Kézirat a „Bevezetés a modern fizika fejezeteibe” c. tárgyhoz

írta: Márkus Ferenc
(BME Fizika Tanszék)

(utolsó módosítás: 2012. október 6.)

2. szakasz

Az elektromágneses hullámok

A hullámterjedést és a vele kapcsolatos jelenségek tanulmányozását az elektromágneses hullámok vizsgálatával folytatjuk. Látni fogjuk, hogy lépésről lépésre miként tárulkozik fel az a gondolati és összefüggésrendszer, amely képes lesz hidat képezni a modern elméletek és technikai megvalósulások irányába is.

Az elektromágneses tér viselkedését a Maxwell-egyenletek írják le

(1) $$rot\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dot{\boldsymbol{D}}$$

(2) $$rot\,\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}$$

(3) $$div\,\boldsymbol{D} = \rho$$

(4) $$div\,\boldsymbol{B} = 0.$$

Az $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{H}$ az elektromos és mágneses térerősség vektorok, $\boldsymbol{D}$ az elektromos eltolás vektora, $\boldsymbol{B}$ a mágneses indukció vektora, $\boldsymbol{j}$ az elektromos áramsűrűség vektora és ρ az elektromos töltéssűrűség. A mennyiségek feletti „pont” a parciális időderiváltat jelöli. A különböző fizikai mennyiségek közötti kapcsolatokat a konstitutív (anyag-) egyenletek mutatják meg. Az egyszerűség kedvéért homogén izotróp közegre felírva ezeket

(5) $$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

(6) $$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

(7) $$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}.$$

Az elektromos töltésmegmaradás törvényét az (1) és (3) egyenletekből származtathatjuk. Az (1) egyenlet divergenciáját véve

$$div\,rot\,\boldsymbol{H} = div\,\boldsymbol{j} + div\,\dot{\boldsymbol{D}},$$

továbbá felhasználva, hogy bármely vektorra *div rot* =0

$$0 = div\,\boldsymbol{j} + div\,\dot{\boldsymbol{D}}.$$

A (3) egyenletet behelyettesítve a kapjuk:

$$0 = \dot{\rho} + div\,\boldsymbol{j}.$$

E töltésmegmaradást kifejező egyenletet kontinuitási egyenletnek is nevezik. A következő fontos tény, hogy a Maxwell-egyenletekből az elektromágneses tér energiamérlegét meg tudjuk állapítani. Ehhez úgy jutunk, hogy az (1) egyenletet $\boldsymbol{E}$ -vel, a (2) egyenletet $\boldsymbol{H}$-val szorozva

$$\boldsymbol{E}\,rot\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{jE} + \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}}$$

$$\boldsymbol{H}\,rot\,\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}}$$

adódik. Ekkor a második egyenletből az első kivonva

$$\boldsymbol{H}\,rot\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\,rot\,\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{jE} - \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}} - \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}}$$

lesz. Felhasználva a

$$div\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\,rot\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\,rot\,\boldsymbol{H}$$

azonosságot valamint a konstitutív egyenleteket a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{H}^2\right) + div\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{jE}$$

elektromágneses tér energiamérleg egyenletét kapjuk. Az

$$\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{H}^2$$

az elektromágneses energiasűrűsége. Az időegység és felületegységen áthaladó energiát kifejező

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

az energiaáram-sűrűség vektor (Poynting-vektor). A jobboldalon álló forrástag a térfogategységben időegységenként keletkező vagy eltűnő extenzív mennyiséget jelenti. Mivel e kifejezés a jelen esetben mindig negatív

$$-\boldsymbol{jE} = -\sigma\boldsymbol{E}^2 \leq 0,$$

így ez a Joule-hő formában „elvesző” energiát jelent az elektromágneses tér szempontjából.

Az elektromágneses tér hullámegyenlete

A figyelmünk középpontjában álló hullámterjedés miatt a legfontosabb tény, hogy a Maxwell-egyenletekből a különböző fizikai mennyiségekre hullámegyenletek vezethetők le. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy mind a ρ töltéssűrűség, mind a $\boldsymbol{j}$ áramsűrűség-vektor zérus, másrészt vákuumra szorítkozva. Ezek után véve az (1) egyenlet rotációját és a (2) időszerinti deriváltját, valamint a konstitutív egyenleteket figyelembe véve kapjuk:

$$rot\, rot\, \boldsymbol{H} = rot\, \dot{\boldsymbol{D}}$$

$$rot\, \dot{\boldsymbol{E}} = -\ddot{\boldsymbol{B}}$$

A második egyenlet elsőbeli helyettesítése és a *rot rot* = *grad div* – $\boldsymbol{\Delta}$ azonosság felhasználásával, a (4) egyenlet figyelembe vételével a

$$\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{H} = 0$$

hullámegyenletet kapjuk. Hasonlóképpen az (1) egyenlet időszerinti deriváltját, a (2) egyenlet rotációját véve, valamint a (3) egyenlet zérus töltéssűrűségű esetét kapjuk:

$$\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{E} = 0$$

Síkhullám megoldások valamint az *E* és *H* vektorok iránya

Az egyenleteknek megoldása mind a pozitív „+”$\boldsymbol{n}$ egységvektor irányába (az argumentumban a „-” előjel tartozik hozzá), mind a negatív „-”$\boldsymbol{n}$ egységvektor irányába (az argumentumban a „+” előjel tartozik hozzá) terjedő haladó síkhullám

$$\boldsymbol{E}(t \pm \frac{\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}}{c})$$

illetve

$$\boldsymbol{H}\left(t \pm \frac{\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}}{c}\right).$$

Ezek közül bármelyiket a megfelelő hullámegyenletbe behelyettesítve az

$$\varepsilon_0\mu_0 - \frac{\boldsymbol{n}^2}{c^2} = 0$$

adódik, ahol az $\boldsymbol{n}^2=1$ felhasználásával az elektromágneses hullám vákuumbeli terjedési sebességére a

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \sim 3 \times 10^8\ m/s$$

értéket kapjuk. A következő kérdés, hogy a terjedési irányhoz képest milyen irányú az $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{H}$ vektor? Induljunk ki az „+”$\boldsymbol{n}$ irányban terjedő elektromos és mágneses térerősségekre vonatkozó általános síkhullám megoldásokból, amelyek

$$\boldsymbol{E}(t - \frac{\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}}{c})$$

és

$$\boldsymbol{H}\left(t - \frac{\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}}{c}\right).$$

Az argumentumot ϕ-vel jelölve

$$\phi = t - \frac{\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}}{c}$$

a számolások egyszerűbb követhetősége miatt végezzük el az alábbi számolásokat:

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\boldsymbol{E}}{d\phi}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\boldsymbol{H}}{d\phi}$$

$$rot\ \boldsymbol{H} = -\frac{\boldsymbol{n}}{c} \times \frac{d\boldsymbol{H}}{d\phi}$$

$$rot\ \boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{n}}{c} \times \frac{d\boldsymbol{E}}{d\phi}.$$

Ezt követően helyettesítsük be ezeket az (1) és (2) Maxwell-egyenletekbe:

$$-\frac{\boldsymbol{n}}{c} \times \frac{d\boldsymbol{H}}{d\phi} = \varepsilon_0 \frac{d\boldsymbol{E}}{d\phi}$$

illetve

$$-\frac{\boldsymbol{n}}{c} \times \frac{d\boldsymbol{E}}{d\phi} = -\mu_0 \frac{d\boldsymbol{H}}{d\phi}.$$

A két egyenlet argumentum szerinti integrálásával a

$$-\frac{1}{c}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \boldsymbol{H}$$

$$-\frac{1}{c}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

egyenletekre jutunk. Látható, hogy a három vektor egymásra merőleges és jobbsodrású rendszert alkot: $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{n}$. Megállapíthatjuk, hogy mivel mind az $\boldsymbol{E}$, mind a $\boldsymbol{H}$ az $\boldsymbol{n}$ terjedési irányra merőleges, így az elektromágneses hullám transzverzális hullám. Hasonlóképpen járhatunk el a „-”$\boldsymbol{n}$ egységvektor irányába terjedő haladó hullám esetében. A különbség nyilván az előjelekben van:

$$+\frac{1}{c}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

$$+\frac{1}{c}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \boldsymbol{H}.$$

