

Nagyfrekvenciás jelek spektrumanalízise heterodin méréstechnikával

Fizika laboratóriumi gyakorlat

Simon Ferenc és Halbritter András

Budapest, 2015.

1. fejezet

Bevezetés és történeti háttér

A laborgyakorlat célja, hogy a nagyfrekvenciás mérés technikában széleskörben alkalmazott Fourier-analízis és heterodin mérés technika alapjait bemutassa. A laborgyakorlat nagyban támaszkodik a korábbi *Méréstechnika* tárgyra, ezért az ott elsajátított ismeretek átismétlése elvárás.¹

Az adatátvitel alapfeladata, hogy a lehető legtöbb információt juttassunk el két pont között az információt minél jobban megtartva. Napjainkban amikor a környezetünk zsúfolva van különböző információtovábbító elektromágneses sugárzással, különösen fontos ez a kérdés. Az egyik elterjedt megoldás a különböző információk különböző frekvenciákhoz való rendelése (ún. frekvenciaosztásos multiplexelés). Ez eredményezi a manapság ismert különböző frekvenciájú rádióadások jelenlétét, ahol mindegyik rádiócsatorna adott (vivő)frekvencián sugározza az adását. Az adások információtartalma különböző módon van a vivőhullámba belekódolva. Itt a két legfontosabbat említjük csak, amivel a gyakorlaton is megismerkedünk: AM (amplitúdó-moduláció) és FM (frekvenciamoduláció).

Belátható, hogy a továbbított információ mennyisége és az adott jelhez tartozó sáv szélesség (Δf) egymással egyenesen arányos. Például egy állandó frekvenciájú sugárzással - melynek sáv szélessége nulla² - semmilyen információt nem tudunk továbbítani, de például egy 1 kHz frekvenciával modulált 100 MHz-es vivőhullámmal már tudunk 1 kbit/s információtovábbítást elérni. Nem véletlen, hogy a hétköznapi gyakorlatban mindeki csak *sáv szélességről* beszél mialatt a továbbított információ mennyiségére utal, miközben ez a fogalom alapvetően a továbbított jel frekvenciaspektrumának szélességére utal. Ebben a jegyzetben mi a hagyományos értelemben vett (frekvencia-)sáv szélességre utalunk.

Az emberi hang torzításmentes továbbításához (mono adás esetén) kb. 20 kHz sáv szélességre van szükség. A gyakorlatban az egyes rádióadók frekvenciáját a zavaró interferencia elkerülésére végett ennél távolabbra állítják be, ezért találunk a mindenki által ismert FM sávban (87,5-108 MHz között) kb. 100 kHz-enként rádióállomásokat.

Egy másik gyakorlati megfontolás ami korlátozza az átvihető információ és így a sáv szélesség nagyságát, az a zaj kérdése. A *Méréstechnika* tárgyban ismertetett módon az ún. Johnson-Nyquist vagy termikus zaj teljesítménye és a sáv szélesség közötti kapcsolat:

$$P_{\text{JN-zaj}} = 4k_{\text{B}}T\Delta f \quad (1.1)$$

ahol k_{B} a Boltzmann-állandó, T az abszolút hőmérséklet és Δf a sáv szélesség³. Eszerint minél

¹A jegyzettel kapcsolatos javításokat, javaslatokat köszönettel kérjük az f.simon@eik.bme.hu címre.

²Képzelnék el, hogy egy állandó frekvenciájú, időben állandó nagyságú elektromágneses jellel próbálunk információt közvetíteni. Ennek Fourier-transzformáltja egy Dirac-delta függvény, azaz nulla sáv szélessége van. Azonban ennek a jelnek az információ tartalma is nulla. A legegyszerűbb Morse-adatátvitelhez is már ki-be kell kapcsolgatnunk ezt a jelet, ami már természetesen nem lesz egy állandó frekvenciájú időben állandó nagyságú jel, és így a Fourier-transzformáltja sem lesz Dirac-delta.

³A *Méréstechnika* tárgyban tanultak szerint egy R ellenálláson eső feszültség szórásnégyzete egy Δf sáv-

nagyobb az elvárt sávszélesség, annál nagyobb lesz a zaj teljesítménye is. A telekommunikációban a termikus zajteljesítmény nagyságára $P_{\text{vett zaj}} = k_B T \Delta f$ képletet használjuk, a 4-es faktor különbség oka, hogy egy valódi adó-vevő rendszerben csak a bejövő/kimenő feszültség fele esik a munkaellenálláson (a másik fele a jelet keltő/vevő egységben). Eszerint 300 K hőmérsékleten a zajteljesítmény nagyságára $P_{\text{vett zaj}}(300\text{K}) = k_B T \Delta f = 4.1 \cdot 10^{-21} \text{ J} \cdot \Delta f$ adódik, ami egy 50 Ohmos ellenálláson körülbelül 1 nV feszültségnek felel meg 1 Hz sávszélesség mellett, illetve dBm egységekben⁴ $-174 \text{ dBm} \cdot 1 \text{ Hz}$.

A nagyfrekvenciás mérés technika alapproblémája tehát, hogy adott sávszélesség mellett minél jobb jel-zaj arányt érjünk el úgy, hogy a különböző információs csatornák frekvenciája különböző. Ennek megvalósítására adott vivőhullám-frekvenciára keverik rá az információt különböző modulációs módszerekkel. Az információt úgy kapjuk vissza, hogy szelektíven csak az adott vivőhullám körüli frekvenciára koncentrálunk és az itt megfigyelt jelet demoduláljuk. A továbbiakban bemutatjuk a különböző modulációs technikákat és azt, hogy milyen módszerrel lehetséges a frekvenciaszelektív mérés.

szélességű frekvenciaablakban mérve a termikus zaj miatt $\langle V^2 \rangle = 4k_B T \Delta f$, így a termikus zaj teljesítménye $P = \langle V^2 \rangle / R = 4k_B T \Delta f$. A zaj-sávszélességről egy jó leírás található a http://en.wikipedia.org/wiki/Johnson-Nyquist_noise oldalon.

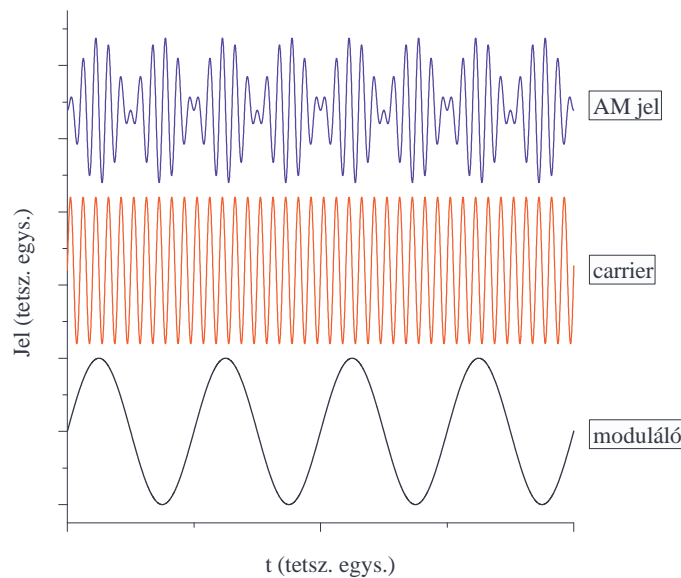
⁴A dBm egység definíciója: $P[\text{dBm}] = 10 \cdot \log_{10}(P/1\text{mW})$

2. fejezet

Elméleti és technikai háttér

2.1. A jelmoduláció alapjai

A vivőhullám mint harmonikus rezgés általános alakja: $\psi(t) = A_c \cdot \exp[i(2\pi f_c t + \phi_c)]$. Lehetőség van mindhárom paraméter (A_c , f_c , ϕ_c) modulálására (itt f_c jelöli a vivőhullám/carrier frekvenciáját), amit amplitúdó- (AM), frekvencia- (FM), ill. fázismodulálásnak (PM) nevezünk. Itt csak az AM technikával foglalkozunk. Az AM jelet mutatja a 2.1. ábra.



