Kontinuum mechanika: Rugalmas alakváltozások 2

1.) Feladat

Adott az (x,y,z) koordinátarendszerben egy téglalap keresztmetszetű egyenes rúd. A rúd hossztengelye a vízszintes „z" tengely, amelyik a téglalap alakú keresztmetszet középpontján (súlypontján) megy át. A téglalapnak az „x" tengellyel párhuzamos oldala „a" hosszúságú, az „y"-nal párhuzamos oldal hossza „b". A rudat a z=0 pontban „mereven megfogtuk" (pl. beépítettük egy merev falba). A rudat **lefelé** (a függőleges „x" irányban) meghajlítottuk. A hajlítás olyan, hogy a rúdban csak „z" (tengely) irányú húzó feszültség lép fel. Azaz a σ_{zz} kivételével a $\underline{\underline{\sigma}}$ feszültség tenzor minden más mátrix eleme zérus. A rúd anyaga homogén és izotróp.

a.) A rúd hosszanti (z irányú) oldal lapjainak a normális (egység) vektora $\pm\vec{e}_x$ illetve $\pm\vec{e}_y$.. Mutassa meg, hogy ezeken a lapokon nem lép fel rugalmas feszültség, azaz $\underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{e}_x=0$ és a $\underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{e}_y=0$

b.) A σ_{ij} mátrixát ismeretében határozza meg a deformációs tenzor ε_{ij} mátrix elemeit!

c.) Legyen valamely „z" helyen a rúd (a semleges szál) görbületi sugara „R"! Határozza meg a „z" helyen lévő keresztmetszet mentén a „z" irányú deformációt! (Az előzmények alapján ez az $\varepsilon_{zz}(x)$ függvény.)

d.) Az $\varepsilon_{zz}(x)$ ismeretében határozza meg a „semleges szál" helyét!

e.) Határozza meg a keresztmetszetben ébredő $\sigma_{zz}(x)$ húzó feszültséget és ennek alapján a keresztmetszetre ható $M_y(z)$ forgató nyomatékot a „z" tengely mentén!

f.) Az ε_{ij} mátrix elemek ismeretében határozza meg a rúd bármely $\vec{r}$ (x,y,z) pontjában az $\vec{s}(\vec{r})$ elmozdulásvektort.

g.) Az $\vec{s}(\vec{r})$ ismeretében határozza meg a „z_0" helyen lévő, téglalap keresztmetszet deformált alakját!

2.) Feladat

Adott egy állandó keresztmetszetű egyenes rúd. Tengelye a vízszintes „z" tengely, a hossza „b". A rudat a két végénél (z=0 és a z=b pontokban) két ékkel alátámasztottuk. A rúd **a saját súlyától** behajlik. Az ékszerű alátámasztás miatt a rúd véglapjai a deformáció során elfordulhatnak, de függőleges („x") irányban nem mozdulhatnak el.

A rúdnak a (hajlítás irányának megfelelő) keresztmetszeti tényezője (a „keresztmetszet másodrendű nyomatéka") legyen „I". A rúd anyagának a Young modulusa „E" . A rúd („semleges szál") „x" irányú elmozdulását „u(z)" jelöli. A rúd hosszegységre eső súlyát jelölje p_0=mg/b.

Keressük a rúd közepének az u(b/2) lehajlását.

Az előzőekben megmutattuk, hogy jól meghatározott kapcsolat áll fenn az „z" helyen lévő keresztmetszetre ható „M" hajlító forgató nyomaték és az u(z) elmozdulás között. Nevezetesen :

$M = I\cdot E\cdot u''$, ahol $u'' = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

a.) A rúd homogén tömegeloszlása alapján határozza meg az ékeken ható tartó erőket!
b.) Az ékeken ható erők és p_0=mg/b ismeretében határozza meg az M(z) függvényt!
c.) Az M(z) ismeretében határozza meg az u(z) elmozdulás függvény általános alakját!
d.) Adja meg az alátámasztásból adódó, u(z)-re kiróható peremfeltételeket!

e.) A peremfeltételek ismeretében határozza meg az u(z) elmozdulás függvényt!
f.) Az u(z) elmozdulás függvény ismeretében határozza meg a gerenda közepének(z=b/2) a lehajlását!

3.) Feladat

Adott egy állandó keresztmetszetű egyenes rúd. Tengelye a vízszintes „z” tengely, a hossza „b”. A rúd külső erőhatások miatt „x” irányban meghajlik. A rúdnak a (hajlítás irányának megfelelő) keresztmetszeti tényezője legyen „I”. A rúd anyagának a Young modulusa „E” . A rúd („semleges szál”) „x” irányú elmozdulását „u(z)” jelöli. A rúdra hosszegységenként „p(z)” nagyságú, „x” irányú erő hat.

a.) Mutassa meg, hogy a rúd keresztmetszetére ható M(z) forgatónyomatékra igaz, hogy

$$M'' = p(z), \quad \text{ahol} \quad M'' = \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}$$

b.) $M = I \cdot E \cdot u''$ és $M'' = p(z)$ felhasználásával mutassa meg, hogy $u'''' \propto p(z)$!

4.) Feladat

Adott egy homogén, izotóp anyagú, rugalmas test amelyik állandó p_0 (hidrosztatikai) nyomású térbe helyeztünk. A λ, μ Lamé állandók ismertek.

a.) Határozza meg a $\underline{\underline{\sigma}}$ feszültség tenzor σ_{ij} mátrix elemeit!
b.) A σ_{ij} ismeretében határozza meg a deformációs tenzor ε_{ij} elemeit!
c.) λ, μ Lamé állandók ismertében határozza meg a κ kompresszibilitást

---