

A01.) feladat

A Speciális Relativitáselmélet kidolgozásakor rengeteg paradoxon született. Ezek az elmélet (nem létező) belső ellentmondásaira kívántak rámutatni. Némelyikük máig is fennmaradt, mert elemzésük hozzájárul az elmélet jobb megértéséhez. Az egyik ilyen az ún. „ikerparadoxon” amely mára már beépült az elméletbe.

Egy másik az ún. „**pajta-rúd**” paradoxon. Ennek lényege a következő.

Adott egy pajta, amelynek két ellentétes falán egy-egy ajtó van. Az ajtók távolsága „ L_0 ”. Tekintsünk egy ugyanacsak „ L_0 ” hosszúságú rudat. Fussunk át a rúddal relativisztikus nagyságú „ V ” sebességgel a pajtán! Ekkor hozzánk képest a pajta „ V ” sebességgel mozog. Ezért az észleljük, hogy a pajta hossza (azaz az ajtók távolsága) kisebb lesz mint a nyugalmi hosszúság, azaz $L_P < L_0$. Mivel $L_R = L_0$, ezért $L_P < L_R$. Tehát a rúd valamelyik vége mindig kilóg valamelyik ajtón. Azaz a rúd „nem fér be a pajtába”. Tehát, nem tudunk egy olyan pillanatot találni, amikor gyorsan becsukhatnánk mind a két ajtót

A pajtban álló megfigyelő szerint azonban a „ V ” sebességgel mozgó rúd rövidül meg. Azaz $L_R < L_0$, Mivel a pajta hossza $L_P = L_0$, ezért mindig igaz, hogy $L_R < L_P$. Tehát lesz olyan időpillanat amikor a rúd teljes egészében bent van a pajtában. Ekkor mindkét ajtó egy pillanatra becsukható. Mindkét ajtó zárt vagy csukott állapota azonban objektív dolog. Tegyük fel ugyanis, hogy készítünk egy olyan robbantó elektronikát, amelyet a két ajtó sorba kapcsolt zárszerkezete működtet. A bomba tehát akkor robban, amikor mindkét ajtó zárva van. A fenti gondolatmenetekben az ellentmondás nyilvánvaló. A robbanás ténye ugyanis nem lehet relatív. Ezt mindkét megfigyelő egyformá érzékeli. Vagy robban a pajta velü(n)k együtt, vagy nem!

Ábrázolja a szóban forgó jelenséget a Minkowski síkon és így adja meg a paradoxon feloldását!

A „robbanást” esetleg kiváltó jelenségtől most tekintszen el. (Ez ugyanis már egy „rafináltabb” történet!)

A02.) feladat

Egy űrhajó adó-vevő antennája v_0 frekvenciával rádió impulzusokat bocsát ki és érzékeli a bejövő impulzusokat. Az űrhajó állandó „ V ” sebességgel távolodik a Földtől. Mindeközben, folyamatosan rádió impulzusokat küld a Földre amelyek onnan visszaverődnek és a visszavert jelet az űrhajó vevőantennája érzékeli. Legyen a Föld az „álló” K rendszer és az űrhajó a mozgó „ K' ”, rendszer. A jelenség (relativisztikus) leírásakor használjuk a „standard boost”-ot! Az űrhajón az indulástól számított $t'_1 = 40$ sec időpillanatban a beérkező jelek frekvenciája $\nu'_1 = 1/2 \nu_0$.

a.) Írja fel az álló K rendszerben mérhető $(\omega, c\vec{k})$ és a mozgó K' rendszerben mérhető $(\omega', c\vec{k}')$ adatok közötti kapcsolatot megadó $L(K, K')$ Lorentz transzformációt.

b.) Tekintsük az űrhajó által a Föld felé sugárzott jeleket. Az $L(K, K')$ val kapott eredmények alapján határozza meg, hogy milyen frekvenciájú jeleket észlel a földi állomás!

c.) A kapott $L(K, K')$ alapján mondja meg, hogy mekkora ω'' frekvenciájú visszavert jelet észlel az űrhajó.

d.) Tudjuk, hogy a feladat kiírása szerint $\omega'' = 2\pi \nu'_1$. Mekkora az űrhajó sebessége a Földhöz rögzített K rendszerben?

e.) A földi állomás órája szerint mikor verődött vissza az a jel, amelyet az űrhajón a t'_1 időpontban észleltek?

f.) Milyen távol van az űrhajó a Földtől a visszavert jel észlelésének a t'_1 pillanatában mind az űrhajósok, mind pedig a földi irányítók szerint?

MECHANIKA 2

B) HF 01.