2.1. ábra. Az amplitúdómodulált jel.

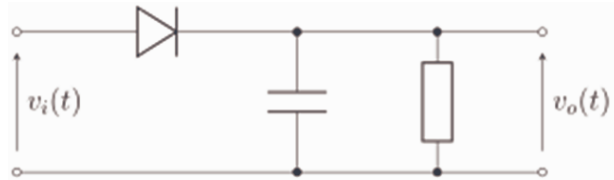
Az AM jelet felfoghatjuk úgy, hogy a vivőjelet a moduláló jellel összeszorozzuk. Amennyiben a moduláló jel is tiszta harmonikus hullám: $\psi_m(t) = A_m \cdot \exp(i2\pi f_m t)$ (itt az m index a modulálásra vonatkozik), a trigonometrikus azonosságok alapján

$$\cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) = \frac{\cos((\omega_1 + \omega_2) t) + \cos((\omega_1 - \omega_2) t)}{2} \quad (2.1)$$

látszik, hogy a két jel szorzata két szintén harmonikus hullám összege, melyek frekvenciája: $f_c \pm f_m$ (feltéve, hogy $f_c > f_m$). A későbbiekben bemutatjuk, hogyan valósítható meg a szorzás művelete, amit keverésnek is nevezünk. A jel demodulálása (azaz a lényeges információ előállítás) szintén szorzással valósítható meg: amennyiben az AM jelet újra beszorozzuk az f_c frekvenciájú jellel a kapott jelben 3 harmonikus hullám összege jelenik meg: f_m , $2f_c \pm f_m$. Ezek

közül értelemszerűen az első komponens az érdekes, a két másik nagyfrekvenciájú komponens kiszűrése (pl. aluláteresztő szűrővel) után az információt tartalmazó moduláló jel előáll. A tényleges kommunikációban a moduláló jel (pl. AM rádióadásban a továbbított hang) nem egyetlen harmonikus hullámból, hanem különböző frekvenciájú komponensek szuperpozíciójából áll. Látható, hogy ebben az esetben a demodulált jel az eredeti hangot adja vissza. Ezt a technikát nevezik *szorzásos* vagy *heterodin* (angolul *heterodyne*) detektálásnak.

Korábban (kb. 50 évvel ezelőttig) az AM jelek demodulálását egyenirányítással (ún. detektoros vétellel) oldották meg, aminek a sematikáját mutatja a 2.2. ábra.



2.2. ábra. A detektoros rádió sematikája. A ábra bal oldalán lévő bemenet egyenirányítás és aluláteresztő szűrés után a jobb oldali kimenetre kerül.

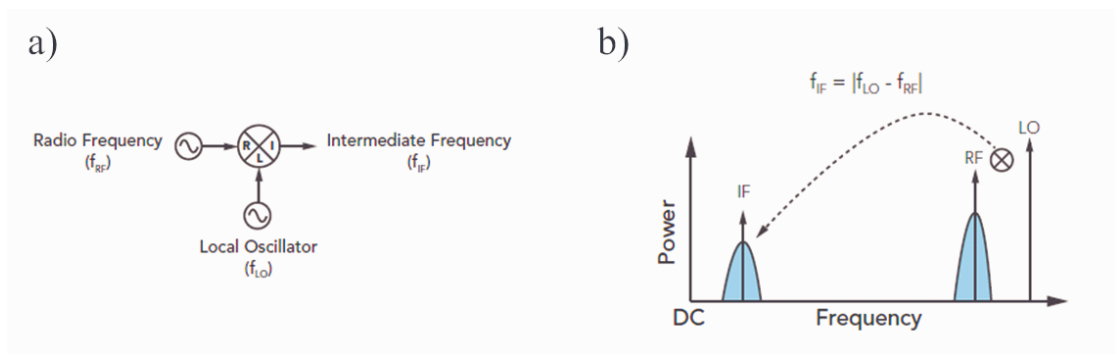
Ez azt használja ki, hogy az amplitúdómodulált vivőjelet egyenirányítva és a nagyfrekvenciás komponenst kiszűrve előáll a moduláló burkoló jel. Ezt a technikát nevezik *burkoló detektoros* vételnek is. Ennek előnye, hogy a vevőegység és hangszóró nem igényel extra energiaforrást (bár a jel persze igen halk lesz) hanem az energiát a vivőjelből veszi. Mára a szorzásos módszer vált a rádiótechnikában egyeduralgódóvá a következő részben ismertetett okoknál fogva.

2.2. A nagyfrekvenciás jelek detektálása

2.2.1. Frekvencia szelektív detektálás, mixerek

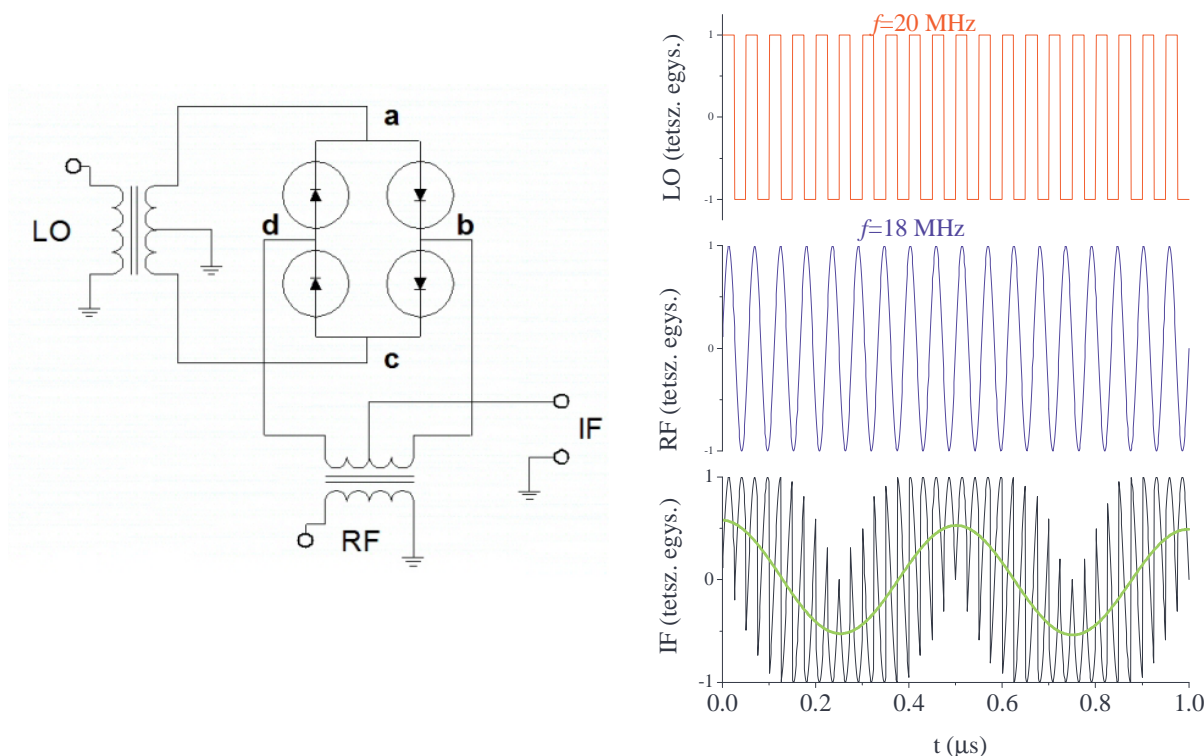
A burkoló detektoros demodulálás hátránya, hogy amennyiben több rádióadás van jelen egyszerre mindegyiket demodulálja, ezért nehéz egy tiszta jelet kapni. Ezen kicsit segíthet az, ha a vevő detektor előtt van egy sávszűrő, ami csak a kívánt vivőfrekvenciát és annak szűk tartományát engedi át. Ennek a megvalósításnak a hátránya, hogy a sávszűrő megépítése és különböző frekvenciákra hangolása nehézkes.