Kocka alakú üregbe zárt elektromágneses hullám

A következő problémát azért vizsgáljuk meg, mert hasonlóan a mechanikához, itt is azt fogjuk tapasztalni, hogy az elektromágnesesség esetén is megjelenik a fizikai mennyiségekre vonatkozó diszkrét megoldások megjelenése. Tekintsünk egy ideális vezetőből készült kocka alakú üregben kialakult elektromágneses teret. A megoldást a fenti hullámegyenletek szolgáltatják, a kialakuló teret a határfelületek szabják meg. A megoldás keresésekor kihasználjuk, hogy – egyrészt – az ideális vezetőben az elektromos térerősség értéke zérus, másrészt, mivel az $\boldsymbol{E}$ térerősség tangenciális komponense folytonosan viselkedik a vezető határán, ezért e tangenciális komponensnek el kell tűnnie. (A kocka egyik csúcsa az origóban van, élei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak, az oldalak hossza l.) Így

$E_x=0$, ha $y=0$ vagy $y=l$, $z=0$ vagy $z=l$,

$E_y=0$, ha $x=0$ vagy $x=l$, $z=0$ vagy $z=l$,

$E_z=0$, ha $x=0$ vagy $x=l$, $y=0$ vagy $y=l$.

E hullámegyenletnek e határfeltételeket kielégítő megoldásai:

$$E_x = \sum_n \mathrm{A}_{\mathrm{nx}}(\mathrm{t}) \, cos(\mathrm{n_x}\frac{\pi}{l}\mathrm{x}) \, sin(\mathrm{n_y}\frac{\pi}{l}\mathrm{y}) \, sin(\mathrm{n_z}\frac{\pi}{l}\mathrm{z})$$

$$E_y = \sum_{\mathrm{n}} \mathrm{A_{ny}(t)}\, sin(\mathrm{n_x}\frac{\pi}{l}\mathrm{x})\, cos(\mathrm{n_y}\frac{\pi}{l}\mathrm{y})\, sin(\mathrm{n_z}\frac{\pi}{l}\mathrm{z})$$

$$E_z = \sum_{\mathrm{n}} \mathrm{A_{nz}(t)}\, sin(\mathrm{n_x}\frac{\pi}{l}\mathrm{x})\, sin(\mathrm{n_y}\frac{\pi}{l}\mathrm{y})\, cos(\mathrm{n_z}\frac{\pi}{l}\mathrm{z})$$

Az n_x, n_y és n_z nem negatív egész számok. A $\boldsymbol{A}_n(t)=(\boldsymbol{A}_{nx}(t), \boldsymbol{A}_{ny}(t), \boldsymbol{A}_{nz}(t))$ amplitúdó vektorok időfüggését a hullámegyenlet határozza meg, de ettől függetlenül a fenti megoldás állóhullámok szuperpozíciója. Ennek a megoldásnak ki kell elégítenie a $div\boldsymbol{E}=0$ egyenletet is, amivel:

$$\sum_n \left(n_x A_{nx} + n_y A_{ny} + n_z A_{nz}\right) sin\left(\mathrm{n_x}\frac{\pi}{l}\mathrm{x}\right) sin\left(\mathrm{n_y}\frac{\pi}{l}\mathrm{y}\right) sin\left(\mathrm{n_z}\frac{\pi}{l}\mathrm{z}\right) = 0$$

Ez az egyenlet csak akkor teljesül minden x,y,z értékre, ha

$$n_x A_{nx} + n_y A_{ny} + n_z A_{nz} = 0$$

teljesül, azaz $\boldsymbol{n}\boldsymbol{A}_{\mathrm{n}}=0$ minden n-re. Ez az összefüggés a három komponens között azt eredményezi, hogy az amplitúdó vektornak csak két komponense független. Ha felbontjuk az amplitúdó vektort az

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{n}} = A_{1\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{1\mathrm{n}} + A_{2\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{2\mathrm{n}},$$

alakra, ahol $\boldsymbol{e}_{1\mathrm{n}}$ és $\boldsymbol{e}_{2\mathrm{n}}$ az $\boldsymbol{n}$ vektorra merőleges síkban lévő egymásra is merőleges két egységvektor, akkor láthatóan két egymásra merőleges síkhullám megoldás van. Az amplitúdókat a hullámegyenletből származtatható

$$\ddot{A}_n + 4\pi^2\nu_n^2\, A_n = 0$$

differenciálegyenletek határozzák meg, ahol

$$\nu_n = \frac{c}{2l}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

az üregben kialakuló rezgések lehetséges frekvenciája. Azaz a geometriai adatok meghatározzák az elektromágneses hullám frekvenciáját. Ezt a tényt alkalmazzák az olyan rezonátorokban, mint amilyen pl. a magnetron, amellyel mikrohullámú sugárzást lehet előállítani.

Az elektromágneses potenciálok

Már a mechanikai problémák esetén is láttuk, hogy a potenciálok használata nagymértékben segítette az egységes szemlélet kialakítását, másrészt a feladatok megoldását. Most is azt gondoljuk, hogy érdemes a mérhető mennyiségeket potenciálok segítségével előállítani. Maxwellt követve vezessük be az $\boldsymbol{A}$ vektorpotenciált a

$$\boldsymbol{B} = rot\,\boldsymbol{A}$$

definícióval. A (3) egyenletbe történő helyettesítéssel:

$$rot\left(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{A}}\right) = 0$$

adódik. Mivel a vektoranalízis szerint *rot grad* ≡0 azonosság fenn áll, így a zárójelben álló kifejezés egy skalárfüggvény gradienseként biztosan előállítható

$$\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{A}} = -\,grad\,\varphi,$$

ahol φ a skalárpotenciál. (A negatív előjelet azért célszerű odaírni, mert így kerül összhangba az elmélet az elektrosztatikában tanultakkal.) Ezt követően az elektromos térerősség

$$\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \,grad\,\varphi.$$

Az (1) egyenletbe helyettesítve ***E***-t és ***B***-t

$$\frac{1}{\mu_0} rot\,rot\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{j} - \varepsilon_0\,\ddot{\boldsymbol{A}} - \varepsilon_0\,grad\,\dot{\varphi}$$

adódik. A *rot rot* **A**-t átalakítva kapjuk, hogy

$$\Delta\boldsymbol{A} - \varepsilon_0\mu_0\,\ddot{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\boldsymbol{j} + grad\,div\,\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\,grad\,\dot{\varphi}.$$

A potenciálok között – azok nem-egyértelműsége miatt – egy kapcsolat állítható fel

$$div\,\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\,\dot{\varphi} = 0,$$

amelyet Lorenz-feltételnek nevezünk. Ezzel egy fontos egyenlethez jutunk, amely megmutatja, hogy az mérhető elektromos áramsűrűség milyen kapcsolatban van a vektorpotenciállal

$$\Delta\boldsymbol{A} - \varepsilon_0\mu_0\,\ddot{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\boldsymbol{j}.$$

Másrészt

$$div\,\boldsymbol{E} = -div\,\dot{\boldsymbol{A}} - \;div\,grad\,\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

valamint a Lorenz-feltételt figyelembe véve:

$$\Delta\varphi - \varepsilon_0\mu_0\ddot{\varphi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Ha az áramsűrűség és a töltéssűrűség zérus, akkor a két egyenlet tiszta hullámegyenlet. A két egyenlet általános megoldása bizonyítás nélkül:

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\boldsymbol{j}(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c})}{r}d\xi d\eta d\zeta$$

és

$$\varphi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c})}{r}d\xi d\eta d\zeta$$

Itt az (x,y,z) azon P pont koordinátái, amelyikben a skalár- ill. a vektorpotenciált meg szeretnénk határozni. A (ξ,η,ζ) pedig a Q futópont koordinátái a V térfogaton belül. Az r a P és Q pontok közötti távolság, így mind az (x,y,z) és (ξ,η,ζ) függvénye. A potenciálok a töltés és áramsűrűség $t = r/c$ korábban felvett értékeitől függenek. A két megoldás közül pl. a töltéssűrűség esetén kialakuló elektromos potenciál formulájának fizikai értelmezéséhez tekintsük a következőt. A dQ elemi töltést a

$$dQ = \rho(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c})d\xi d\eta d\zeta$$

adja meg. Az ettől származó $d\varphi$ potenciál, ahogy azt az elektrosztatikában is láttuk már

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r}.$$

Az integrálással pedig összeadjuk az elemi töltésektől származó potenciálokat. Egyszerű problémáktól eltekintve a fenti integrálok kiszámolása analitikusan nem hajtható végre. Számítógépen futtatott numerikus módszerekkel azonban igen nagy pontossággal kivitelezhető a térmennyiségek kiszámolása.

