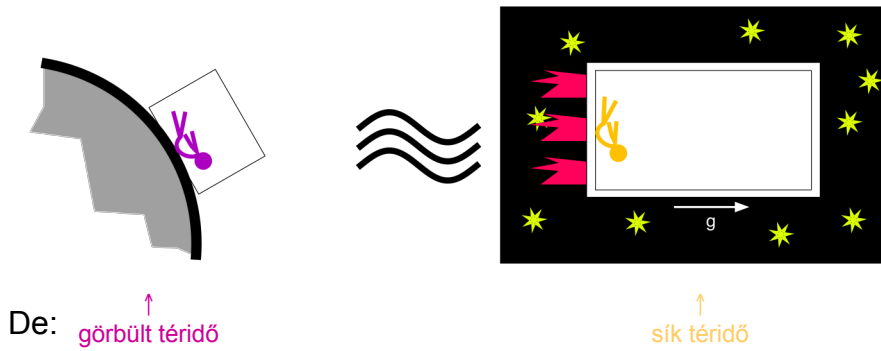


12

## EKVIVALENCIA-ELV:

Egy a Földön nyugvó vonatkoztatási rendszer  
lokálisan ugyanolyan, mint  
egy gravitáló testektől távoli gyorsuló vonatkoztatási rendszer.

[A "gravitáció" az űrhajóban bekapcsolható azzal, ha bekapcsoljuk a hajtóművet.]



13



Einstein játéka. (A gravitáció "megszüntethető"!)

14



## AZ EKVIVALENCIA-ELVBŐL MÁRIS LEVEZETHETŐ NÉHÁNY ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLETBELI EREDMÉNY (ANÉLKÜL, HOGY A TÉRIDŐ GÖRBÜLTSGÉT FIGYELEMBE VENNÉNK):

1. Fénysugár elhajlása gravitációs térben.
2. A gravitációs kék-, ill. vöröseltolódás.
- (3. A felhajtóerő paradoxona.)



Erő-e a gravitáció? NEM.

*MI A GRAVITÁCIÓ?  
A TÉRIDŐ GÖRBÜLETE.*

Egy nagy tömegű test begömbíti maga körül a téridőt, és ebben a gömbült téridőben - erőhatás híján - a "lehető legegyenesebb" (geodetikus) világvonalon halad a szabad tömegpont.

17

Közbevetett kérdések:

1. "A Nap kering a Föld körül, vagy a Föld a Nap körül?"
2. Tehát: Kopernikusznak v Ptolemaiosznak van-e igaza?

18

## A GEODETIKUSRÓL

(1) A 2D, 3D, stb. **tér** geodetikus vonalai:

A geodetikus (egyenes) vonal: a “legtermészetesebb” (“kanyarmentes”) vonal két adott pont között.

Precíz definíciója: az a vonal, amelynek ha az *érintővektorát* elkezdjük *párhuzamosan eltolni* a vonal mentén, akkor az mindvégig a vonal érintővektora marad.

Járulékos felfedezés: az ilyen vonalra  $\int_P^Q dl = \min.$

(Két pont között a legrövidebb út az egyenes.)

**A “MINIMÁLIS TÁVOLSÁG ELVE”.**

19

## A GEODETIKUSRÓL

(2) A 4D **téridő** geodetikus világvonalai:

A geodetikus (egyenes) világvonala: a “legtermészetesebb” (erőmentes) világvonala két adott esemény között.

Precíz definíciója: az a világvonala, amelynek ha az *érintővektorát* elkezdjük *párhuzamosan eltolni* a világvonala mentén, akkor az mindvégig a világvonala érintővektora marad.

Járulékos felfedezés: az ilyen világvonala  $\int_A^B d\tau = \max !$

(“Két esemény között a *leghosszabb* út az egyenes.” Hogyan lehet két esemény között a legtávolabbi élni? Relaxálva.)

**A MAXIMÁLIS ÖREGEDÉS ELVE**

20

Erő-e a gravitáció? NEM.

A GRAVITÁCIÓ: A TÉRIDŐ GÖRBÜLETE.

Hogyan *mutatható ki mérés* ez a görbület?  
“Egy vektort párhuzamos eltolással végigviszünk egy *zárt világvonalon*\*, és ellenőrizzük, hogy a vektor a végén ugyanarra mutat-e, mint az elején.”

*Nem használható módszer.* (\*Zárt világvonalon nem tudunk közlekedni!)

21

Erő-e a gravitáció? NEM.