A heterodin detektálási technikában nincs szükség hangolható sávszűrőre, hanem csak egy fix aluláteresztő szűrőre. A kívánt vivőfrekvencia kiválasztását a demodulálásnál lekeveréshez használt frekvencia változtatásával érjük el. Az eddigiekben az a kérdés még nyitva maradt, hogyan érjük el az előző részben ismertetett, harmonikus hullámok összeszorzását.



2.3. ábra. a) A mixert jelölő szimbólum és a ki-bemeneti portok jelei (LO bemenet: lokál-oszcillátor, RF ki/bemenet: rádiófrekvenciás jel, IF ki/bemenet: közbülső frekvencia), b) a mixert lekeverőként használva ilyen frekvencia konverzió valósul meg: az IF porton az LO és RF frekvenciák különbsége jelenik meg.

Az összeszorzás eszköze a *keverő* vagy *mixer*. Ez egy olyan félvezető eszköz aminek az áram-feszültség karakterisztikája erősen nemlineáris, emiatt két ráadott váltakozóáramú jel szorzata jelenik meg rajta. A mixer sematikáját a 2.3a. ábra mutatja, a portok elnevezéseinek jelöléseivel. A mixereket használhatjuk le- ill. felkeverőként is. Előbbihez az RF bemenetként és IF kimenetként funkcionál, míg utóbbihoz az IF a bemenet és RF-en van a felkevert kimenő jel. A 2.3b. ábra mutatja a mixert lekeverőként használva a frekvencia spektrumban milyen változás történik: az LO egy jól definiált frekvenciájú jel, míg az RF egy modulált, ezért szélesebb frekvenciaspektrumú jel. Az IF porton a két frekvencia különsege jelenik meg, ami jellegében az RF spektrum tulajdonságait hordozza. Felkeverés esetén pedig az LO bemenetre csatlakozik a jól definiált frekvenciájú vivőhullám-jel, az IF bemenetre csatlakoztatjuk az alacsonyfrekvenciás moduláló jelet, és az RF kimeneten jelenik meg az amplitúdómodulált szorzatjel.



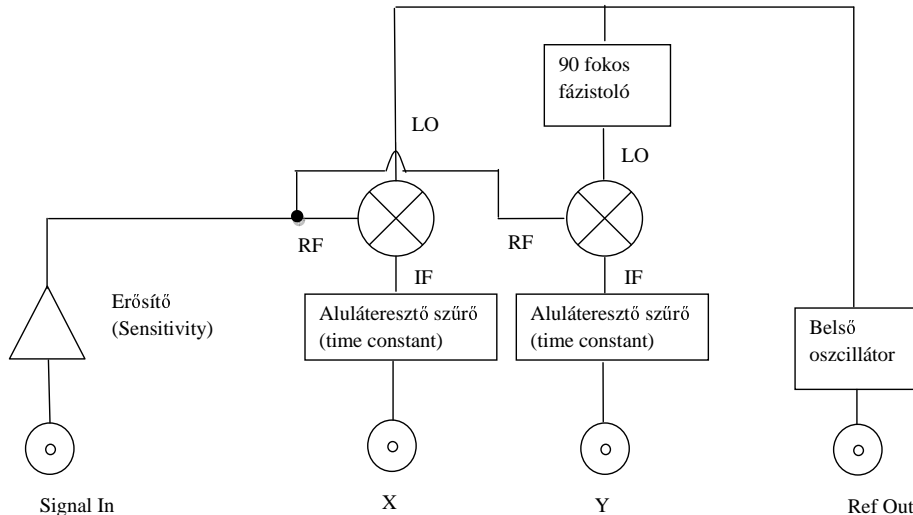
2.4. ábra. Bal panel: A mixer egy lehetséges megvalósításának sematikája az ún. átkapcsoló-mixer (switching-mixer). Jobb panelen: a mixerre kapcsolt jelalakok egy példán. LO: 20 MHz-es jel, RF: 18 MHz-es jel, az IF kimeneten kialakuló jel, ill. annak simított (alul átteresztővel megszárt) változata (zöld folytonos vonal).

A mixer egy lehetséges megvalósítását és működését szemléltetjük a 2.4. ábrán. Amikor az LO feszültség olyan, hogy az **a-c** pontok között pozitív feszültség van ($U_{ac} > 0$), akkor a baloldali két dióda lezár, míg a jobboldali kettő nyitva van. Ekkor a **d** pont lebeg (feszültségét az RF port feszültsége adja) míg a **b** pont a földön van. Ezért az RF bemenetre adott feszültség közvetlenül, azonos előjellel megjelenik az IF kimeneten. Amikor ($U_{ac} < 0$), akkor a baloldali két dióda nyit ki, ezért a **d** pont lesz leföldelve, míg a jobboldali két dióda lezár, ezért ekkor az RF bemenetre adott feszültség -1 szerese jelenik meg az IF kimeneten.

Ezt a viselkedést szemlélteti a 2.4. ábra jobb oldali panele. A kapcsoló-mixer úgy viselkedik mintha az LO jel $+1$ és -1 közötti értékével szorozódna be az RF feszültség ami megjelenik az IF kimeneten. Az ábrán mutatott példában LO frekvenciája 20 MHz, RF frekvenciája 18 MHz és a szorzás után megjelenik az IF kimeneten egy alacsony (2 MHz-es) frekvenciával modulált 38 MHz-es jel. Ha ezt a jelet aluláteresztő szűrővel szűrjük (példánkban numerikus csúszoátlagolást végeztünk) akkor jól látható az IF kimeneten megjelenő alacsony frekvencia.

Ez a leírás egyben azt is megmutatja, hogy az LO feszültség nagyságától nem függ a kimeneti feszültség értéke, de az RF és IF feszültségek egymással arányosak (nem pontosan egyenlők mivel az eszköznek van egy kis vesztesége).

2.2.2. A Lock-in erősítő



2.5. ábra. A lock-in erősítő blokkdiagramja. Az elrendezés tükrözi azt a felépítést amivel a kezelőfelületen is találkozunk, de nem mutatja az R kimenetet amit a műszer digitálisan állít elő az X és Y kimenetekből.