A dipólsugárzás

Az elektromágneses hullámok keltésének egy – a már megismert rezonátorokon (üregsugárzáson) túli – lehetősége a rezgő dipólokkal létrehozott sugárzás. (Ezek a dipólok lehetnek makroszkópikus méretű antennák, de molekula, sőt atommag méretűek is. A különbség elsősorban nem a teljesítményen, hanem a sugárzás frekvenciájában van.) Az egyszerű dipól sugárzásához egy eléggé általánosan használható úton keresztül jutunk majd el. Az elektrosztatikában megismertek szerint az anyagi közeg jelenléte esetén a $\boldsymbol{D}$ eltolási vektor a polarizáció jelensége miatt módosul

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}\,.$$

A modellbeli számolás során szorítkozzunk olyan közegre, amelyben nincsenek „külső" áramok, azaz $\boldsymbol{j}=0$, és nincsenek „kívülről jött" töltések, azaz $\rho=0$. E feltevéseket figyelembe véve az (1) Maxwell-egyenletbe történő helyettesítéssel

$$rot\, \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \dot{\boldsymbol{E}} + \dot{\boldsymbol{P}}$$

adódik. Itt a

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{j}_P$$

polarizáció jelensége során megjelenő *(„lokális")* áramsűrűségnek felel meg. Éppen ezért a vektorpotenciál előállítására az

$$\Delta \boldsymbol{A} - \varepsilon_0 \mu_0\, \ddot{\boldsymbol{A}} = -\mu_0 \dot{\boldsymbol{P}}$$

kapcsolat adható meg. Mivel a

$$div\, \boldsymbol{D} = 0$$

esete érvényes, ezért a

$$div\, \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} div\, \boldsymbol{P}$$

érvényes. Ezt az összefüggést viszont a skalárpotenciál előállítására használhatjuk:

$$\Delta\varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\varphi} = \frac{1}{\varepsilon_0} div\, \boldsymbol{P}.$$

A vektorpotenciál előállítására szolgáló kifejezés alapján egyszerű belátni (a $\boldsymbol{j}$ helyett $\boldsymbol{P}$ időderiváltját kell beírni), hogy most ez a polarizáció vektorával is megtehető

$$A(x,y,z,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{P}(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c})}{\partial t} d\xi d\eta d\zeta.$$

A további számolások elvégzése céljából (!) érdemes bevezetni – tehát nem fizikai okokból, hanem a matematika számolások kivitelezhetősége miatt – a ***Z*** Hertz-vektort az alábbi definícióval:

$$\boldsymbol{A} = \varepsilon_0\mu_0\dot{\boldsymbol{Z}}$$

és

$$\varphi = -div\,\boldsymbol{Z}.$$

Könnyű észrevenni, hogy a definíció a Lorenz-összefüggés kihasználásán alapul. Ekkor az imént definiált Hertz-vektor

$$\boldsymbol{Z}(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\boldsymbol{P}(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c})}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

amely azért kényelmesebb, mint az előző integrál, mert ez nem tartalmaz idő szerinti deriválást. Látható tehát, hogy a ***P*** polarizáció ismeretében a ***Z*** Hertz-vektor integrálással közvetlenül megkapható, majd belőle az ***A*** vektor- és a φ skalárpotenciál deriválásokkal kiszámolható. A következő lépésben pedig ezekből a mérhető ***E*** és ***B*** térmennyiségek adhatók meg. A vázolt módszernek – a segédmennyiségek (potenciálok, Hertz-vektor) bevezetésének és a számolásban való alkalmazásának – ez a lényege és tanulsága!

Megjegyzés: Maxwell az ***A*** vektorpotenciált olyan matematikai mennyiségként értelmezte és definiálta, amelynek változása az ***E*** és ***B*** mérhető fizikai mennyiségeket adja meg. Az elektrodinamikában valóban nem lehet mérhető fizikai mennyiségként értelmezni a vektorpotenciált. A kvantumjelenségekben azonban mégis van fizikai realizációja! (lásd. Aharonov-Bohm-effektus)

A fentieket alkalmazva számoljuk ki egy pontszerű dipólus terét. Maga a pontszerű dipól matematikailag a

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{p}(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

összefüggéssel adható meg, ahol a $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ a Dirac-(delta-)függvény. Ez mutatja, hogy tényleg csak az r_0 helyen van egyetlen p(t) dipól. Az elektromos térerősséget a

$$\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - grad\,\varphi = -\varepsilon_0\mu_0\ddot{\boldsymbol{Z}} + grad\,div\,\boldsymbol{Z}$$
$$= \Delta\boldsymbol{Z} - \varepsilon_0\mu_0\,\ddot{\boldsymbol{Z}} + rot\,rot\,\boldsymbol{Z}$$

összefüggésekkel tudjuk megadni. Itt az első két tag

$$\Delta\boldsymbol{Z} - \varepsilon_0\mu_0\,\ddot{\boldsymbol{Z}} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P},$$

de a tekintett dipóluson kívül a térben más dipólus nincs, azaz $\boldsymbol{P} \equiv 0$, így a fenti formula a

$$\Delta\boldsymbol{Z} - \varepsilon_0\mu_0\,\ddot{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{0}$$

összefüggésre egyszerűsödik. Ezzel viszont a dipóluson kívüli térre fenn áll az

$$\boldsymbol{E} = rot\; rot\; \boldsymbol{Z}.$$

A részletes számolást mellőzve ekkor az elektromos térerősség egy végformulában kifejezhető:

$$\boldsymbol{E} = rot\; rot\; \boldsymbol{Z} = \frac{3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{p})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3} + \frac{1}{c}\left(\frac{3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{p}')}{r^4} - \frac{\boldsymbol{p}'}{r^2}\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{p}'')}{r^3} - \frac{\boldsymbol{p}''}{r}\right),$$

ahol $\boldsymbol{p}'$ és $\boldsymbol{p}''$ a $t'=t-r/c$ argumentum szerinti deriváltat jelenti. Hasonlóan a mágneses térerősség is kiszámolható:

$$\boldsymbol{B} = rot\;\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}rot\dot{\boldsymbol{Z}} = -\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{p}'}{r^3} - \frac{1}{c}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{p}''}{r^2}\;.$$

A térbeli egyetlen – állandó $\boldsymbol{\omega}$ körfrekvenciájú és amplitúdójú –

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_0\, e^{i\omega t}$$

dipólustól származó rezgés esetén az $\boldsymbol{E}$ elektromos térerősség nagyságrendje

a sztatikus zónában: $\left|\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right| = \frac{p_0}{r^3}$,

a középső zónában: $\left|\frac{\boldsymbol{p}'}{c\,r^2}\right| = \frac{\omega\, p_0}{c\,r^2}$,

a hullámzónában: $\left|\frac{\boldsymbol{p}''}{c^2\,r}\right| = \frac{\omega^2\, p_0}{c^2\,r}$.

A három zóna térerősség értékeinek aránya:

$$\frac{p_0}{r^3}:\frac{\omega\, p_0}{c\,r^2}:\frac{\omega^2\, p_0}{c^2\,r} = \frac{1}{r^2}:\frac{\omega}{c\,r}:\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{1}{r^2}:\frac{2\pi}{\lambda\,r}:\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2},$$

ahol

$$\lambda = 2\pi\frac{c}{\omega}.$$

A végkövetkeztetés az, hogy nagy távolságban már csak a hullámzónára jellemző tag marad meg.