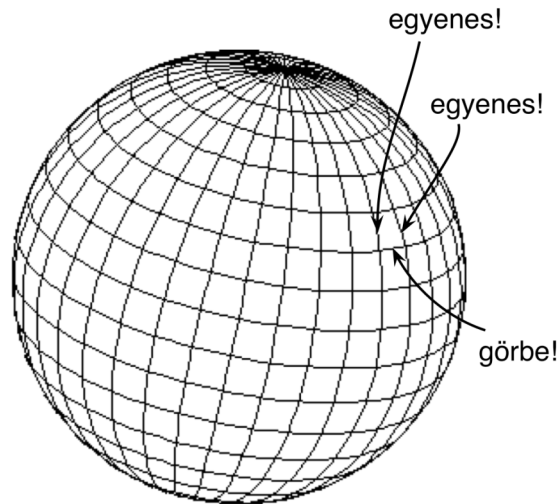
A GRAVITÁCIÓ: A TÉRIDŐ GÖRBÜLETE.

Hogyan *mutatható ki mérés* ez a görbület?  
*Két szabad tömegpont mozgásának követésével.*  
 (“Két geodetikus világvonala egymáshoz képest hogyan viselkedik?”)

Hogyan *érezhető* ez a görbület? Az árapály-erő hatásának tapasztalásával. (A Földön: ingerküszöb alatti mértékben kicsi.)