B01.) feladat

Tudjuk, hogy az $a^i = (a^0, a^x, a^y, a^z)$ „négyes gyorsulás” az $(u^i) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ négyes sebesség sajátidő szerinti deriválásával kapható meg. Az (a^i) -ben megjelennek a $\dot{\vec{v}}$ (hármass gyorsulás) komponensei.

a.) Írja fel az (a^i) négyes gyorsulást úgy, hogy szerepeljen benne a „ \vec{v} ” hármass sebesség és az „ \vec{a} ” hármass gyorsulás. (MEGJEGYZÉS: Ez szerepelt a gyakorlaton!)

b.) Legyen a hármass sebesség párhuzamos az „x” tengellyel, tehát $\vec{v} = (\dot{x}, 0, 0)$. Legyen a hármass gyorsulás tetszőleges irányú, azaz $\dot{\vec{v}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$. Határozza meg ebben az esetben a (a^i) négyes gyorsulást!

c.) Az álló K rendszerben egy tömegpont „R” sugarú körpályán egyeltés, „v” nagyságú sebességgel mozog. Tekintsük azt a pillanatot, amikor a tömegpont sebessége éppen az x-tengely irányába mutat. Adjuk meg ebben a pillanatban a tömegpont (a^i) négyes gyorsulását a K rendszerben!

d.) A megfelelő Lorentz transzformáció alkalmazásával határozza meg a pont $(a^i)'$ négyes gyorsulását a ponttal (pillanatnyilag) együtt mozgó K' rendszerben!

e.) A d.) válasz ismeretében határozza meg a pont \vec{a}' hármass gyorsulását a megadott pillanatban.

f.) Mutassa meg, hogy ugyanezt az eredményt kapnánk elemi módon is, ha a sajátidő fogalmát a körmozgásra közvetlenül alkalmazzuk!

B02.) feladat

Tekintsünk két $\underline{\underline{L}}_1$ és $\underline{\underline{L}}_2$ Lorentz transzformációt. Ezek az állónak tekintett K rendszerből rendre a K'_1 és a K'_2 mozgó rendszerbe transzformálnak.

$$\underline{\underline{L}}_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & -B_1\Gamma_1 & 0 & 0 \\ -B_1\Gamma_1 & \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{L}}_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_2 & 0 & -B_2\Gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -B_2\Gamma_2 & 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ahol } B_k \equiv \frac{V_k}{c} \quad \text{és} \quad \Gamma_k \equiv 1/\sqrt{1-B_k^2} \quad k=1,2$$

a.) Adja meg a két transzformáció fizikai jelentését!

b.) Határozza meg a két mátrix determinánsát!

c.) Mutassa meg, hogy $\underline{\underline{L}}_1 \cdot \underline{\underline{L}}_2 \neq \underline{\underline{L}}_2 \cdot \underline{\underline{L}}_1$! Mi ennek a fizikai tartalma?

d.) Ellenőrizze, hogy $|\underline{\underline{L}}_1| \cdot |\underline{\underline{L}}_2| = |\underline{\underline{L}}_2 \cdot \underline{\underline{L}}_1|$. Mi ennek a fizikai tartalma?

B03.) feladat

Adott a K álló és a K' mozgó inercia rendszer. A koordináta tengelyek legyenek párhuzamosak. A K' sebessége a K -hoz képest legyen $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$! A rendszeridőkre a szokásos feltétel érvényes, azaz $t=t'=0$ ha az origók egybe esnek ($O=O'$).

a.) Mutassa meg hogy ebben az esetben az \vec{r}, t Lorentz transzformációja a következő alakú:

$$\vec{r}' = \vec{r}_\perp + \Gamma \cdot [\vec{r}_\parallel - \vec{B} \cdot ct] \quad ct' = \Gamma \cdot [ct - \vec{B}\vec{r}]$$

Ahol a szokásos módon: $\vec{B} = \frac{\vec{V}}{c}$ és $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}}$

Valamint $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$ ahol \vec{r}_\perp a \vec{B} -re merőleges és \vec{r}_\parallel a \vec{B} -vel párhuzamos komponens.

MEGJEGYZÉS: Elegendő bebizonyítani, hogy $\vec{r}^2 - (ct)^2 = \vec{r}'^2 - (ct')^2$

b.) Írja fel a transzformáció (4 x 4)-es mátrixát, és mutassa meg, hogy ez egy szimmetrikus mátrix. Vesse össze a **B02.)** feladat c.) részében kiszámolt $\underline{\underline{L}}_1 \cdot \underline{\underline{L}}_2$ mátrixszal! Utóbbi nem szimmetrikus. Mivel magyarázhatjuk ezt?