Hullámoptika

Monokromatikus síkhullámok

Már korábban láttuk, miként kell a hullámegyenlet általános megoldásait felírni. Mivel a megoldás függvényalakja tetszőleges differenciálható függvény lehet, így a mostani vizsgálatunk szempontjából a legfontosabb rész az argumentum, amely az $\boldsymbol{n}$ normálvektor esetén

$$t-\frac{\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}}{c}.$$

Ezt célszerű átalakítanunk egy $-\boldsymbol{\omega}$-val való szorzás segítségével

$$\rightarrow -\omega\left(t-\frac{\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}}{c}\right)=\frac{\omega}{c}\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}-\omega t$$

módon. Ezzel egyrészt az argumentum dimenziómentessé vált, másrészt érdemes további meggondolásokat tenni. Tudjuk, hogy a hullámszám

$$k=\frac{1}{\lambda}=\frac{\nu}{c},$$

most viszont ennek $2\boldsymbol{\pi}$-szerese áll az ezelőtti egyenlet jobb oldalának első tagjában. Ekkor ugyanazzal a k jelöléssel szokás bevezetni a cirkuláris hullámszám nevű mennyiséget, amely eszerint

$$k=\frac{\omega}{c}$$

és ezzel a cirkuláris hullámszám vektort, amely

$$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{n}.$$

Így az argumentum alakja

$$\boldsymbol{kr}-\omega t.$$

Amennyiben a továbbiakban monokromatikus harmonikus síkhullám megoldásokra szorítkozunk, úgy a térerősségek az

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

és

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

alakban írhatók fel. Mint látni fogjuk – és a fizika más területein is találkozhattunk ehhez hasonló „trükkel" – ez az exponenciális írásmód nagymértékben segíti a számolások végrehajtását, ugyanakkor ebben az esetben a térerősségek komplex mennyiségek lesznek. Ez utóbbi tény azonban nem okoz problémát, mert a fizikailag mérhető mennyiség a komplex mennyiség valós részével azonosítható. A $_0$ index az amplitúdó konstans értékére utal. A monokromatikusságot az egyetlen $\boldsymbol{\omega}$ körfrekvencia jelenléte testesíti meg.

E mennyiségeket a Maxwell-egyenletekbe helyettesítve kapcsolatot találhatunk köztük. Mielőtt azonban ezt megtennénk, számoljuk ki a következő idő- és helyszerinti deriváltakat:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = -i\omega \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = -i\omega \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

$$div\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = i\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

$$div\, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = i\boldsymbol{k}\boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

$$rot\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

$$rot\, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

Ezeket a Maxwell-egyenletekbe helyettesítve jól látható, hogy az exponenciális kifejezésekkel egyszerűsíthetünk, azaz térerősségek amplitúdóit valamint a hullámszám vektort összekapcsoló idő- és helyfüggetlen egyenletrendszert kapunk. Ezt követően a fentiek el nem felejtésével a $_0$ indexet el fogjuk hagyni. Így a Maxwell-egyenletek átírhatók

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \mu \boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon k E} = 0$$

$$\mu \boldsymbol{k H} = 0$$

alakba. A második egyenletet $\boldsymbol{k}$-val balról vektoriálisan szorozva kapjuk:

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) = \omega\mu\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H},$$

amely egyenlet bal oldalát az

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB})$$

azonossággal átalakíthatjuk. Ezt követően a fenti egyenlet bal oldala:

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{kE}) - k^2\boldsymbol{E}$$

Figyelembe véve, hogy $\boldsymbol{kE}$=0 (a két vektor egymásra merőleges), továbbá az első egyenletet felhasználva

$$-k^2\boldsymbol{E} = \omega\mu\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega^2\boldsymbol{\varepsilon}\mu\boldsymbol{E}.$$

Innen leolvasható, hogy

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu,$$

amelyből

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Az $\boldsymbol{E}_0$ és $\boldsymbol{H}_0$ vektorok komplex értékű vektorok, így ezek minden komponense is az. Az $\boldsymbol{E}_0$ komplex vektor – hasonlóan $\boldsymbol{H}_0$ is – felírható

$$\boldsymbol{E}_0 = (E_{0x}e^{i\delta_x}, E_{0y}e^{i\delta_y}, E_{0z}e^{i\delta_z})$$

alakban, ahol az E_{0x}, E_{0y}, E_{0z} valós értékű mennyiségek, a komplex tulajdonságot az e-ados kifejezés adja a $\boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{\delta}_y$, $\boldsymbol{\delta}_z$ kezdőfázisokon keresztül. Ha pl. az x tengely irányába terjedő hullámot tekintünk (E_x=0), akkor a térerősség y és z komponensei:

$$E_y = E_{0y}e^{i\delta_y}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

és

$$E_z = E_{0z}e^{i\delta_z}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

lesznek. Itt a két kezdőfázis nem feltétlenül azonos, ezért a vektor végpontja az (y,z) síkban ellipszis pályán mozog. Két fontos speciális esetet érdemes megkülönböztetni:

a, Ha $\delta_y = \delta_z$, akkor a hullám síkban poláros. Ha még E_y=0 is teljesül, akkor az (x,y) sík a polarizáció síkja, míg az (x,z) sík a rezgési sík.

b, Ha $\delta_z = \delta_y \pm \boldsymbol{\pi}/2$, akkor a hullám (balra illetve jobbra) cirkulárisan poláros.

Az optikailag átlátszó anyagokon áthaladó elektromágneses hullám polarizáltságának megváltozásából az anyagi minőségre és összetételre lehet következtetni.

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei

Az elektromágneses hullámok tanulmányozását kiterjesztjük arra az esetre, amikor monokromatikus síkhullám esik két homogénnek tekintett szigetelő közeg határfelületére az (x,y) síkban az *y=0* egyenesen. A tapasztalat szerint ekkor az 1. közegből érkező nyaláb egy része visszaverődik, másik része a 2. közegbe hatolva megtörik. Ekkor három síkhullám van, s a visszavert és megtört nyaláb esetében feltételezhetjük, hogy az amplitúdók mellett a beeső értékekhez képest a cirkuláris hullámszámok és a körfrekvenciák is egyaránt megváltozhatnak:

a beeső: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$,

a visszavert: $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0' e^{i(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}-\omega' t)}$,

a megtört: $\boldsymbol{E}''(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0'' e^{i(\boldsymbol{k}''\boldsymbol{r}-\omega'' t)}$

Az elektromos tér transzverzális komponense viselkedik folytonosan a szigetelő felületén:

$$\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{t} e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} + \boldsymbol{E}_0' \boldsymbol{t} e^{i(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}-\omega' t)} = \boldsymbol{E}_0'' \boldsymbol{t} e^{i(\boldsymbol{k}''\boldsymbol{r}-\omega'' t)} .$$

Az összefüggés csak akkor lehet minden időpontban igaz, ha a körfrekvenciákra fenn áll az

$$\omega = \omega' = \omega''$$

egyenlőség, azaz a visszavert és megtört hullám frekvenciája megegyezik a beeső hullám frekvenciájával. Ez azt jelenti, hogy a visszaverődés és törés folyamatában a fény színe nem változik meg. Ezt figyelembe véve a továbbiakban annak is érvényesnek kell lenni, hogy az *y=0* egyenes bármely pontjában a fenti összefüggésnek teljesülnie kell, ami úgy lehet, hogy

$$\boldsymbol{kr} = \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}''\boldsymbol{r} .$$

Ebből viszont következik, hogy

$$k_x = k_x' = k_x''$$

és

$$k_z = k'_z = k''_z \,.$$

Mivel a beeső hullámban k_z=0, ezért

$$k'_z = k''_z = 0,$$

azaz a beeső, a visszavert és a megtört nyaláb egyaránt az (x,y) síkban vannak.