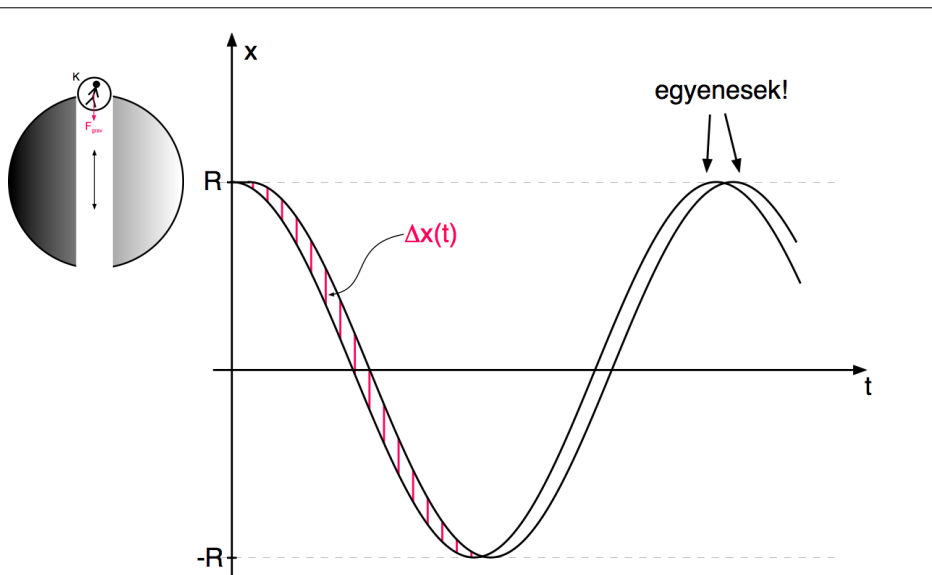
22

## GÖRBÜLT SOKASÁGOK

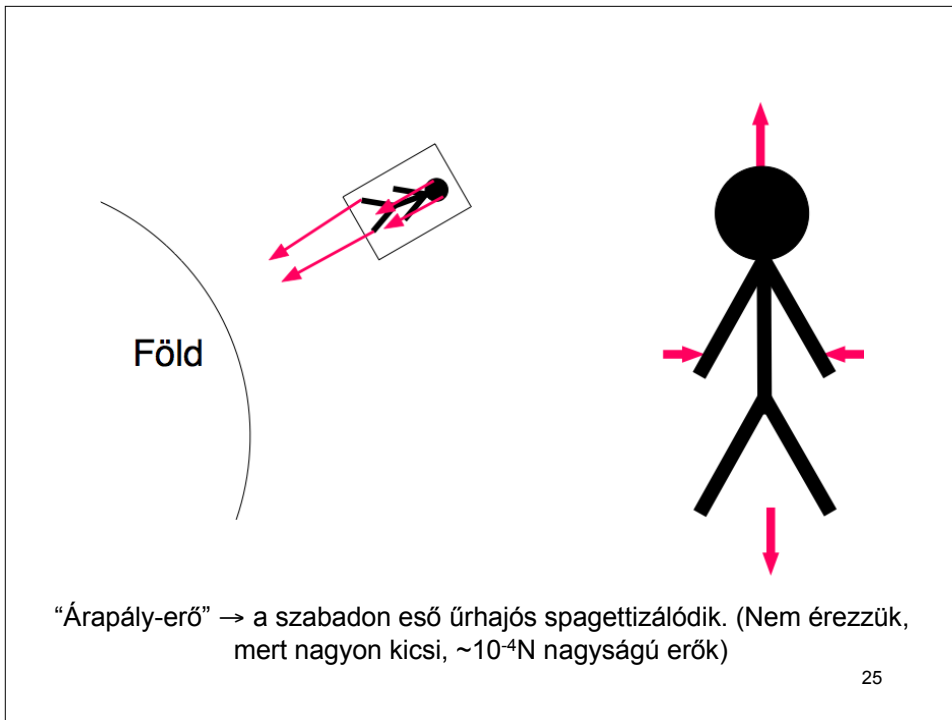


Egy pontból kiindítunk két egyenest.  
Ismét metszik egymást! → görbült felület!

23



Gravitációs rugó. Két kabint egymás után elengedve vizsgáljuk a két *geodetikus* (*egyenes!*) világvonal egymáshoz képesti viselkedését. Tapasztalat: többször metszik egymást → következtetés: görbült tér!



**n-dimenziós sokaság (pl. 2D felület, 3D tér, 4D téridő, stb.) metrikája:**

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + \dots + g_{12}dx^1 dx^2 + \dots =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

A metrikát (a fenti egyenletet) a sokaság "lakói" mérésekre alapozva fel tudják állítani:

1. A sokaságot bekoordinátázzák az  $x^1, x^2, \dots, x^n$  (tetszőlegesen) felvett koordinátákkal.
2. Két közeli pont között megméri a  $ds$  távolságot, és ugyanakkor regisztrálják a két pont közötti  $dx^i$  koordináta-különbségeket is.
3. A 2-es lépést megismétlik sok közeli pontpárra. Összességében rengeteg adatot összegyűjtenek.
4. Ezekből az adatokból megállapítják a  $g_{ij} = g_{ij}(x^k)$  függvényeket (a metrikus tenzor elemeit).

*De: hogyan tudják a "lakók" megállapítani, hogy sokaságuk görbült-e?*

27

**Emlékeztető: ha sokaságunk 2D felület, alkalmazható a "Theorema Egregium" (Gauss, 1828):**

$$K(x^1, x^2) = \frac{1}{2g} \left[ 2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2} \right] +$$

$$+ \frac{g_{12}}{4g^2} \left[ \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) - 2 \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) + \left( 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) \left( 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \right] -$$

$$- \frac{g_{22}}{4g^2} \left[ \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \left( 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) - \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right] -$$

$$- \frac{g_{11}}{4g^2} \left[ \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) \left( 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) - \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

ahol  $g \equiv \det g_{ij} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$

[csak 2D felületre alkalmazható!]

28

**n-dimenziós sokaság görbültségét kifejező mennyiség:**  
**a Riemann-tenzor (Riemann, 1854)**

Ezt is ki tudják számítani a sokaság "lakói" a  $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$  metrikus tenzorból:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}$$

ahol  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left[ \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right]$ , és  $g^{\alpha\sigma}$  a metrikus tenzor inverze.

[tetszőleges dimenziójú sokaságra alkalmazható!]

29

## TOVÁBBI PÉLDÁK

**Az n-dimenziós sokaságunk  
legyen a 4D téridő!**

30

**6. 4D téridő a világvűrben, nagy tömegektől távol; kockarács-hálózat, szinkronizált órák:**

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

koordináták: " $x^0$ " =  $t$     " $x^1$ " =  $x$     " $x^2$ " =  $y$     " $x^3$ " =  $z$

metrikus tenzor:  $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor:  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \dots = 0$       SÍK (GÖRBÜLETLEN) TÉRIDŐ!

31

**7. 4D téridő a világvűrben, nagy tömegektől távol; gömbhéj-hálózat, szinkronizált órák:**

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

koordináták: " $x^0$ " =  $t$     " $x^1$ " =  $r$     " $x^2$ " =  $\theta$     " $x^3$ " =  $\varphi$

metrikus tenzor:  $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor:  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \dots = 0$       SÍK (GÖRBÜLETLEN) TÉRIDŐ

32



**8. Gömbszimmetrikus, álló tömeg körüli téridő; Schwarzschild-koordinátákkal felírva:**

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

koordináták: " $x^0$ " =  $t$     " $x^1$ " =  $r$     " $x^2$ " =  $\theta$     " $x^3$ " =  $\varphi$

metrikus tenzor:  $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor:  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \dots \neq 0$       GÖRBÜLT TÉRIDŐ!