A kétcsatornás fázisérzékeny egyenirányító vagy *lock-in erősítő* blokkdiagramját a 2.5. ábra mutatja. Ez lényegében két lekeverő mixerből áll, az IF kimenetet aluláteresztő szűrők követik. A két csatorna azt jelenti, hogy a bejövő RF jelnek mérjük két komponensét: az egyik amelyik fázisban van az LO-val és a másik amelyik 90 fokkal eltolt fázisban van. Előfordulhatna ugyanis, hogy a bejövő RF jel fázisa 90 fokos szöget zár be az LO-éval, ezáltal az IF jel kisfrekvenciás komponense 0 lenne. A két mért csatorna miatt lehetőség van a két kimenet négyzetösszegének meghatározására: $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ami azért előnyös, mert a bejövő jel fázisa a belső oszcillátorhoz képest általában nem ismert, az R mennyiség azonban nem függ a fázistól.

A gyakorlaton megismerkedünk a lock-in erősítő alapvető kezelésével, és azzal, hogy a segítségével az AM rádióadás közvetlenül demodulálható. Megjegyezzük, hogy a lock-in erősítő mint több milliós mérőeszköz használata a rádióadás vételére (amit egy filléres rádióval is megoldhatnánk) megmosolyogtató, azonban kiválóan alkalmas e műszer alapvető működésének demonstrációjára.

2.3. Nagyfrekvenciás jelek analízise, a Fourier transzformáció

A heterodin detektálás megismerése után ismételjük át, hogy hogyan határozható meg egy jel frekvenciatérbeli felbontása.

Egy $F(t)$ időfüggvény különböző frekvenciájú komponenseinek felbontását matematikailag a Fourier-transzformált segítségével adhatjuk meg:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.2)$$

Egy valós mérésnél a Fourier-transzformált függvényt csak közelítőleg tudjuk megadni, hiszen egyrészt véges ideig tart a mérésünk, másrészt a mérési adatok csak diszkrét időfelbontással állnak rendelkezésre. Először nézzük meg a véges idejű mérés hatását a Fourier-transzformáltra.

A véges idejű mérés megfelel annak, mintha az eredeti függvényt megszoroznánk a mérési intervallumnak megfelelő $W(t)$ ablakfüggvénnyel, és ezen szorzatfüggvény Fourier-transzformáltját számolnánk ki:

$$f_W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t) \cdot F(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (2.3)$$

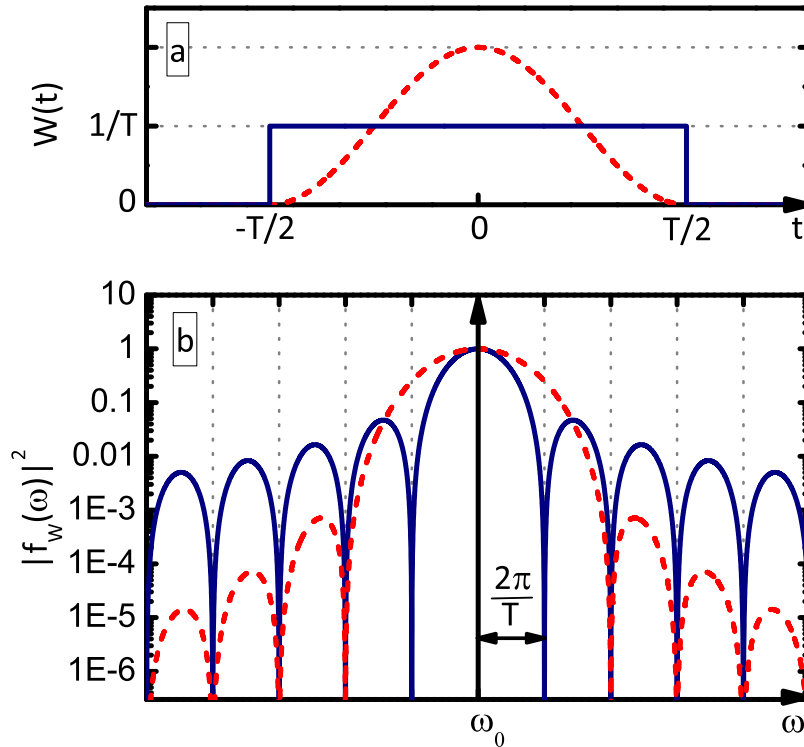
ahol a $W(t)$ függvény $|t| < T/2$ esetén $1/T$, ezen T hosszúságú időintervallumon kívül pedig zérus. Megmutatható, hogy egy szorzatfüggvény Fourier-transzformáltja a két komponens Fourier-transzformáltjának a konvolúciója, azaz:

$$f_W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega') w(\omega - \omega') \frac{d\omega'}{2\pi}, \quad \text{ahol } w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.4)$$

Nézzünk egy egyszerű példát, legyen $F(t) = A \cdot \exp(i\omega_0 t)$ egy harmonikus függvény, melynek a Fourier-transzformáltja egy Dirac-delta függvény: $f(\omega) = A \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$. Véges idejű mérés esetén azonban a Fourier integrál értéke a fentiek alapján $f_W(\omega) = A \cdot w(\omega - \omega_0)$, azaz a harmonikus függvény Fourier-transzformáltjában egy valós mérés esetén a végtelenül keskeny Dirac-delta csúcs helyett az ablakfüggvény Fourier-transzformáltját látjuk az ω_0 középfrekvenciához eltolva. A fent definiált *téglalap ablak* esetén (azaz amikor $W(t)$ egy T szélességű intervallumban konstans, azon kívül zérus, lásd 2.6a. ábra, kék folytonos vonal) az ablakfüggvény Fourier-transzformáltja $w(\omega) = (2/\omega T) \cdot \sin(\omega T/2)$, azaz $f_W(\omega) = (2/(\omega - \omega_0)T) \cdot \sin((\omega - \omega_0)T/2)$ (2.6b. ábra, kék folytonos vonal). A véges időintervallumra számolt Fourier-integrál is mutat egy határozott csúcstól távolabb is oszcillációkat látunk a Fourier-transzformáltban, amit spektrális szivárgásnak nevezünk. Az $f_W(\omega)$ függvény ω_0 melletti első zérushelyeinek a távolsága $4\pi/T$, így az ω_0 körüli csúcs szélessége $\sim 2\pi/T$. Tehát az első fontos konklúzió, hogy **véges időtartamú mérés esetén a jelünket a Fourier-térben csak véges, nagyságrendileg $\Delta\omega \approx 2\pi/T$ frekvenciafelbontással látjuk!**

Érdemes megjegyezni, hogy a fent említett téglalap ablak helyett választhatunk más ablakfüggvényt is, például $W(t) = \cos^2(t\pi/T)$ ún. Hanning-ablak esetén a mért jelben elnyomjuk a $|t| < T/2$ mintavételezési időablak széleihez közeli részeket (2.6a. ábra, piros szaggatott vonal). Ebben az esetben az ω_0 körfrekvenciás jel Fourier-transzformáltjában ω_0 körül egy még szélesebb csúcstól látunk (azaz a frekvenciafelbontás romlik), viszont az ω_0 -tól távolabbi oszcillációk amplitúdója (az ún. spektrális szivárgás) lecsökken (2.6b. ábra, piros szaggatott vonal).