A cirkuláris hullámszámok a körfrekvenciák és a közegbeli terjedési sebességek segítségével mindhárom esetre kifejezhetők:

$$k = \frac{\omega}{c_1} = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\ ,$$

$$k' = \frac{\omega}{c_1} = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,,$$

$$k'' = \frac{\omega}{c_2} = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,.$$

Az α beesési, az α' visszaverődési és β törési szögekre az alábbi összefüggések írhatók fel:

$$\sin\alpha = k_x/k\ ,$$

$$\sin\alpha = k'_x/k'\ ,$$

$$\sin\beta = k''_x/k'',$$

A fenti feltételek figyelembe vételével megállapíthatjuk, hogy

$$\alpha = \alpha',$$

azaz a beesési és visszaverődési szögek megegyeznek. Másrészt fenn áll a

$$\frac{sin\,\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}$$

összefüggés, amely a beesési és törési szög közötti kapcsolat – a geometriai optikából ismert Snellius-Descartes-törvény. Itt az n_{21} a 2-es közeg 1-es közegre vonatkoztatott törésmutatója. Továbbá a törésmutató értéke az anyagi paraméterekkel kifejezhető

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} .$$

Ha felhasználjuk, hogy $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ és $\mu=\mu_r\mu_0$, valamint az, hogy szigetelőkre a $\mu_r\approx 1$, úgy a törésmutató

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} .$$

A geometriai optika egyik nagy hiányossága, hogy semmit sem tud mondani a visszavert és megtört hullám intenzitásairól. A hullámoptika keretén belül e kérdés megválaszolható. Elsőként az elektromos és mágneses térerősség tangenciális

$$E_x + E'_x = E''_x ,$$

$$E_z + E'_z = E''_z ,$$

$$H_x + H'_x = H''_x ,$$

$$H_z + H'_z = H''_z$$

és normális

$$\varepsilon_1(E_y + E'_y) = \varepsilon_2 E''_y ,$$

$$\mu_1(H_y + H'_y) = \mu_2 H''_y$$

komponenseit kell felírnunk. Az első két Maxwell-egyenletből már megmutattuk, hogy monokromatikus síkhullámok esetére átírhatók

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{E} ,$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \mu \boldsymbol{H}$$

alakra. A matematikai műveletek végrehajtásához a térerősség komponensek mellett meg kell adjuk a cirkuláris hullámszám vektorok komponenseit. Jelen geometria esetén ezek:

$$\boldsymbol{k} = k(\sin\alpha , -\cos\alpha, 0),$$

$$\boldsymbol{k}' = k(\sin\alpha , \cos\alpha, 0),$$

$$\boldsymbol{k}'' = k\, n_{21}(\sin\beta , -\cos\beta, 0).$$

A vektorszorzatok kiszámolásával belátható, hogy a fenti két Maxwell-egyenlet a térerősség vektorok komponenseit tekintve két független egyenletrendszerre esik szét. Azaz eszerint az egyik csak az E_x, E_y és H_z komponenseket, míg a másik csak a H_x, H_y és E_z komponenseket tartalmazza. A szétcsatolódó két esetnek külön neve is van.

Transzverzális mágneses módusról beszélünk, ha az
(E_x, E_y, H_z) hármast tekintjük az H_x, H_y és E_z zérustól különböző értéke mellett is.

Transzverzális elektromos módusról beszélünk, ha a
(H_x, H_y, E_z) hármast tekintjük az E_x, E_y és H_z zérustól különböző értéke mellett is.

A Brewster-törvény

A síkban polarizált hullámok előállítása szempontjából kiemelt fontosságú tényt állapít meg Brewster-törvény: létezik egy olyan beesési szög, amely esetén a transzverzális mágneses módus a visszavert hullámban hiányzik, azaz a visszavert hullám síkban polarizált. Ekkor a megtört és visszavert sugár egymásra merőleges.

A térerősség komponenseket transzverzális mágneses módusra írjuk fel. A levezetésnél figyelembe vesszük, hogy $\mu_1=\mu_2\approx 1$. A törvény igazolásához szükséges egyrészt a transzverzális mágneses módus térerősség komponenseire vonatkozó két egyenlet

$$E_x + E_x' = E_x'' \,,$$

$$H_z + H_z' = H_z'' \,,$$

másrészt a

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{E}$$

Maxwell-egyenletbe történő behelyettesítéssel előálló kifejezések:

$$E_x = \frac{1}{\omega\varepsilon_1} k \, H_z \cos\alpha \,,$$

$$E_x' = -\frac{1}{\omega\varepsilon_1} k \, H_z' \cos\alpha \,,$$

$$E_x'' = \frac{1}{\omega\varepsilon_2} k \, n_{21} H_z'' \cos\beta \,.$$

Az elektromos térerősség x komponenseire vonatkozó egyenletébe történő behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$H_z - H_z' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_{21} \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} H_z'' \,.$$

Figyelembe véve egyúttal az együtthatók közötti

$$n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{sin\,\alpha}{\sin\beta}$$

kapcsolatokat, ezt az összefüggést átírhatjuk a

$$H_z - H_z' = \frac{sin\,2\beta}{\sin 2\alpha} H_z''$$

alakra. A mágneses térerősségek *z* komponensei között fennálló fenti kapcsolattal

$$H_z' = \frac{1 - \frac{sin\,2\beta}{\sin 2\alpha}}{1 + \frac{sin\,2\beta}{\sin 2\alpha}} H_z$$

következik. A visszavert sugárból tehát akkor hiányzik a transzverzális mágneses módus, ha a számláló eltűnik, azaz

$$1 = \frac{sin\,2\beta}{\sin 2\alpha} \,.$$

Ez az összefüggés két esetben teljesül. Ha

$$\alpha = \beta,$$

tehát nincs megtört nyaláb. Ez most egy érdektelen megoldás. A másik esetben

$$2\beta = \pi - 2\alpha,$$

vagyis

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \,.$$

A transzverzális mágneses módus eltűnésének – és visszavert fény polarizáltságának – feltétele, hogy a visszavert és megtört nyaláb egymásra merőlegesek legyenek. Ez Brewster-törvénye.

Optikai rendszerekben széles körben alkalmazzák a Brewster-törvényt. A lézerekből kijövő fénynyaláb polarizáltsága is ennek köszönhető.

A teljes visszaverődés

A Snellius-Descartes törési törvény szerint a

$$\frac{sin\,\alpha}{\sin\beta} = n_{21},$$

és ha $n_{12}>1$, akkor az $\alpha>\beta$ feltétel mindig teljesül, azaz minden ilyen esetben van megtört nyaláb. Ellenben az $n_{12}<1$ esetben a geometriai optika szerint az optikailag sűrűbb közegből az optikailag ritkább közegbe való beesésnél létezik olyan beesési szög, amelynél már egyáltalán nincs megtört sugár. Ezt a jelenséget nevezik teljes visszaverődésnek. Felvetődik a kérdés, hogy a hullámoptika milyen eredményt jósol erre az esetre? Kiindulásul a már alkalmazott szükséges összefüggéseket soroljuk fel:

$$k_x = k'_x = k''_x,$$

$$k_z = k'_z = k''_z = 0,$$

$$k'' = k\, n_{21},$$

$$k''_x = k\, sin\,\alpha.$$

A megtört sugár hullámszám vektorának *y* komponensét kell kiszámolnunk ahhoz, hogy megválaszolhassuk: teljes visszaverődés esetén behatol-e fény az optikailag ritkább közegbe vagy sem? Felhasználva, hogy

$$k''^2 = k''^2_x + k''^2_y,$$

a k''_y komponens egyszerűen kifejezhető:

$$k''^2_y = k''^2 - k''^2_x = k^2 n_{21}^2 - k^2 sin^2\alpha = k^2(n_{21}^2 - sin^2\alpha) < 0.$$

Ennek négyzetgyökét véve a

$$k''_y = ia$$

komplex értékű kifejezéshez jutunk. Ez a hullámszám komponens mind az elektromos mind a mágneses térerősség kifejezésében az

$$e^{ik''_y y} = e^{-ay}$$

faktorral fog megjelenni. Leolvasható, hogy ez a behatolás mélységével exponenciálisan csökkenő tényezőt jelent. Ez viszont az a meglepő fizikai tényt fejezi ki, hogy teljes visszaverődés esetén is van kismértékű behatolás az optikailag ritkább közegbe. Ezt a behatoló hullámot evaneszcens hullámnak nevezik. Mikrohullámokkal könnyen demonstrálható a megjelenésük. *(Olvasmány: F. Albiol, S. Navas, M. V. Andres, Am. J. Phys.* ***61****, 165 (1993).)*