33

**9. Gömbszimmetrikus, álló tömeg körüli téridő; Painlevé-Gullstrand-koordinátákkal felírva:**

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dT dr - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

koordináták: " $x^0$ " =  $T$     " $x^1$ " =  $r$     " $x^2$ " =  $\theta$     " $x^3$ " =  $\varphi$

metrikus tenzor:  $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & -\sqrt{\frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2M}{r}} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor:  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \dots \neq 0$       GÖRBÜLT TÉRIDŐ

34

**10. Forgó fekete lyuk (+ a Nap + a Föld) körüli téridő; Doran-koordinátákkal felírva, az egyenlítői síkban:**

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dT^2 - 2\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}}dTdr + 2\left(\frac{2Ma}{r}\right)dTd\varphi +$$

$$+ 2a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}}drd\varphi - \frac{r^2}{r^2 + a^2}dr^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)d\varphi^2$$

koordináták: " $x^0$ " =  $T$     " $x^1$ " =  $r$     " $x^2$ " =  $\varphi$

metrikus tenzor:  $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & -\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & \frac{2Ma}{r} \\ -\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & -\frac{r^2}{r^2 + a^2} & -a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} \\ \frac{2Ma}{r} & -a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \end{pmatrix}$

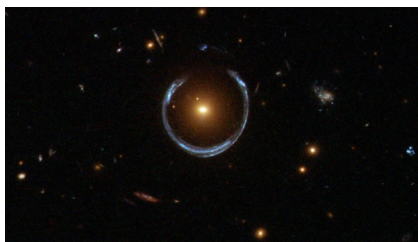
Riemann-tenzor:  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \dots \neq 0$

GÖRBÜLT TÉRIDŐ!

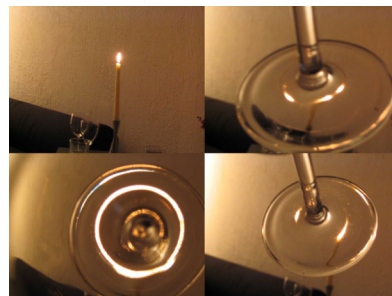
35

**A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)**

1. gravitációs lencsehatás (nagy tömegek - pl. galaxisok - begörbítik a fénysugarak útját)



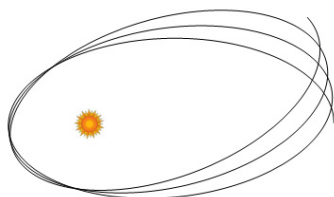
demonstráció házilag:



36

**A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)**

2. a bolygók perihéliumának vándorlása (a Nap körül a bolygók NEM ellipszispályán keringenek)



A naprendszerben a Merkúrnál a legerősebb az effektus:  $\sim 43''/\text{évszázad}$   
 $\sim 43''/(417 \text{ körfordulás})$

[A legközelebbi Merkúr-átvonulás: 2016. május 9.]

37

**A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)**

3. a GPS-nél relativisztikus korrekcióra van szükség (a Föld tömege begömbíti a téridőt)

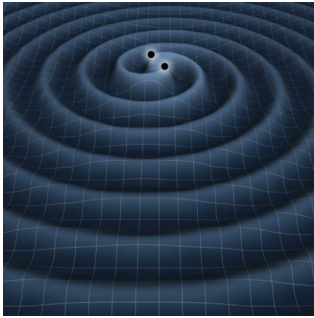


Nem egy az egyben a műholdak atomórái által mutatott időt kapják meg a vevőkészülékek, hanem a relativisztikus korrekciókkal (spec.rel. + ált. rel.) módosított értékeket. [Relativisztikus korrekciók nélkül naponta  $\sim 10\text{km}$  távolságmérési hiba gyűlhetne össze.]

38

**A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)**

4. *gravitációs hullámok* (pl. két nagy tömegű objektum egyesülésekor)



pl. z-irányban terjedő, +-polarizációjú gravitációs hullám metrikája:

$$ds^2 = dt^2 - (1 + h)dx^2 - (1 - h)dy^2 - dz^2$$