Kézirat a „Bevezetés a modern fizika fejezeteibe” c. tárgyhoz

írta: Márkus Ferenc
(BME Fizika Tanszék)

(utolsó módosítás: 2013. április 10.)

3. szakasz

A speciális relativitás elmélete

Relativisztikus kinematika

A XIX. század végén – éppen az elektromágneses fényelmélet kidolgozása kapcsán – felvetődött a kérdés: a fény mihez képest terjed véges sebességgel? Ha anyagi közegbeli terjedést tekintünk, akkor nyilván a közeghez képest. De mit lehet mondani a vákuumbeli terjedés esetében?

Az éterhipotézis: végtelen kis sűrűségű, rugalmas közeg, amely közegellenállást nem okoz, és olyan, mint a szilárd test, mert benne transzverzális hullámok terjednek. Az állítás az, hogy fény az éterhez képest terjed c sebességgel. Ha ez igaz, akkor a mechanika törvényei szerint egyenértékű rendszerek között mégis csak van egy kitüntetett, az abszolút nyugvó rendszer, amely az éterhez van rögzítve.

A hipotézis gondolatának megfelelően a Földhöz rögzített rendszerbeli fénysebesség mérésével el lehetne dönteni, hogy a Föld áll-e vagy – akármilyen sebességgel – mozog az éterhez képest. A gondolatkísérletben a következőket kell szem előtt tartanunk. Ha az éterben felvillantunk egy fényforrást, akkor az éterhez képest nyugvó rendszerben a terjedő fényhullám Δt idő alatt egy $c\Delta t$ gömbfelületet ér el. Az éterhez képest, az x tengely növekvő értékei felé v sebességgel mozgó rendszerből nézve a fény a különböző irányokban megtett útjai:

a növekvő x irányban:

$$(c - v)\Delta t,$$

a csökkenő x irányban:

$$(c + v)\Delta t,$$

az y irányban:

$$\sqrt{c^2 - v^2}\,\Delta t.$$

A Michelson-féle interferométer kísérlet

Az l hosszúságú karokat a fentiek figyelembe vételével különböző idő alatt futja be a fény. A nyalábosztó és a tükör közötti vízszintes oda-vissza utat

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = 2l\frac{c}{c^2-v^2} \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

idő alatt, míg a nyalábosztó és a tükör közötti függőleges oda-vissza utat

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} \approx \frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

idő alatt teszi meg. A két fénysugár ernyőre érkezése közötti időkülönbség

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

A fénynyalábok egymással interferálnak, amelynek következtében erősítés abban az esetben van, ha az időkülönbségekre Δt=0, $\pm T$, $\pm 2T$,… áll fenn. Másrészt gyengítés, akkor van, ha Δt= $\pm T/2$, $\pm 3T/2$,…; T a fény rezgésideje. Az interferencia kép az ernyőn látható. Ezt követően az interferométert körbeforgatva a csíkok eltolódását kellene tapasztalni. Ehelyett semmiféle csíkeltolódás nincs!

Lorentz-Fitzgerald: „étermentő” próbálkozás. Van éter, de tételezzük fel, hogy az éterhez képest mozgó test hossza

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

arányban megrövidül a mozgás irányában. Belátható, hogy ez esetben az időkülönbség tényleg zérusnak adódik. De mivel indokolnánk ezt a felvetést?

A fentiek szerint, mivel semmilyen módon nem lehet eldönteni két inerciarendszerről, hogy melyik áll és melyik mozog – a fény terjedése alapján sem –, ezért, Einstein javaslata alapján, az éter létezésének feltételezése indokolatlan. **A fény sebessége bármely egyenes vonalú egyenletesen mozgó rendszerben *c*.**

A speciális relativitási elv: az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző rendszerek egyenértékűek a természeti törvények leírása szempontjából.

Felvetődik a kérdés, alkalmas-e a fénysebesség vonatkoztatási rendszer függetlenségének kifejezésére a Galilei-féle transzformáció? Ennek eldöntésére fejezzük ki a fény sebességét a K és a K’ rendszerekben egyaránt:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

és

$$c' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}.$$

Majd tekintsük a két rendszert összekötő

$$\Delta x' = \Delta x - v\Delta t$$
$$\Delta x = \Delta x' + v\Delta t'$$

$$\Delta t = \Delta t'$$

transzformációkat. Ezt követően a K'-beli c' fénysebesség kapcsolatba hozható a K-beli c fénysebességgel, amelyre a

$$c' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t} = c - v$$

kapcsolatot kapjuk. Ez alapján egyszerűen megállapítható, hogy a Galilei-transzformáció a fénysebesség rendszerfüggetlenségével nem egyeztethető össze.