Következő lépésként nézzük meg, hogy mi a hatása annak, hogy a jelünket nem folytonosan látjuk, hanem csak diszkrét mintavételezési időpontokban. Emiatt a jel Fourier-transzformáltját a folytonos integrál helyett kénytelenek vagyunk egy diszkrét összeggel, az



2.6. ábra. a) $W(t)$ ablakfüggvény téglalap ablak (kék folytonos vonal) és Hanning ablak (piros szaggatott vonal) esetén. b) $F(t) = A \cdot \exp(i\omega_0 t)$ harmonikus jel Fourier-transzformáltjának abszolút érték négyzete téglalap ablak (kék folytonos vonal) és Hanning ablak (piros szaggatott vonal) esetén. A téglalap ablakot Hanning ablakra cserélve az ω_0 körüli csúcs kiszélesedik, azaz romlik a frekvenciafelbontás, azonban az ω_0 -tól távolabbi mellékcsúcsok amplitúdója lecsökken, azaz csökken a spektrális szivárgás.

ún. diszkrét Fourier-transzformálttal (DFT) közelíteni:

$$f_W(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} W(n \cdot \Delta t) F(n \cdot \Delta t) e^{-i\omega n \Delta t} \Delta t, \quad (2.5)$$

ahol Δt a szomszédos mérési pontok közötti idő, $N = T/\Delta t$ pedig a mintavételezett pontok száma. Az ún. Nyquist-Shannon mintavételezési törvény szerint Δt **sűrűségű mintavételezés esetén a jelet $\omega_{\max} = 2\pi/2\Delta t$ maximális körfrekvenciáig tudjuk rekonstruálni.**

Könnyen belátható, hogy a diszkrét Fourier-transzformált fenti képlet szerinti kiértékelése N mérési pont esetén $\sim N^2$ művelet ($\Delta\omega \approx 2\pi/N\Delta t$ frekvenciafelbontás és $\omega_{\max} = 2\pi/2\Delta t$ maximális felbontható frekvencia esetén csak $\omega_{\max}/\Delta\omega \approx N$ diszkrét pontban érdemes kiértékelni a diszkrét Fourier-transzformáltat, és a definíció szerint egy adott frekvencián N művelet a szumma kiszámítása). Egy ügyes trükkel azonban jelentősen csökkenthető a számítási műveletek mennyisége. Megmutatható, hogy ha a mérési pontok száma kettő hatványa ($N = 2^p$), és a frekvenciatérben $\omega_k = 2\pi k/N\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, N/2$ diszkrét körfrekvenciáknál értékeljük ki a Fourier-transzformáltat, akkor az ún. Fast Fourier Transform (FFT) algoritmus segítségével a számítási műveletek száma N^2 -ről $N \log_2 N$ -re csökken, ami nagy N esetén lényeges különbség.

A mérőműszerek jelentős része, így a laborgyakorlaton használt digitális oszcilloszkóp is az FFT algoritmus numerikus kiértékelése alapján határozza meg a mért jel spektrumát. A legtöbb esetben a műszer nem adja meg külön a spektrum valós és képzetes részét, hanem csak a Fourier-transzformált abszolút érték négyzetét látjuk. Ezen kívül a mérőműszerek általában a frekvencia, és nem a körfrekvencia függvényében adják meg a spektrumot, erre érdemes

odafigyelni a mérés kiértékelésénél.

A Fourier transzformáció definíciójánál (2.2. képlet) azt látjuk, hogy a Fourier spektrum komplex mennyiség. Erre azért van szükség, hogy a különböző frekvenciájú harmonikus tagok *fázisát* is le tudjuk írni. Könnyen belátható, hogy amennyiben $F(t)$ páros függvény (pl. \cos), akkor a Fourier spektrum tisztán valós, amennyiben pedig $F(t)$ páratlan függvény (pl. \sin), akkor a Fourier spektrum tisztán képzetes. Tetszőleges $F(t)$ esetén pedig a Fourier spektrum tartalmaz valós és képzetes tagokat is¹. Amennyiben a fázis ismerete nem lényeges és csak az egyes Fourier komponensek erősségére vagyunk kíváncsiak akkor a Fourier spektrum valós és képzetes részeinek négyzetösszegének gyökéből képezhetjük az ún. Fourier erősséget (*Fourier magnitude*).

Egy kérdés azonban még nyitva maradt: amikor harmonikus rezgésről beszélünk gyakran mint \cos , \sin vagy $e^{i\omega_0 t}$ -ként hivatkozunk rá. Itt mi a komplex jelölés szerepe? Erre a rövid válasz az, hogy önmagában a \cos vagy \sin függvény nem adja meg a harmonikus rezgés frekvenciájának *előjelét*. Első hallásra meglepő, hogy harmonikus rezgés frekvenciájának előjele van, azonban gondoljunk csak a mixerres lekeverésre: amennyiben RF frekvenciája kisebb mint az LO frekvenciája, a kapott IF jel alacsonyfrekvenciás komponensének frekvenciája *negatív*. Az előjel elvesztésének bemutatására tekintsük először a $\cos(\omega_{\text{IF}} t)$ jelet, ennek a 2.2. képlet alapján a Fourier transzformáltja valós és tartalmaz $\pm\omega_{\text{IF}}$ -nél is egy-egy pozitív csúcsot. Második példánkban tekintsük a $\sin(\omega_{\text{IF}} t)$ jelet, aminek Fourier transzformáltja képzetes és $\pm\omega_{\text{IF}}$ -nél mutat egy-egy ellentétes előjelű csúcsot. Tehát egyik példában sem tudjuk a jel frekvenciájának előjelét egyértelműen meghatározni. Ezzel szemben a $e^{-i\omega_{\text{IF}} t}$ Fourier transzformáltjának ω_{IF} -nél (előjelhelyesen) van egy csúcsa².

A $e^{-i\omega_{\text{IF}} t}$ kifejezés valós és képzetes részei úgy viselkednek mint a trigonometrikus függvények definíciójakor használt egységkörön mozgó pont vetületei, ami foroghat pozitív és negatív körüljáráson is. Ezzel szemben külön-külön a \cos és \sin vetületek nem érzékenyek az egységkörön mozgó pont körüljárásának irányára.

Már csak azt a kérdést kell megválaszolni, hogy mérés technikában hogyan tudjuk ezt a $e^{-i\omega_{\text{IF}} t}$ komplex időfüggő mennyiséget előállítani a mért *valós* jelekből. A válasz az, hogy a valós és képzetes részek a lock-in technikánál bemutatott kvadratúra detektálásból adódnak: azaz a bejövő jelet két, egymástól 90 fokban eltolt jellel keverjük le. Az így kapott két adatsort ($X(t)$ és $Y(t)$ a 2.5. ábra jelöléseivel) *tekintjük* a bejövő lekevert jel valós és képzetes részeinek: $\tilde{X}(t) = X(t) + iY(t)$. Az FT után szintén két adatsort kapunk a 2.2. képlet alapján:

$$\tilde{x}(\omega) = x(\omega) + iy(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (2.6)$$

ezért ezt komplex vagy kétcsatornás Fourier transzformációnak nevezzük.

Ha a tagokat expliciten kiírjuk, akkor belátható, hogy e két adatsor a következőképpen adódik:

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cos(\omega t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) \sin(\omega t) dt, \quad (2.7)$$

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -X(t) \sin(\omega t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) \cos(\omega t) dt. \quad (2.8)$$

E két adatsor négyzetösszegének gyöke: $\sqrt{x(\omega)^2 + y(\omega)^2}$ adja meg a különböző frekvenciájú komponensek erősségét a Fourier spektrumban.