Az interferencia jelensége

A továbbiakban az tanulmányozzuk, hogy mi történik két vagy több elektromágneses hullám találkozásánál. (A hullámok találkozásával kapcsolatos jelenséget a mechanikai hullámoknál már részben tárgyaltuk. Most olyan további megállapításokat teszünk az elektromágneses hullámok példáján, amelyek a mechanikai hullámokra hasonlóképpen – a megfelelő körülményeket figyelembe véve – megállapíthatók.) Az elektromágneses tér energiamérleg egyenletéből láttuk, hogy az energiaáram-sűrűség vektor (Poynting-vektor) alakja

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}.$$

A (2) Maxwell-egyenlet már korábban felírt

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu c} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}$$

alakját véve a Poynting-vektor csak az $\boldsymbol{E}$ térerősség vektorral, valamint a terjedési irányba mutató $\boldsymbol{n}$ vektorral kifejezhető

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\mu c} \boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}) = \frac{1}{\mu c} \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{n} \,.$$

A hullám intenzitása a Poynting-vektor nagyságának időbeli átlaga, amely a fentiek alapján

$$I \sim \; < E^2 >$$

a térerősség négyzetével arányos kifejezés. A < > zárójel az időátlagot jelöli. Így két hullám találkozásakor, mivel a térerősségek a szuperpozíció elve szerint összeadódnak

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \,,$$

az eredő intenzitás a fentiek értelmében

$$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{E}_1^2 + \boldsymbol{E}_2^2 + 2\boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2$$

alakú lesz. A $2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2$ tagot interferencia tagnak nevezik. Látható, hogy ennek értékétől függ, hogy a két hullám intenzitása külön-külön számolható-e vagy kölcsönhatást is figyelembe kell venni.

Az interferencia feltételei

a, Amennyiben $\boldsymbol{E}_1$ és $\boldsymbol{E}_2$ egymásra merőlegesek, úgy nincs interferencia. Azaz az interferencia első feltétele, hogy $\boldsymbol{E}_1$ és $\boldsymbol{E}_2$ ne legyenek egymásra merőlegesek.

b, A további feltételek megállapításhoz tekintsünk két különböző frekvenciájú, egymástól egy $\boldsymbol{\delta}$ kezdőfázisban különböző párhuzamosan polarizált hullámot:

$$E_1 = E_{10} \cos \omega_1 t$$

és

$$E_2 = E_{20} \cos (\omega_2 t + \delta) .$$

Ekkor az interferencia taghoz tartozó intenzitás az

$$I_{int} \sim \int_0^t \cos \omega_1 t \ \ \cos (\omega_2 t + \delta)\, dt$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^t \{\cos [(\omega_1 + \omega_2)t + \delta] + \cos [(\omega_2 - \omega_1)t + \delta]\}\, dt$$

integrállal adható meg. Az integrál első tagjának hosszú időtartamra vett időátlaga zérus. A második tag átlaga akkor nem zérus, ha $\omega_1 = \omega_2$. Ebből következik az interferencia második feltétele, hogy csak azonos frekvenciájú hullámok interferálnak.

Megállapítható továbbá, hogy ha

$\delta = 0, 2\pi, \dots, 2n\pi$, ahol n egész szám, akkor erősítés van, míg

$\delta = \pi, 3\pi, \dots, (2n + 1)\pi$, ahol n egész szám, akkor gyengítés van. Ha a két hullám azonos intenzitású, akkor teljes kioltás jön létre.

c, Az interferencia teljesen nyilvánvaló feltétele, hogy a hullámok egymással egyáltalán találkozzanak. Ezt a tényt fejezi ki a koherencia hossz fogalma. Egy atomi legerjesztődés – amely során a fény keletkezik – jellemző hossza ~10^{-9}-10^{-8} s, amely alatt a fény kb. 0,3-3 m-t tesz meg. Ez egyben azt is jelenti, hogy ennyi egy hullámcsomag hossza. Interferencia során ezen a távolságon belül kell találkozniuk a hullámcsomagoknak. Léteznek olyan optikai eszközök pl. lézerek, amelyeknek a koherencia hossz több tíz, akár száz méter is lehet.

A fényelhajlás jelensége

Az elemi legerjesztődésből kiinduló harmonikus fényhullám a homogén és izotróp térben egy gömbhullám terjedésével írható le, amelynek alakja

$$\psi(r,t) = A\frac{1}{r}e^{i(kr-\omega t)} .$$

Mivel eleve azonos frekvenciájú hullámok vizsgálatára érdemes szorítkoznunk az interferenciával kapcsolatos jelenségek vizsgálatában, ezért az időfüggő részt valójában elhagyhatjuk, így csak a

$$\varphi(r) \approx \frac{1}{r}e^{ikr}$$

függvénnyel kell foglalkoznunk. (A hullámok közötti fáziskülönbség az úthossz különbségekből fog adódni.) Mielőtt tovább haladunk ki kell mondanunk egy fontos elvet.

Huygens-Fresnel-elv: A hullámfront minden pontja elemi gömbhullámok kiindulópontja, amely hullámok interferenciája adja az új hullámfelületet.

Két pontból induló hullám interferenciája

Képezzünk egy végtelen kiterjedésű vékony sík lemezen két rést egymástól *d* távolságra. A síkkal párhuzamosan, attól L távolságban (d<<L) legyen egy ernyő, amelyen felfogjuk az áthaladó fényt. A végtelen sík lemezre az ernyővel átellenes oldalról, a lemez síkjával párhuzamosan egy síkhullám esik. Ekkor a résből két, kezdetben azonos fázisú gömbhullám indul el. Ezek összege az ernyőn:

$$\frac{1}{r_1}e^{ikr_1} + \frac{1}{r_2}e^{ikr_2} \approx \frac{1}{r_1}e^{ikr_1}\left(1 + e^{ik(r_2-r_1)}\right).$$

A két hullám közötti úthossz különbsége kifejezhető a két rés *d* távolságával és az r_1 sugár és a rések síkjára merőleges egyenes által bezárt α szöggel:

$$r_1 - r_2 \approx d\,sin\,\alpha .$$

A zárójelben lévő exponenciális Euler-összefüggéssel történő kifejtésekor megjelenő

$$\cos(kd\,sin\,\alpha)$$

valós rész akkor maximális (=1), ha

$$kd\,sin\,\alpha = 0, 2\pi, \dots, 2n\pi .$$

Ez a feltétel felel meg az intenzitás maximumának. Míg akkor minimális (=-1), ha

$$kd\, sin\, \alpha = \pi, 3\pi, \ldots, (2n+1)\pi\ .$$

Ez a feltétel felel meg az intenzitás minimumának.

Elhajlás rácson

A rács N db egymástól *d* távolságban párhuzamosan elhelyezkedő rés. Az egyes hullámok járulékainak összege:

$$\frac{1}{r_1}e^{ikr_1} + \frac{1}{r_2}e^{ikr_2} + \cdots + \frac{1}{r_N}e^{ikr_N}\ .$$

Látható, hogy az egymás melletti *j*-edik és *j+1*-edik résből induló hullámok közötti úthossz különbség

$$d\, sin\, \alpha\ .$$

Így az

$$\frac{1}{r_N}e^{ikr_N}$$

kiemelésével a fenti összeg az

$$\frac{1}{r_N}e^{ikr_N}\left(1 + e^{ikd\, sin\, \alpha} + e^{i2kd\, sin\, \alpha} + \cdots + e^{i(N-1)kd\, sin\, \alpha}\right)$$

alakra írható. A zárójelben lévő összeg határozza meg, hogy adott szögben milyenek lesznek az intenzitásviszonyok, ezért a továbbiakban elég ezzel foglalkozni. Figyelembe véve, hogy az *S* összeg tagja mértani sort alkotnak, egyszerű átalakítás után kapjuk:

$$S = \frac{1 - e^{iNkd\, sin\, \alpha}}{1 - e^{ikd\, sin\, \alpha}}\ .$$

Az eredő hullám intenzitása e kifejezés négyzete, amely a komplex számok nyelvén az

$$I \sim S * S^c$$

szorzat kiszámolását jelenti, ahol S^c az *S* komplex konjugáltja. Végeredményül az

$$I \sim \frac{1-cos(Nkd\,sin\,\alpha)}{1-cos(kd\,sin\,\alpha)} = \frac{sin^2 \dfrac{Nkd\,sin\,\alpha}{2}}{sin^2 \dfrac{kd\,sin\,\alpha}{2}}$$