Lorentz-transzformáció

A kitűzött cél olyan K és K'-t összekötő transzformáció megtalálása, amely önmagában képes a fénysebesség rendszerfüggetlenségének biztosítására. Legyen a két rendszer mozgását megadó változósereg:

K rendszer: Δx, Δy, Δz, Δt
K' rendszer: $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, $\Delta t'$

A két rendszert összekötő transzformációtól elvárjuk, hogy

a, Az egyik rendszerben egyhelyű és egyidejű események a másik rendszerben is egyhelyű és egyidejű legyen.

b, A Δx, Δy, Δz, Δt koordinátákat az $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, $\Delta t'$ koordináták függvényében ugyanolyan alakú függvény adja meg mint fordítva.

c, A $v \ll c$ határesetben a transzformáció menjen át a Galilei-transzformációba.

d, A c fénysebesség minkét rendszerben egyezzen meg.

A fenti elvárásoknak megfelelő transzformáció alakját keressük az alábbi formában:

$$\Delta x = k(\Delta x' + v\Delta t')$$
$$\Delta x' = k(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta y = \Delta y'$$
$$\Delta z = \Delta z' \ .$$

Közvetlenül látható, hogy ha Δx'=0 és Δt'=0, akkor a Δx=0 és Δt=0 teljesül. Ez azt jelenti, hogy ha két esemény a K' rendszerben egyhelyű és egyidejű, akkor az a K rendszerben is az.
Alkalmazzuk a formulákat a fényre. Ekkor teljesülniük kell az alábbi összefüggéseknek:

$$\Delta x = c\Delta t$$
$$\Delta x' = c\Delta t' \ .$$

Ezekkel:

$$\Delta x = k\Delta x'(1 + \frac{v}{c})$$

$$\Delta x' = k\Delta x \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Egyszerűsítések után:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

A fenti összefüggésekből a K és K'-ben eltelt idők is kifejezhetők.

$$\Delta t = k\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right)$$

$$\Delta t' = k\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right).$$

Annak ellenőrzésére, hogy teljesül-e a fénysebesség rendszerfüggetlensége, indítsunk egy *c* sebességű fénysugarat a K rendszerben és nézzük meg, milyen sebességűnek adódik a K' rendszerben.

$$c' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{k(\Delta x - v\Delta t)}{k\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c^2}c} = c \ .$$

Megállapítható, hogy a Lorentz-transzformáció biztosítja a fénysebesség rendszerfüggetlenségét.

Egyidejűség és okság

Legyen a K' rendszerben két egyidejű, azaz $\Delta t'=0$, de nem-egyhelyű, azaz $\Delta x' \neq 0$, esemény. A transzformációs összefüggésekből következik:

$$\Delta t = k \frac{v}{c^2} \Delta x'$$

azaz a két esemény a K rendszerben nem egyidejű! Következésképp megállapítható, hogy az egyidejűség vonatkoztatási rendszertől függ – relatív vonatkozás.

Kérdés: nem fordulhat-e meg az ok-okozati összefüggés? Azaz nem fordulhat-e elő az, hogy az okozat ismeretében visszamegyünk a múltba, megváltoztatjuk az előzményeket (okot) és új okozatot hozunk létre? Ehhez azt kellene elérni, hogy az egyik rendszerbeli (pozitív) időtartam a másik rendszerben negatív időtartamnak adódjék!

Terjedjen egy hatás w sebességgel a K rendszerben. Ekkor a Δx távolságot

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{w}$$

idő alatt teszi meg. A K' rendszerbeli megfigyelő ezt az eltelt időt

$$\Delta t' = k\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = k\Delta t\left(1 - \frac{vw}{c^2}\right)$$

értékűnek méri. Ez akkor lehetne negatív, ha a hatás sebessége és a vonatkoztatási rendszer sebességének szorzata nagyobb lenne, mint a fénysebesség négyzete. Ez azt jelentené, hogy a két mennyiség közül az egyik biztosan nagyobb lenne, mint a fénysebesség!

Idődilatáció

A K' rendszerben tekintsünk két egyhelyű, azaz $\Delta x'=0$, de nem egyidejű, azaz $\Delta t' \neq 0$, eseményt. A K rendszerből a két esemény közötti időt mérve

$$\Delta t = k\Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

adódik.