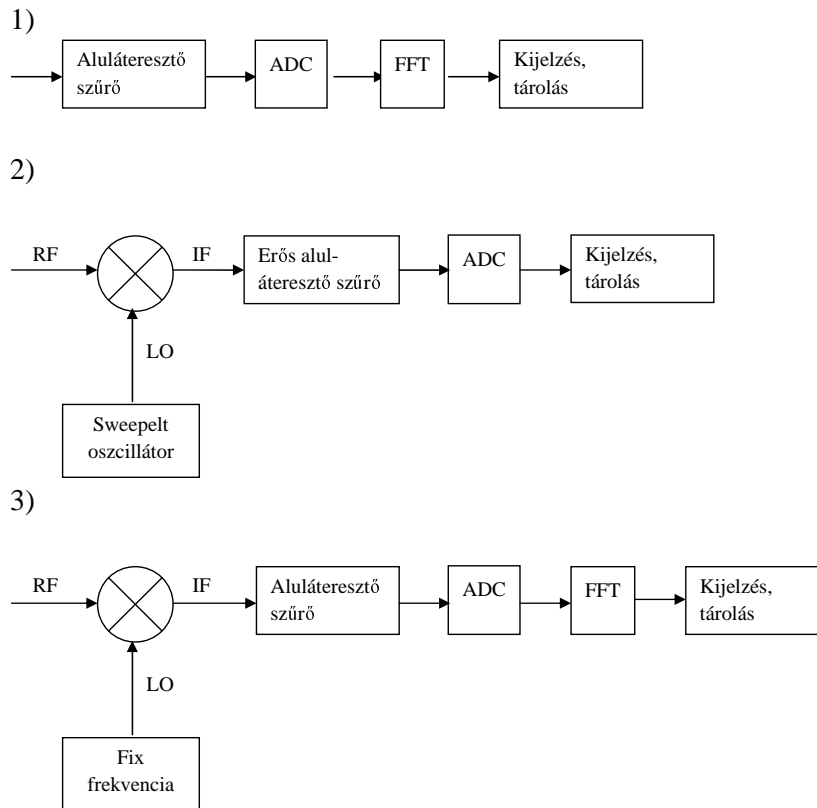
¹Ilyen értelemben a komplex jelölésnek az a szerepe, hogy a leírást rövidítse, egyébként kétkomponensű vektorokat kellene írunk.

²Azaz nincs csúcsa $-\omega_{\text{IF}}$ -nél.

2.4. Nagyfrekvenciás spektrumanalízis

Egy ismeretlen frekvenciaeloszlású bejövő jel spektrumanalízisére három módszer használatos:

1. Az ún. DC körüli FFT-n alapuló spektrumanalízis.
2. Az ún. sweepelt heterodin spektrumanalízis.
3. Az ún. hibrid heterodin-FFT spektrumanalízis.



2.7. ábra. A háromfajta spektrumanalízátor sematikus blokkdiagramja.

Ezen módszerek sematikus blokk-diagrammjaait mutatja a 2.7. ábra. Az első módszerben a bejövő jelet FFT-zve adódik a frekvenciaspektrum (a 2.7a. ábra). Ez a módszer azonban lényegében csak DC körüli, pl. audio jelek spektrumanalízisére használatos, mivel ekkor a Fourier-spektrum mindenképpen DC-től indul, hiszen az FFT algoritmus akkor effektív, ha a teljes $0 \leq f \leq f_{\max}$ frekvenciasávra alkalmazzuk. (Pontosabban fogalmazva, kiszámolhatjuk az FFT-t egy szűkebb sávra is, de az gyakorlatilag ugyan annyi számítási művelet, mintha a teljes frekvenciatartományra számolnánk). Ez akkor nem jó módszer, ha pl. csak 100 MHz körüli spektrum érdekes egy szűk, mondjuk 10 kHz-es tartományban, amit viszont nagy frekvenciafelbontással szeretnénk megmérni.

A második technika lényege, hogy egy olyan lokáloszcillátort használ aminek a frekvenciáját folyamatosan változtatjuk („sweepeljük”), majd a kapott IF jelet aluláteresztve szűrjük, úgy hogy a lekevert jelnek gyakorlatilag csak a DC komponensét mérjük (a 2.7a. ábra). Az így kapott szűrt IF jel nagyságát ábrázolva az időben változó LO frekvencia függvényében megkapjuk az RF jel spektrumát. E módszer előnye, hogy viszonylag egyszerűen megvalósítható, lehetővé teszi a frekvenciaspektrum valósídejű vizsgálatát. Hátránya, hogy a sweepelt oszcillátorok frekvenciájának értékét nem könnyű pontosan meghatározni, ill. az, hogy egy

időpillanatban csak 1 frekvenciaértéket mér. Azt is érdemes megjegyezni, hogy a 2.7b. ábrán bemutatott elrendezésben csak a mért jelnek az LO jellel fázisban levő komponensét (*azaz a valós részét*) mérjük, ezért nevezzük ezt az elrendezést egycsatornás spektrumanalizátornak. A teljes Fourier-spektrum meghatározásához (és a Fourier-transzformált abszolút érték négyzetének meghatározásához is) ugyanezt a műveletet az LO jel 90 fokkal eltolt transzformáltjával is el kéne végezni, ami gyakorlatilag a lock-in erősítő a 2.5. ábrán bemutatott blokkdiagramjának felel meg.

Az első két módszerből mindkettő legjobb tulajdonságait ötvözi a harmadik technika. Ebben egy fix frekvenciájú lokáloszcillátort használunk és a lekeverés után kapott IF jelet Fourier transzformáljuk FFT algoritmussal. Ezáltal tetszőleges frekvencia kis környezetét vizsgálhatjuk úgy, hogy egyszerre sok frekvenciát mérünk³. Emellett az LO frekvenciája nagyon stabil lehet, ezért a kapott frekvenciaspektrum nagyon pontosan kalibrált. Egyetlen hátránya, hogy az FFT művelet aránylag számolásigényes, azonban ez egyre kevésbé jelent limitációt a számítási kapacitás növekedése miatt.

A heterodin-FFT spektrumanalizátoroknál különösen fontos kérdés az IF frekvencia előjelének meghatározása, erre az ún. kvadratúra detektálás kínál megoldást. A probléma az, hogy a mixer fentebb említett tulajdonsága (*azaz az LO és RF frekvenciák összegét és különbségét is előállítja*) miatt a 2.7c. ábrán mutatott blokkdiagram (ún. egycsatornás hibris heterodin-FFT spektrumanalizátor) esetén pl. LO=100 MHz és RF=99.9 MHz mellett az IF jel 0.1 MHz-es frekvenciájú lesz. Erről a jelről az egycsatornás spektrumanalízis után nem tudjuk megmondani, hogy valójában -0.1 MHz frekvenciához, azaz RF=99.9 MHz-hez tartozik. Ha a lock-in kapcsán bemutatott elv szerint a bejövő RF jelet kettéosztjuk, majd két mixeren szorozzuk össze az LO-val és annak 90 fokos eltoltjával, akkor az így kapott két IF jelet Fourier-transzformálva az IF jel frekvenciája egyértelműen meghatározható. A modern spektrumanalizátorok, így pl. a Méréstechnika előadáson bemutatott Tektronix DPO/MSO oszcilloszkóp/jelanalizátor is kvadratúra üzemmódban működő heterodin-FFT elven alapulnak.