összefüggést kapjuk. A formula rövidítéséért bevezetjük az

$$y = kd\,sin\,\alpha$$

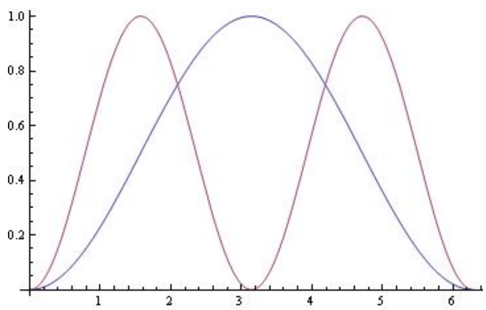
jelölést, amellyel az intenzitás az

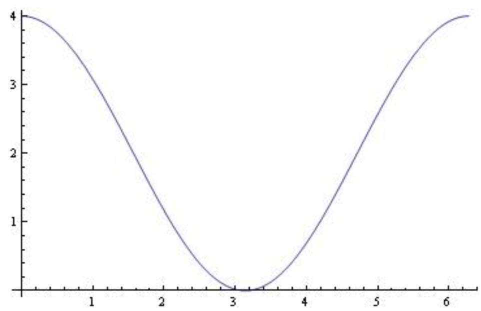
$$I \sim \frac{sin^2 \dfrac{N\,y}{2}}{sin^2 \dfrac{y}{2}}$$

egyszerűbb alakra hozható.

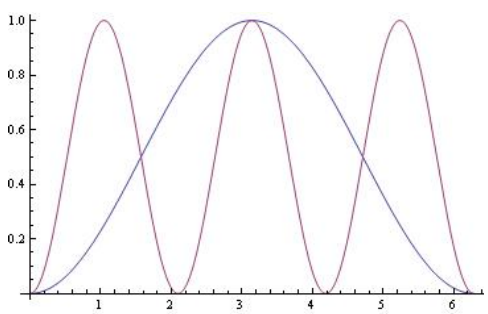
Az alábbi grafikonsorozat bal oldali grafikonjain a lila görbék a számlálót, a kék vonalai a nevezőt ábrázolják. A jobboldali grafikonok az intenzitásokat mutatják.

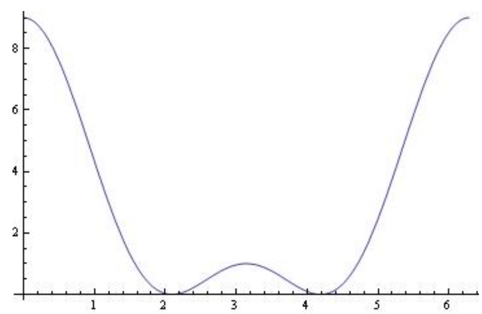
N=2 Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 0



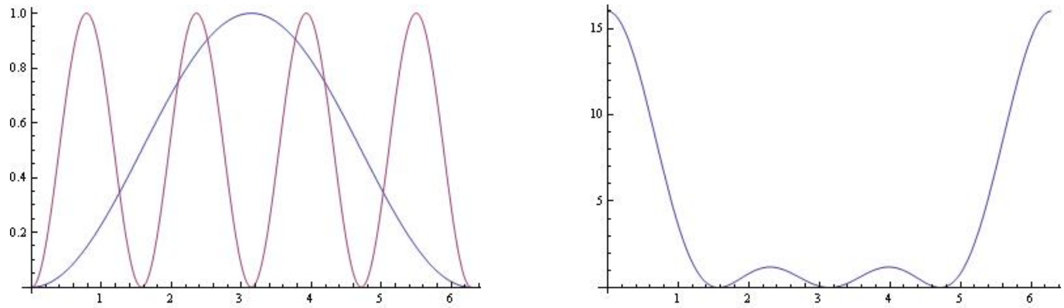


N=3 Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 1

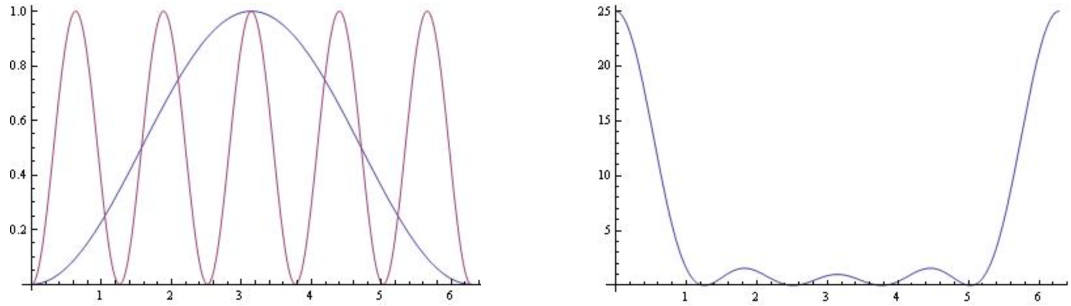




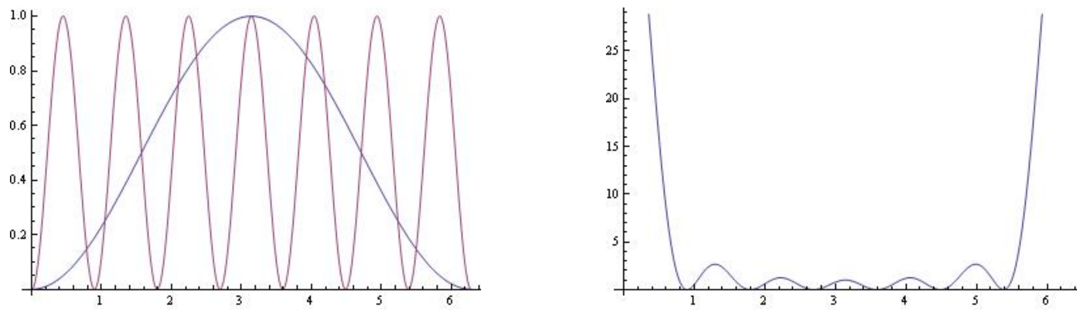
N=4 Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 2



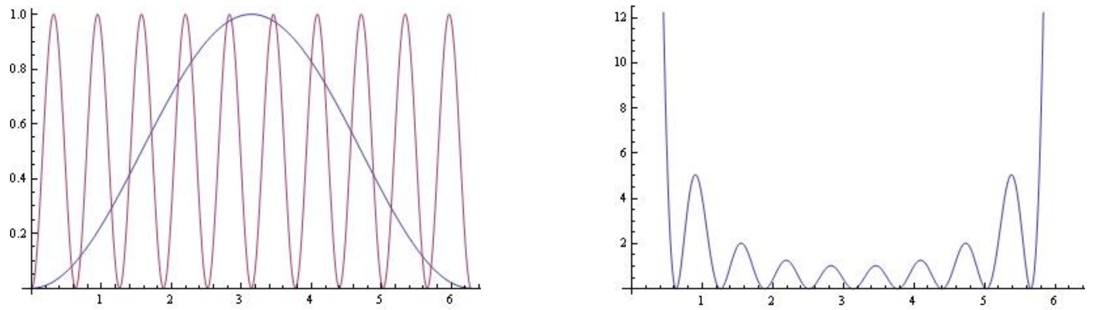
N=5 Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 3



N=7 Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 5



N=10 Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 8



Elhajlás résen

A d szélességű rést a $-d/2$ és $+d/2$ intervallumban helyezzük el. A rés minden pontja elemi hullámok kiindulópontja. Itt most a hullámok kiindulási pontja folytonosan helyezkednek el, így az x koordinátájú pontból származó járulékot az előzőek szerint az

$$e^{ikx\sin\alpha}$$

adja meg. A teljes réstől származó S összeg pedig egy integrállá változik:

$$S = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{ikx\sin\alpha}\, dx\ .$$