A természetben a jelenség a következőképpen valósul meg: A müon részecskék – kb. 30km magasan keletkeznek nagyenergián történő ütközésekben – esetén a felezési idő ($\Delta t'$=)$\tau=2\cdot 10^{-6}$ s (ez most a K'-beli idő). A mérések tanúsága szerint mégis eljutnak a Földfelszíni detektorokhoz. Az is tudjuk a mérésekből, hogy sebességük a fénysebességhez közeli érték: 0,9999c. A fenti összefüggésnek megfelelően a földi (K-beli) megfigyelő a részecske élettartamát $\approx 10^{-4}$ s-nak méri! Így a részecskéknek ennyi idő már elég, hogy elérjék a Föld felszínét!

Távolság-kontrakció

A K' rendszerben nyugodjon egy $l_0 = \Delta x'$ hosszúságú rúd. A K rendszerben egyidejű leolvasást végezve ($\Delta t=0$) mérjük meg e hosszot. Azt tapasztaljuk, hogy

$$\Delta x' = l_0 = k\Delta x$$

azaz, a K-beli megfigyelő a rudat

$$\Delta x = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

hosszúságúnak fogja mérni.

Sebesség-transzformáció

Mozogjon egy tömegpont u_x' sebességgel a K' rendszerben. A K rendszerbeli megfigyelő ezt

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{k(\Delta x' + v\Delta t')}{k\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)} = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}},$$

ahol a K'-beli sebesség

$$u_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'},$$

Hasonlóan az y tengely irányú mozgásra:

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{k\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)} = \frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}},$$

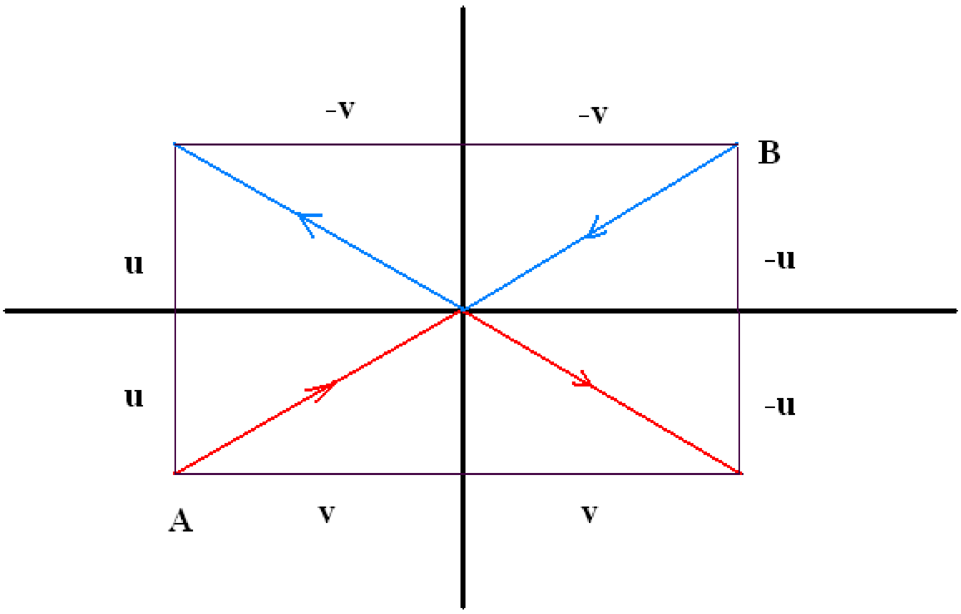
ahol az K'-beli y irányú mozgásra

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}.$$

Relativisztikus dinamika

Tömeg, impulzus

A klasszikus dinamikában a tömeg fogalmának definíciójához a test sebesség-változása vizsgálatán keresztül jutottunk el. Kövessük most is ezt az utat. Két azonos tömegű pontszerű (A és B) test nem-centrális ütközése leírását tekintjük a K és a K' rendszerből. Először tekintsük a K rendszerbeli leírást.



A testek ütközés előtti és utáni sebességkomponenseit az ábráról könnyen leolvashatjuk. A táblázatszerű kigyűjtésben a baloldali oszlop az ütközés előtti, a jobboldali oszlop az ütközés utáni (csillaggal jelölt mennyiségek) sebesség-koordinátákat adja meg. Az *A* és *B* indexek értelemszerűen a testekre utalnak.