A laborgyakorlat során a spektrumanalízist egyszerűbben oldjuk meg, a felhasznált eszközök adta limitációk okán (nem használhatunk egy nagyértékű spektrumanalizátort). Az FM rádióadások (87.5-108 MHz között) vizsgálatánál a bejövő RF jelet LO-val lekeverjük, majd Fourier transzformáljuk. Ezáltal az IF jel előjelét elveszítjük, ami a rádióállomások azonosításánál problémát okozhat. Ezt úgy kerüljük ki, hogy az LO frekvenciáját 87.5 MHz-re állítjuk be. Tudjuk, hogy ennek közelében rádióadások csak ennél nagyobb frekvenciákon vannak jelen, ezért a kapott IF jelek frekvenciája egyértelmű.

³Ezt nevezik az FT módszer ún. multiplex tulajdonságának is.

3. fejezet

Mérési feladatok

A mérési feladatok előtt gondosan olvassuk el a B. Függelékben az egyes műszerek és a mérőprogram használati útmutatóját. A mixer portjaira adott túl nagy feszültség a mixer meghibásodásához vezethet!

3.1. AM modulált rádiójel demodulálása Lock-in erősítővel

1. A kartondobozra feltekert hurokantennát csatlakoztassuk a lock-in erősítő bemenetére, a *CH1* kimenetet csatlakoztassuk a hangfalra! A lock-in frekvenciája legyen 540 kHz, bemeneti impedanciája 50 Ohm. Vizsgáljuk meg a hang változását a lock-in erősítőn beállított frekvencia, időállandójának, érzékenységének és a CH1-re beállított kimeneti típusnak (X, R, v. R[dBm]) függvényében. Írjuk le az optimális beállítást!
2. A jegyzőkönyvben ismertessük, hogy a lock-in működésének ismeretében miért működik a lock-in AM rádió vevőként, ill. értelmezzük, hogy a fenti lock-in paraméterek hogyan befolyásolják a hallott hangot!
3. A lock-in *R* üzemmódjában kiírt feszültség közvetlenül a hurokantennában indukált feszültséget adja. Tudjuk, hogy a Solti Adóállomás 2 MW teljesítményt sugároz ki, távolsága a labortól kb. 80 km. Az antennától távoli sugárzási térben az antenna síkjában a mágneses térerősség érintőirányú nagysága az antennától r távolságra: $H = \frac{I_0}{2\pi r}$. Az antennában folyó I_0 áram és a kisugárzott teljesítmény, P_{rad} , kapcsolata: $P_{\text{rad}} = I_0^2 Z_{\text{rad}}/2$, ahol $Z_{\text{rad}} = 73 \Omega$ az antenna ún. sugárzási impedanciája. Hasonlítsuk össze a mért és számított indukált feszültség értékeket!
4. A lock-in *CH1* kimenetét *R* üzemmódban Fourier transzformáljuk az oszcilloszkóp segítségével, a < 20 kHz tartományra fókuszálva, miközben hallgatjuk is! Írjuk le, hogy a látott Fourier spektrum hogyan változik a LI időállandójának nagysága és a szűrő meredekségének függvényében. Ehhez mentsünk is el néhány Fourier spektrumot. Ezt a feladatot célszerű a következő feladat után elvégezni.

3.2. A modulált jelek és a Fourier transzform spektrumanalízis

5. A jelgenerátoron állítsunk elő pl. 100 kHz-es jelet és értelmezzük az FT spektrumokat ha a jel i) szinusz, ii) négyszögjel, iii) ramp! A kapott spektrumokat elmentve írjuk le,

hogy ezek hogyan függenek az oszcilloszkóp időalapjának értékétől és a választott ablakfüggvénytől (rectangular, Hanning, flattop)!

6. A jelgenerátoron állítsunk be 100 kHz-es szinusz és négyszögjelet amit 1-20 kHz-cel amplitúdó modulálunk. Ehhez használjuk a jelgenerátor "Mod" gombját (*AM Freq*: 1-20 kHz, *AM depth*: 100 %). Vizsgáljuk meg a jeleket idő és FT spektrum doménben is ha a moduláció alakja Sine, vagy Square! A két FT spektrumot mentjük is el és értelmezzük az oldalsávok helyét, alakját, számát és nagyságát!
7. Az AM modulált jelet állítsuk elő a HP 10534A mixer segítségével! Ehhez az L bementre tegyünk 100 kHz vagy 1 MHz (modulálatlan) szinusz jelet a jelgenerátor egyik kimenetéről (a nagysága 0.5-1 V_{RMS} legyen), az X bementre 1-100 kHz 0.1 V_{RMS} moduláló jelet a jelgenerátor másik kimenetéről, és az R-et csatlakoztassuk az oszcilloszkópra! Vizsgáljuk meg mind az idő- mind a frekvencia-doménben mért jeleket! Vizsgáljuk meg, hogy mi történik ha a moduláló jel nem szinusz hanem négyszögjel! (Ideális esetben két db oldalsávot kellene csak látnunk, azonban megjelenik a vivőfrekvencia is ill. a 3. harmonikus oldalsávok is. A log skála miatt ezek nagyoknak tűnnek, de valójában sokkal kisebbek, mint a kívánt első harmonikus oldalsávok).
8. A jelgenerátorral előállított AM jelet (mint a 6. feladatban) keverjük most *LE* a HP mixer segítségével. A mixer ki-bemeneteire adott jeleket a fentiekben elsajátított ismeretek segítségével önállóan rakjuk össze! Legyen a vivőfrekvencia 1 MHz és az AM moduláció frekvenciája 20 kHz. Ennek megfelelően az LO frekvencia is legyen 1 MHz. A lekevert jelet DC szint körül, 50 kHz alatt keressük! (Az oszcilloszkóp mintavételezése és a mixer által jelekbe kevert kismértékű jeltorzulások miatt megjelennek nem kívánt jelek is, azonban itt is dominálja a spektrumot a keresett lekevert jel. A nemkívánt jelek jellemzője, hogy helyük független a moduláció frekvenciájától.)

3.3. Az FM rádióadások vizsgálata

9. A 87.5-108 MHz frekvenciasávban található FM rádióadásokat vizsgáljuk meg! Ehhez a lock-in erősítő *Ref out* kimenetét használjuk 87.5 MHz-en mint lokál oszcillátort, a mixer RF bemenete legyen a szobaantenna (erősítőjét kapcsoljuk be), az IF kimenetet pedig csatlakoztassuk az oszcilloszkópra! Utóbbi eszközt úgy állítsuk be, hogy 25 MHz-es tartományt láthassunk az FT spektrumban. Azonosítsuk a látott FM csatornákat és a kapott eredményt hasonlítsuk össze az A. függelékben megadott táblázattal (ez tartalmaz szándékosan néhány kakukktojást is). Az azonos sugárzási helyről adott adások esetében a relatív intenzitás arányokat is mérjük meg és hasonlítsuk össze a táblázatban megadott értékekkel! (Az FM rádióadások demodulálása túlmutat a laborgyakorlat keretein).

Köszönetnyilvánítás

Köszönjük a jegyzet gondos átolvasását, javítását és az észrevételeket Fülöp Ferencnek, Bernáth Bencének, és Márkus Bencének. A laborgyakorlaton használt mérőprogram elkészítését Bernáth Bencének, az FM rádió állomások táblázatának elkészítését és a vehető állomások tesztelését Márkus Bencének köszönjük.

Ajánlott irodalom

Simonyi Károly: Elméleti villamosságtan

A. Függelék

A Budapest körzetében fogható rádióadások

AM: Kossuth rádió 540 kHz, Solti Rádióadó, távolsága Budapesttől kb. 80 km (Európa legerősebb középhullámú rádióadója).