Az integrál kiszámolásához érdemes valós és képzetes részre szétbontani:

$$S = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cos(kx\sin\alpha)\, dx + i \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sin(kx\sin\alpha)\, dx\ .$$

A második integrál zérus, így a komplex rész eltűnik. Végül az eredmény:

$$S = \frac{2}{k\sin\alpha} \sin\frac{kd\sin\alpha}{2}\ .$$

Bevezetve az

$$y = \frac{kd\sin\alpha}{2}$$

jelölést, az intenzitás alakja

$$I \sim S^2 = d^2 \frac{\sin^2 y}{y^2}$$

lesz. Ennek első minimum helye:

$$\frac{kd\sin\alpha}{2} = \pi\ ,$$

amelyből a kioltáshoz tartozó szög

$$sin\,\alpha = \frac{\lambda}{d}.$$

Kör alakú nyílás esetében

$$sin\,\alpha = 1{,}22\frac{\lambda}{d}.$$

Az itt tárgyalt elhajlásjelenségek az „anyaghullámok” eseteire is változatlan alakban érvényesek. Az elektronmikroszkópban felgyorsított elektronokkal hasonlóképpen úgy alkothatunk képet, mintha az elektromágneses hullám lenne. A hullámhossza a Planck-állandó (h=6,63∗10^{-34}Js) és az elektron impulzusának hányadosaként – a de Broglie-féle hullámhossz: $\lambda=h/p$ – adható meg, az elektronmikroszkóp felbontóképessége a fentiek szerint számolható. Ugyanakkor az elhajlási kép nem az intenzitással, hanem a valószínűséggel lesz kapcsolatban. A valószínűség azonban a részecske jelleggel hozható összefüggésbe. Na, ezért izgalmas a részecske-hullám kettősség problematikája! Erre a kérdésre a kvantummechanika fejezetben térünk vissza.

A Fresnel-féle zónák

Tekintsünk egy gömb alakú hullámfrontot. Ekkor egy hullámfronton kívüli P pontból olyan kúpfelület sorozat szerkeszthető a hullámfelületen, amelyek kúpokhoz tartozó úthossz-különbség a fél hullámhossz egészszámú többszöröse:

$$m\frac{\lambda}{2}.$$

Ezek metszik ki a Fresnel-féle zónákat. Ekkor a P pontba szomszédos zónákból ellentétes fázissal érkeznek a hullámok, tehát az eredő amplitúdó:

$$A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \cdots.$$

A Fresnel-féle zónalencse

Az optikai tengelyen elhelyezkedő A pontból a B pontba érkeznek a hullámok egy az AB tengelyre merőleges síkfelületen keresztül. (Az A pont távolsága a síktól a, míg a B ponté b.) A két utat (A és B pontok között közvetlenül ill. a síkfelületen felvett r sugarú kör egy pontján keresztül) tekintve kiszámoljuk az úthossz-különbséget:

$$\Delta s = \sqrt{a^2 + r^2} - a + \sqrt{b^2 + r^2} - b\,.$$

Ezt érdemes átalakítani:

$$\Delta s = a\left(\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}-1\right)+b\left(\sqrt{1+\frac{r^2}{b^2}}-1\right)$$

alakra. A négyzetgyökös kifejezések kis *r* értékek esetén a

$$\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}} \approx 1+\frac{r^2}{2a^2}$$

mintájára átalakíthatók. Ezekkel az úthossz-különbség:

$$\Delta s \approx \frac{\mathrm{r}^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{b}}\right).$$

Az *i*-edik zóna sugarát r_i -vel jelölve, valamint figyelembe véve, hogy az *i*-edik úthossz-különbség

$$\Delta s_i = i\frac{\lambda}{2}$$

a formula átírható a

$$i\frac{\lambda}{2} = \frac{r_i^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{b}}\right)$$

alakra. Bevezetve az

$$f = \frac{r_i^2}{i\lambda}$$

jelölést az előző összefüggést átmegy a geometriai optikából ismert leképezés törvénybe:

$$\frac{1}{\mathrm{f}} = \frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{b}}.$$

Ennek következtében, ha minden második körgyűrűt kitakarjuk, akkor csak az egymást erősítő hullámok maradnak, így az elrendezés lényegében egy *f* fókuszú lencseként működik.

A geometriai optika, mint a hullámoptika határesete

Az előzőekben tárgyalt viszonylag bonyolult matematika levezetések hatására felvetődik a kérdés, hogy milyen esetekben szükséges az optikai jelenségeket feltétlenül a hullámoptika eszköztárával tárgyalni vagy esetleg elég a geometriai optika jóval egyszerűbb módszereit használni? A kérdés megválaszolásához induljunk ki a hullámtulajdonságokat megfogalmazó hullámegyenletből

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Keressük a megoldást a

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = A(\boldsymbol{r})e^{i(k_0 S(\boldsymbol{r}) - \omega t)}$$

alakban, ahol k_0 az adott hullámszám vákuumbeli értékét jelöli, míg az $S(\mathbf{r})$ a hullám térbeli – különböző anyagi közegeken keresztüli – terjedését is kifejező hely-dimenziójú függvény. E feltételeket követően helyettesítsük be a hullámegyenletbe.

A számolás egyszerűbb követése miatt célszerű a deriváltakat előre külön-külön kiszámolni:

$$\nabla\psi(\boldsymbol{r},t) = \big(\nabla A(\boldsymbol{r}) + ik_0 A(\boldsymbol{r})\nabla S(\boldsymbol{r})\big)e^{i(k_0 S(\boldsymbol{r}) - \omega t)}$$

$$\Delta\psi(\boldsymbol{r},t) = (\Delta A(\boldsymbol{r}) + 2ik_0\, \nabla A(\boldsymbol{r})\nabla S(\boldsymbol{r}) + ik_0\, A(\boldsymbol{r})\Delta S(\boldsymbol{r}) - k_0^2 A(\boldsymbol{r})(\nabla S(\boldsymbol{r}))^2)e^{i(k_0 S(\boldsymbol{r}) - \omega t)}$$

$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = -i\omega A(\boldsymbol{r})e^{i(k_0 S(\boldsymbol{r}) - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A(\boldsymbol{r})e^{i(k_0 S(\boldsymbol{r}) - \omega t)}.$$

A formulákat egy egyenletté összeírva – az exponenciális kifejezéseket a velük való egyszerűsítés miatt elhagyva – kapjuk:

$$\Delta A(\boldsymbol{r}) + 2ik_0\, \nabla A(\boldsymbol{r})\nabla S(\boldsymbol{r}) + ik_0\, A(\boldsymbol{r})\Delta S(\boldsymbol{r}) - k_0^2 A(\boldsymbol{r})(\nabla S(\boldsymbol{r}))^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\, A(\boldsymbol{r}).$$

Amennyiben a hullámszámról feltehető, hogy $k_0 \to 0$, azaz a hullámhossz $\lambda \to 0$, valamint az amplitúdó és a törésmutató helytől függő változása kicsi, akkor az egyenlet alakja a

$$k_0^2(\nabla S(\boldsymbol{r}))^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

egyenletre egyszerűsödik. Tekintettel arra, hogy

$$\frac{\omega}{k_0} = c_0 \,,$$

ahol c_0 a vákuumbeli fénysebesség, valamint

$$\frac{c_0}{c} = n,$$

ahol n a törésmutató, kapjuk a geometriai optika alapegyenletét – az eikonál egyenletet:

$$(\nabla S(\boldsymbol{r}))^2 = n^2.$$

Ez az egyenlet a geometriai optikában a Fermat-elv közvetlen következménye. Ez azt jelenti, hogy ha egy adott problémában a $k_0 \to \infty$ – azaz a hullámhossz $\lambda \to 0$ – feltételt el lehet fogadni, akkor elegendő a geometriai optikát alkalmazni.

Már előzetesen felvettük, hogy a részecskékhez is hullámhossz rendelhető. Vajon, hogy viszonyul ez a kérdés a $\lambda \to 0$ határátmenethez. Világos, hogy a Planck-állandó kis, az $p=mv$ impulzus nagy értéke együttesen azt eredményezi, hogy makroszkópikus testek esetén a testhez rendelhető hullámhossz zérus.