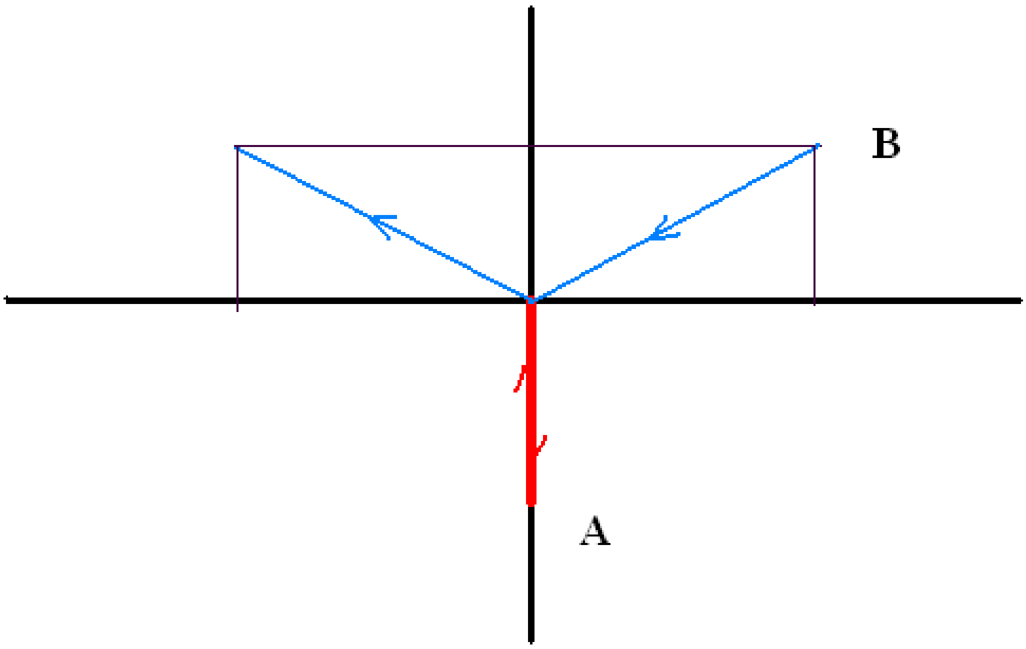
$$w_{Ax} = v \qquad w^*_{Ax} = v$$

$$w_{Ay} = u \qquad w^*_{Ay} = -u$$

$w_{Bx} = -v$ $\qquad\qquad$ $w_{Bx}^* = -v$

$w_{By} = -u$ $\qquad\qquad$ $w_{By}^* = u\,.$

Természetesen az ütközést a K rendszerhez képest *v* sebességgel mozgó K' rendszerből is leírhatjuk. Az ütközést a K'-beli megfigyelő ilyennek látja:



Mekkorák lesznek a sebességek/sebesség-komponensek? Ezek kiszámolásához igazítsuk hozzá a sebesség-transzformációs formulákat. Ekkor ezek úgy módosulnak, hogy

$$u_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{k(\Delta x - v\Delta t)}{k\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{k\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{u_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}\,.$$

A K rendszerbeli mozgás irányától függően a sebesség-komponensek lehetnek:

$u_x = \pm v$ $\qquad$ és $\qquad$ $u_y = \pm u\,.$

Ezekkel a K'-beli sebesség-komponensek:

$$w'_{Ax} = 0 \qquad\qquad w'^{*}_{Ax} = 0$$

$$w'_{Ay} = \frac{u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad\qquad w'^{*}_{Ay} = -\frac{u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$w'_{Bx} = -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} \qquad\qquad w'^{*}_{Bx} = -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$w'_{By} = -\frac{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v^2}{c^2}} \qquad\qquad w'^{*}_{By} = \frac{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v^2}{c^2}}.$$

A nem-relativisztikus dinamikában a tehetetlen tömeg definíciója során fontos értelmezni sebességváltozások hányadosát, hiszen ez kapcsolódik a tehetetlenség fogalmával. A mostani esetre ez az elgondolás általánosítható. Ekkor az ütközések utáni és előtti sebességek összehasonlításával számolható az alábbi hányados:

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{w}'_A|}{|\Delta \boldsymbol{w}'_B|} = \frac{1+\dfrac{v^2}{c^2}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}.$$

E hányados más alakban történő felírásához számoljuk ki – a jobb követhetőségért részletesen – az alábbiakat:

$$\boldsymbol{w}'^2_A = \frac{u^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$$

$$1-\frac{\boldsymbol{w}'^2_A}{c^2} = 1-\frac{u^2}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)c^2}$$

$$\boldsymbol{w}'^2_B = \frac{4v^2}{\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{u^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

$$1-\frac{\boldsymbol{w}_B'^2}{c^2}=1-\frac{4v^2+u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2c^2}.$$

E lépéseket követően képezzük a

$$\frac{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_A'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_B'^2}{c^2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2}}}{\sqrt{1-\frac{4v^2+u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2c^2}}}$$

hányadost. A gyökjelek alatt kifejezéseket hozzuk közös nevezőre:

$$\frac{\sqrt{\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2-u^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2}}}{\sqrt{\frac{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2c^2-4v^2-u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2c^2}}}.$$

