| MECHANIKA 2 | A) HF 12. |
| --- | --- |

**A 23.) feladat**

Egy „R” sugarú, „M” tömegű, homogén tömegeloszlású korong a forgástengelye körül szabadon foroghat. Legyen az általános koordináta a tárcsa „φ” szögelfordulása! A szokásos módon, az alkotófüggvényt jelölje „S”!

a.) Írja fel a teljes (időfüggő „S”-t tartalmazó) Hamilton-Jacobi egyenletet!
b.) Végezze el az „S” „koordináta-idő” szepatrálását!
c.) Írja fel a rövidített (időfüggetlen) Hamilton-Jacobi egyenletet!
d.) Oldja meg a kapott egyenleteket, azaz határozza meg a rendszer dinamikáját megadó, időfüggő S( φ,E,t) függvényt!
e.) Az eddigiek alapján, oldja meg a φ(t) mozgásegyenletét!
f.) A korong $\varphi=0$ helyzetből a $\varphi=\varphi_0$ helzetbe „$t_0$” idő alatt jut el. Határozza meg az „$S(\varphi_0.t_0)$” „hatásfüggvényt”!.
g.) Mutassa meg , hogy az így kapott $S(\varphi_0.t_0)$ valóban a **megfelelő kanonikus transzformációt** végrehajtó alkotófüggvény!

---

**A 24.) feladat**

Adott egy egyszabadságfokú dinamikai rendszer. A kanonikus változókat (x,p) jelöli. A rendszer Hamilton-függvénye a következő:

$$H=\frac{p^2}{2m}-mAtx \qquad \text{(ahol „t” az időt jelenti).}$$

a.) Írja fel az S(x,t) alkotófüggvénnyel a teljes Hamilton-Jacobi egyenletet!
b.) Vezesse be az S(x,t) szeparált alakját a következő formában:

$$S(x,t)\equiv F(t)\cdot x+G(t)$$

Írja fel a H-J egyenletet ezzel a szeparált alakú függvénnyel!
c.) Rendezze az egyenletet $(\text{valami})+x\cdot(\text{valami})=0$ alakra!
d.) A szeparálás elvének megfelelően mindkét „(valami)-nek” zérusnak kell lennie. Ennek alapján határozza meg az F(t) és a G(t) függvényeket!
e.) Határozza meg az S(x,t) alkotófüggvényt!
f.) Az S(x,t) ismeretében határozza meg az x(t) mozgásfüggvényt!

---

| MECHANIKA 2 | B) HF 11. |
| --- | --- |

**B 34.) feladat**

Adott egy harmonikus lineáris oszcillátor.. A Lagrange függvénye:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \; .$$

Az oszcillátor „$t_0$” időpillanatban „$x_0$” helyről kezdi a mozgását és a „t” időpillanatban az „x” helyen lesz. Tudjuk, hogy az oszcillátor mozgásfüggvénye

$$x(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t).$$

A megadott adatok ismeretében meghatároztuk a rendszerre jellemző $S(x_0,t_0,x,t)$ hatásfüggvényt! Erre a következő kifejezés adódott:

$$S(x_0,t_0,x,t)=\frac{m\omega}{2\sin\omega(t-t_0)}\left[\left(x^2-x_0^2\right)\cos\omega(t-t_0)-2xx_0\right]$$

a.) Mutassa meg, hogy a kapott $S(x_0, t_0, x, t)$ valóban megvalósítja az $(x_0, t_0) \to (x, t)$ kanonikus transzformációt!

**b.) EXTRA gyakorlásra**

b1.) Az „L” Lagrange függvény felhasználásával írja fel a S hatás funkcionált.

b2.) Írja be a kifejezésbe a megadott x(t) függvényt!

b3.) Hajtsa végre a kijelölt integrálást!

b4.) Rendezze úgy az egyenletet, hogy kiadódjon a megadott $S(x_0, t_0, x, t)$ kifejezés!

---

**B 35.) feladat**

Hamilton függvényt síkbeli (r, $\varphi$) polár koordinátákkal és azok kanonikus párjaival $(p_r, p_\varphi)$ adjuk meg.:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right).$$

a.) Írja fel a teljes H-J egyenletet az $S(r, \varphi, E, \alpha, t)$ (idö függő) alkotófüggvénnyel

b.) Használja a szokásos $S(r, \varphi, E, \alpha, t) = S_0(r, \varphi, E, \alpha) - Et$ szeparálást és írja fel a rövidített H-J egyenletet!

c.) Írja fel az $S_0$ rövidített hatásfüggvényt a következő $S_0(r, \varphi, E, \alpha) = S_1(r) + S_2(\varphi)$ szeparált alakban! Helyettesítse ezt be a rövidített H-J egyenletbe! Végezze el a szeparálást! Nyilvánvaló, hogy a szeparálási állandó csak az „$\alpha$” általános koordináta lehet. Elvégezve a kijelölt integrálokat határozza meg $S_0(r, \varphi, E, \alpha) = S_1(r) + S_2(\varphi)$ függvényt!

d.) A kapott $S(r, \varphi, E, \alpha, t)$ ismeretében írja fel a kanonikus egyenleteket és oldja meg!

e.) Mutassa meg, hogy a kapott eredmény megfelel a részecske síkon való szabad mozgásának!

---

**B 36.) feladat**

Egy vízszintes asztallapra „a” sugarú hengert erősítettünk úgy, hogy a tengelye a lapra merőleges. A hengerre vékony fonalat csévéltünk amelynek szabad végén egy pontszerű golyó van. A golyót "$v_0$" nagyságú kezdő sebességgel elindítjuk. A golyó a **vízszintes felületen** (súrlódásmentesen) mozog, miközben a fonál letekeredik a hengerről. **A mozgás során a fonál mindvégig feszes marad.** A tömegpont helyzetét azzal az „$\psi$” szöggel jellemezhetjük, amellyel a letekeredett fonal hossza „$R \cdot \psi$”

(MEGJEGYZÉS: Lásd a **Mechanika 1 gyakorlat HF/B1 HF/22 feladata**)

a.) Legyen az általános koordináta az „$\psi$” szög. Írja fel a tömegpont Lagrange függvényét és a H Hamilton függvényét!

b.) Írja fel a teljes H-J egyenletet az $S(\psi, E, t)$ (idö függő) alkotófüggvénnyel!

c.) Írja fel a rövidített H-J egyenletet az $S_0(\psi, E)$ alkotófüggvénnyel!

d.) A H-J egyenlet megoldásával határozza meg a teljes $S(\psi, E, t)$ alkotó függvényt!

e.) Az $S(\psi, E, t)$ ismeretében határozza meg a $\psi(t)$ mozgásfüggvényt!

f.) Írja fel a $\psi(t)$ és az E kapcsolatát megadó összefüggést!

---