Bevezetés a modern fizika fejezeteibe

4. (d)

Kvantummechanika

Utolsó módosítás: 2012. május 9.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A Klein-Gordon-egyenlet (1)

A relativisztikus dinamikából a tömegnövekedésre és impulzusra vonatkozó

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggésekkel az

$$E = mc^2$$

tömeg-energia ekvivalencia az

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A Klein-Gordon-egyenlet (2)

Az impulzus és az energia kifejezéseit a

$$p \to \frac{\hbar}{i}\nabla \qquad\qquad E \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}$$

operátorokkal helyettesítve a

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \Delta\Psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi = 0$$

Klein-Gordon egyenlet. Ez egy skalár tér mozgásegyenlete, amely spin nélküli részecskék leírására érvényes.

Mi az itteni Ψ jelentése?

A Dirac-egyenlet (1)

Az eredeti ötlet, hogy az $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ energiában és impulzus kifejezéseiben kvadratikus egyenlet helyett olyan egyenletet előállítani, amelyben e kifejezések lineárisak, azaz valahogy így:

$$E \sim c_1 p + c_2 m_0 c^2$$

Mindezt abból a célból, hogy csak első deriváltak szerepeljenek a relativisztikus mozgást leíró téregyenletben. A c_1 és c_2 konstans paraméterek. Könnyű belátni, hogy ez egy „sima gyökvonással" nem érhető el. Ha azonban a két együttható mátrix is lehet, akkor az

$$E \sim \sum_{k=1}^{3} \alpha_k p_k c + \beta m_0 c^2$$

α_k β

4*4-es mátrixok

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A Dirac-egyenlet (2)

Négyzetre emelés és a Klein-Gordon egyenlettel való összehasonlításból adódik, hogy az együtthatómátrixokra fenn állnak az alábbiak:

$$\alpha_k^2 = \beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i$$

$$\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i$$

A Dirac-egyenlet (3)

Megkeresve a fenti feltételeket kielégítő mátrixokat kapjuk:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Itt a σ_k Pauli-mátrixok rendre

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

valamint $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A Dirac-egyenlet (4)

E mátrixok mindegyikének sajátértéke $\lambda_{1,2} = \pm 1$. A sajátvektorok pl. a σ_3 esetében a

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

spinorok. Ezekkel a Dirac-egyenlet a Pauli-mátrixokkal

$$\begin{pmatrix} m_0c^2 & c\sigma p \\ c\sigma p & -m_0c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$$

vagy az α_k és β mátrixokkal:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \alpha \nabla \Psi + \beta m_0 c^2 \Psi$$

Mi az itteni Ψ jelentése?

A Dirac-egyenlet (5) - antirészecskék

Tekintsük a zérus impulzusú állapotot:

$$\begin{pmatrix} m_0 c^2 & 0 \\ 0 & -m_0 c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$$

Látható módon a spinorok szétcsatolódnak, és a „fel” és „le” spinorok sajátfüggvényei az egyenletnek a pozitív és negatív sajátenergia értékekkel.

Antirészecskék megjelenése: az elektron párja – a pozitron.

A Dirac-egyenlet (6) – a spin

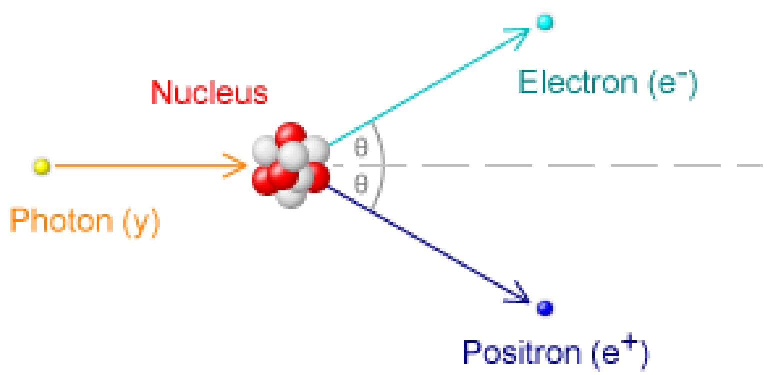
A Pauli-mátrixok és a spin kapcsolata:

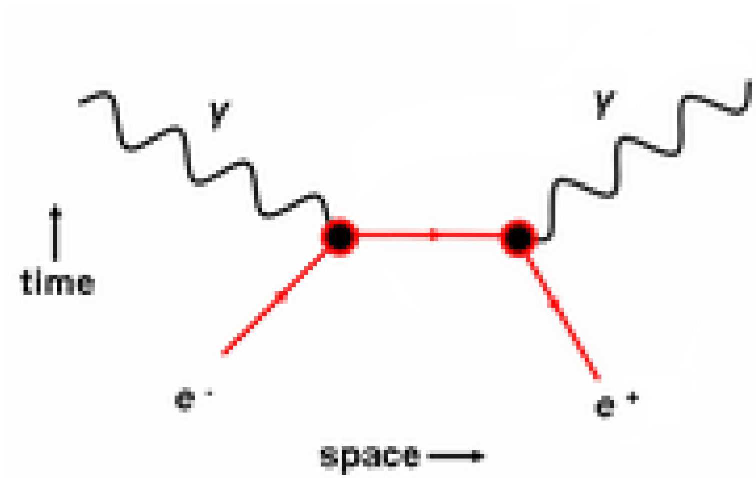
$$S_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k$$

azaz a Dirac-egyenlet természetes módon tartalmazza az elektron spinjét.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Párkeltés - annihiláció



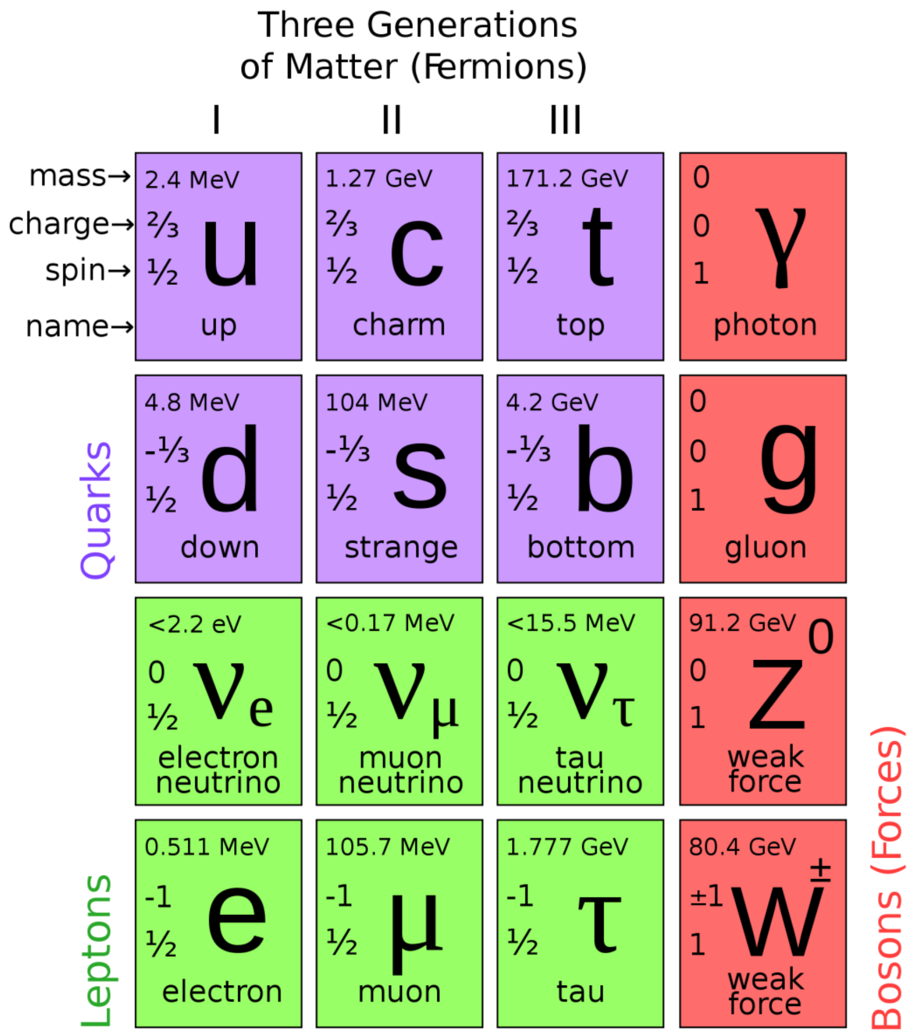


Az alapvető kölcsönhatások

kölcsönhatás	közvetítő	nyugalmi tömege	töltés	Mire hat?	hatótávolság (m)
erős	gluonok (8-féle)	0	színtöltés	hadronokra	10^{-15}
elektromágneses	foton	0	elektromos töltés	elektromosan töltött részecskékre	végtelen
gyenge	Z^0 W^+ és W^-	91, 80 ill. 80 GeV/c²	gyenge töltés	minden 1/2 spinű részecskére	10^{-18}
gravitáció	graviton*	0	tömeg	mindenre	végtelen