A számlálóbeli gyökjel alatti kifejezést

$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ -tel bővítve, és az

$$\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

hányadost kiemelve kapjuk:

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{w}_A'|}{|\Delta \boldsymbol{w}_B'|} = \frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 c^2 - \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) u^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2 c^2 - 4v^2 - u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}.$$

Könnyen belátható, hogy a két gyökös kifejezés hányadosa 1. Ennek következtében a sebességváltozások hányadosára írhatjuk:

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{w}_A'|}{|\Delta \boldsymbol{w}_B'|} = \frac{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_A'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_B'^2}{c^2}}}.$$

A klasszikus dinamikában a tömeg definíciója a sebesség-változásokon nyugszik. Ha ezt most is fenn szeretnénk tartani, akkor fel kell tegyük:

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{|\Delta \boldsymbol{w}_A'|}{|\Delta \boldsymbol{w}_B'|} = \frac{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_A'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_B'^2}{c^2}}}.$$

Az átszorzások elvégzése után:

$$m_A\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_A'^2}{c^2}} = m_B\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_B'^2}{c^2}}.$$

Értelemszerűen ennek az összefüggésnek akkor is teljesülnie kell, ha a K’ rendszerben a tömegpont nyugszik, tehát:

$$m_0 = m_A\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_A'^2}{c^2}} = m_B\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_B'^2}{c^2}}.$$

Az m_0 a tömegpont nyugalmi tömege. A K’ rendszerben hozzá képest v sebességgel mozgó tömegpont mozgási tömeg ezért:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Az impulzus tömegszer sebesség kifejezése ennek megfelelően úgy módosul, hogy

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Newton II. törvényének relativisztikus alakja:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F\ ,$$

ahol az F függvényt itt is erőnek nevezzük. A konkrét feladat esetében figyelembe kell venni, hogy az F=F($\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{v}$,t) erőt is transzformálni kell!

Az energia

A munka definícióját a klasszikus dinamikában tanultaknak megfelelően az elemi munkára vonatkozó $\Delta W = \boldsymbol{F}\Delta\boldsymbol{r}$ illetve az integrális $W = \int \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$ alakokban továbbra is fenn szeretnénk tartani. Ezért nézzük meg, mi lesz az elemi munka kifejezése, ha mozgás során – a sebességváltozás miatt – bekövetkező tömegváltozást is figyelembe vesszük:

$$\Delta W = \boldsymbol{F}\Delta\boldsymbol{r} = \frac{(m + \Delta m)(\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v}}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{r}$$

$$= (m\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\Delta m)\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = m\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^2\Delta m.$$

Másrészt az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

formulát érdemes átrendezni. A gyorsítás kezdetére vonatkozó összefüggés

$$m^2c^2 - m^2\boldsymbol{v}^2 = m_0^2c^2,$$

illetve a gyorsítás végén

$$(m+\Delta m)^2c^2-(m+\Delta m)^2(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v})^2=m_0^2c^2.$$

E két kifejezés különbsége az végrehajtott egyszerűsítések, továbbá a másod-, harmad- és negyedrendűen kicsiny mennyiségek elhanyagolása után:

$$m\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}^2\Delta m=c^2\Delta m=\Delta(mc^2).$$

Az egyenlet baloldala éppen ΔW, azaz így $\Delta W=\Delta(mc^2)$, azaz a tömegpont mozgási tömege a végzett munkával arányosan nő. A munkatételt – és konzervatív erőtér esetén a mechanika energia megmaradás tételét – akkor tarthatjuk fenn, ha a kinetikus energia kifejezése az

$$E_k=mc^2+const.$$

alakot ölti. A kinetikus energia nullpontját meghatározó konstans értékét úgy kell meghatározni, hogy $v<<c$ esetén visszakapjuk az

$$\frac{1}{2}mv^2$$

kifejezést. Az mc^2 kifejezést kifejtve

$$mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$$

látható, hogy ehhez a konstans értékét $-m_0c^2$-nek kell választani, így

$$E_k=mc^2-m_0c^2.$$

A konstans azonban nullának is választható, mert ettől még a munkatétel érvényben marad, így az

$$E=mc^2$$

az ún. sajátenergia, amely nyugalmi helyzetben sem zérus. Míg az

$$m_0c^2$$

energia, az ún. nyugalmi energia.

(→ részecskegyorsítók, nukleáris energiatermelés: atommaghasadás, atommagfúzió, relativisztikus kvantumelméletek)