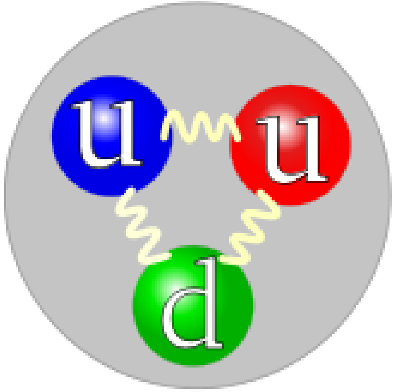
Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Az elemi részecskék standard modellje

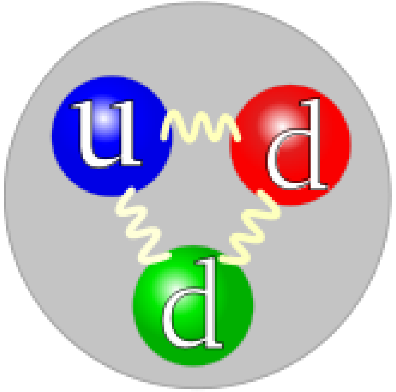


Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Az atommag alkotói

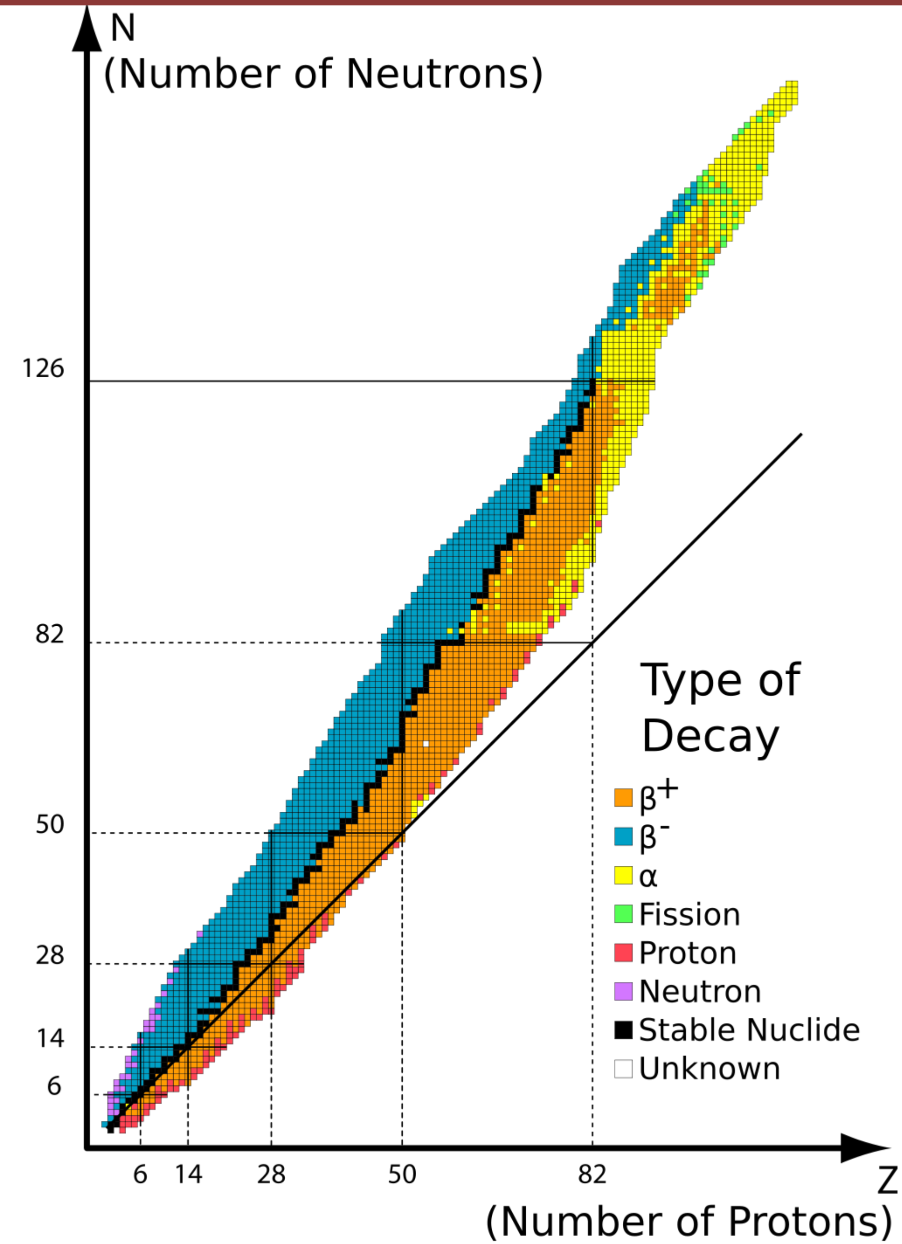


proton

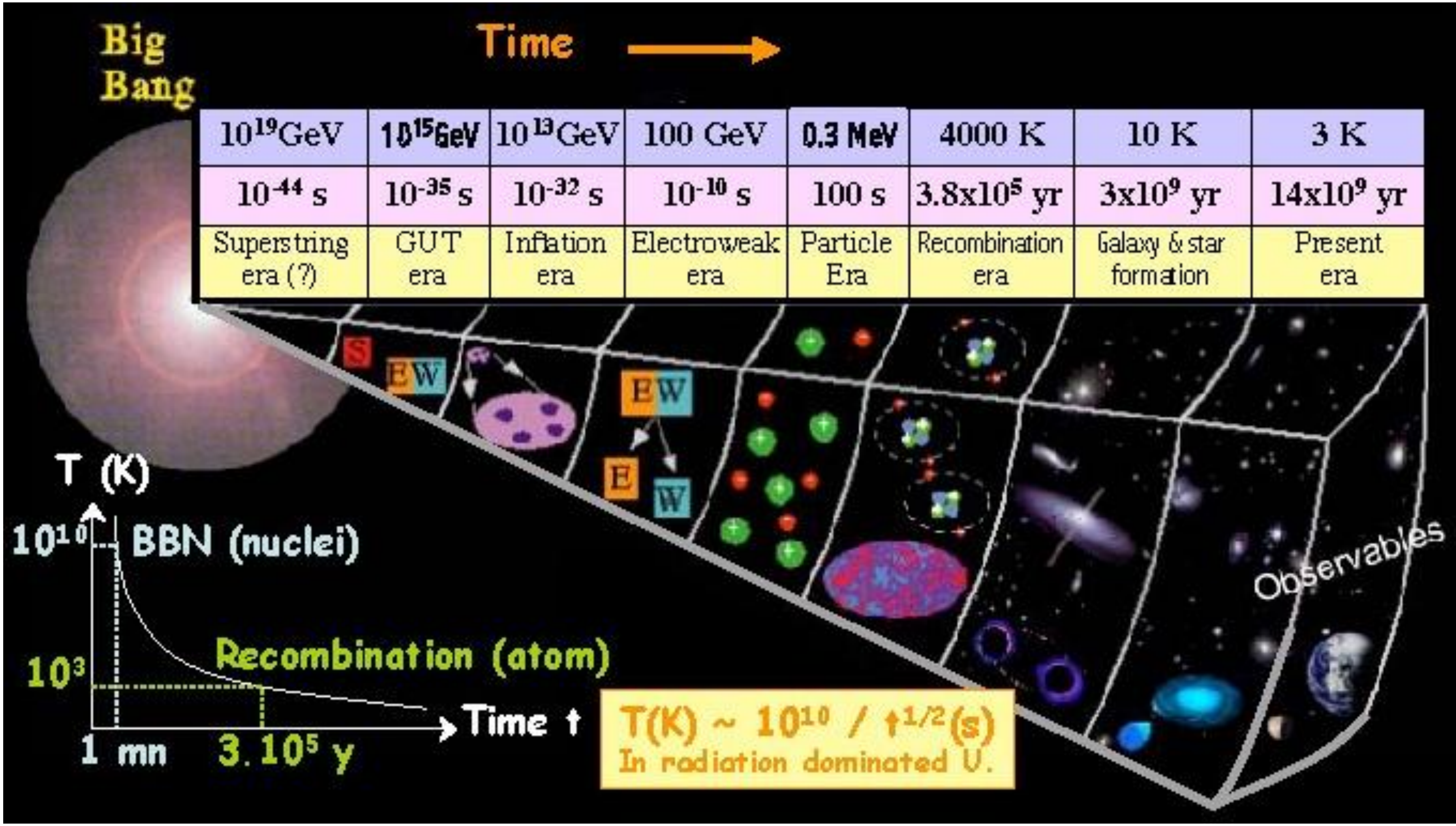


neutron

Az izotópok táblázata



Az univerzum fejlődése



Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Kérdések

Mi a relativisztikus tömeg alakja?
Mi a relativisztikus impulzus kifejezése?
Mely egyenlet fejezi ki a tömeg-energia ekvivalenciát?
Milyen kapcsolat írható fel az energia-impulzus-nyugalmi tömeg között?
Hogyan juthatunk el a Klein-Gordon-egyenlethez?
Mi a Dirac-egyenlet leszármaztatásának alapötlete?
Mely fizikai mennyiség jelenik meg a Dirac-egyenletben?
Mi a párkeltés és annihiláció jelensége?
Mik az alapvető kölcsönhatások?

(Az ilyen színnel írt kérdések a mélyebben érdeklődők részére vannak.)