A.1. táblázat. A Budapest körzetében fogható FM rádió csatornák listája (és néhány kakukktojás).

f (MHz)	P (kW)	Rádió neve	Adó helye
87.60	nincs adat	Kontakt Rádió	Terézváros
88.10	1	InfóRádió	Nagyvárad tér, SOTE épület
88.80	1	Rádió C	Széchenyi-hegyi adótorony
89.00	0.986	MR2 Petőfi Rádió	Debrecen
89.50	77.6	Music FM	Széchenyi-hegyi adótorony
90.20	8.3	MR1 Kossuth Rádió	Nagykanizsa
90.30	0.4	Tilos Rádió	Gellért-hegy, Citadella rádióadó állomás
90.90	2	90.9 Jazzy	Sashegy adótorony
91.40	1.2	Dankó Rádió	Debrecen
92.10	2.2	Klasszik Rádió	Gellért-hegy, Citadella rádióadó állomás
92.90	5	Klub Rádió	Sashegy adótorony
94.20	1	Mária Rádió	Sashegy adótorony
94.80	77.6	MR2 Petőfi Rádió	Széchenyi-hegyi adótorony
95.90	25.2	MR1 Kossuth Rádió	Pécs
96.70	37.1	MR2 Petőfi Rádió	Komádi
96.80	1	Rádió 17	XVII. Kerület, Rákosmente
97.50	50.1	MR1 Kossuth Rádió	Tokaj
98.00	5	Civil Rádió	Háromashatárhegy, Felső-Kecske-hegy
98.20	7.5	MR2 Petőfi Rádió	Tiszavasvári
99.50	3	Rádió Q	Sashegy 2
99.70	1.4	MR1 Kossuth Rádió	Debrecen
100.30	1	Lánchíd Rádió	Nagyvárad tér, SOTE épület
100.50	67.6	Class FM	Kabhegy
100.80	79.4	MR Dankó Rádió	Széchenyi-hegyi adótorony
102.00	22.4	Class FM	Sopron
102.10	0.741	Magyar Katolikus Rádió	Széchenyi-hegyi adótorony
102.70	30.2	MR2 Petőfi rádió	Kékes
103.30	81.3	Class FM	Széchenyi-hegyi adótorony
103.90	0.82	Juventus Rádió	Széchenyi-hegyi adótorony
104.80	0.3	Budaörs Rádió	Budaörs
105.30	81.3	MR3 Bartók Rádió	Széchenyi-hegyi adótorony
105.90	2	Gazdasági Rádió	Gellért-hegy, Citadella rádióadó állomás
106.20	23.4	RTVS Rádió Regina BB	Besztercebánya, Száraz-hegy
107.80	83.2	MR1 Kossuth Rádió	Széchenyi-hegyi adótorony
110.30	2	Rádió 7	Kőbánya, Határ úti adótorony

B. Függelék

A mérőeszközök és mérőprogram használata

A lock-in erősítő. Az SR844 lock-in erősítőt két célra használjuk: az AM modulált jelek demodulálására ill. mint lokál oszcillátort az FM modulált jelek vizsgálatánál. Az erősítő alapvető részei: *Signal in*: Bemenet, *CH1 output*: demodulált kimenet, *Ref out*: lokál oszcillátorként használva a mixerre adandó kimenet. A *Time constant* panelen: időállandó értéke és az aluláteresztő szűrő meredeksége állítható be. *Sensitivity*-nél: a lock-in érzékenysége állítható (hang erőssége az AM-es mérésnél). *Channel one*: itt *X*, *R* és *R[dBm]* értékek közül érdemes választani, *CH1 output* értéke *Display* legyen. A kívánt munkafrekvencia a *Reference* panelen *Freq* kiválasztásával állítható be.

Tektronix oszcilloszkóp. A digitális oszcilloszkóp alapvető használatát ismertnek tételezzük fel. A *trigger* gomb megnyomása után választható ki a csatorna amire triggerelünk (kijelző alatti gombokkal érhető el a trigger menü almenüjei), a *vertical menu*-ben a kijelzőtől jobbra elhelyezett gombokkal tudjuk a megfelelő kijelzett csatornákat beállítani. A *Math* gomb megnyomásával érjük el, hogy az FT spektrumot láthassuk. Gyakori hiba, hogy az FT spektrumban nem a kívánt tartományt látjuk hanem nagyságrendekkel más értékeket. Akkor kapunk jó FT spektrumot amikor az oszcilloszkóp időalap értéke olyan, hogy egy periódikus jelből kb. 100 periódust is látunk (a képernyőn összefolyik).

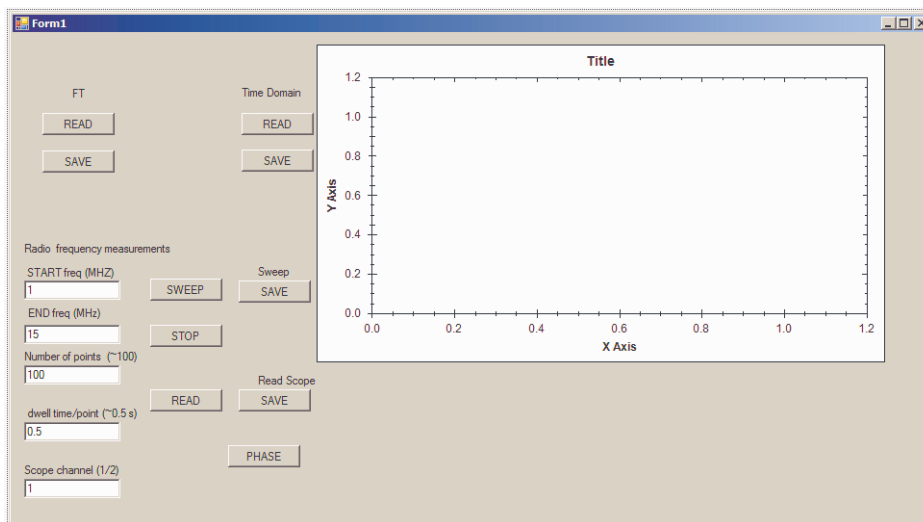
Az FT spektrum vizsgálatokor nem látjuk az idő doménben mért adatokat. Ezért első lépésként mindig győződjünk meg arról, hogy *ac coupled* üzemmódban vannak és a feszültség értékek nem lógnak ki a képernyőről. Az adatok jel-zaj aránya javítható az *Acquire* menüben a 128 *Average* kiválasztásával. Az FT spektrum függőleges tengelye dBV egységekben van, ez a feszültség effektív (U_{RMS}) értékéből a következő módon származtatható:

$$\text{dBV}(U_{\text{RMS}}) = 20 \log_{10}(U_{\text{RMS}}/1 \text{ V}) \quad (\text{B.1})$$

A pontos feszültség (vagy dBV) és frekvencia értékek leolvasásához használjuk az oszcilloszkóp *Cursor* opcióját.

A Siglent SDG1020 jelgenerátor. A jelgenerátor két független kimenettel rendelkezik, melyeket a kimenet felett elhelyezkedő kapcsolóval lehet bekapcsolni. A billentyűzet bal felső sarkában lévő *CH1/CH2* kapcsolóval lehet kiválasztani, hogy melyik csatorna értékét állítjuk be. Az aktuális csatornán beállított értékek (feszültség, frekvencia, kimenő impedancia) a képernyőn láthatók. Ebben a mérésben kimenő impedancia értékét célszerű *high Z*-re tenni, de az 50 Ohm sem okoz gondot. Az *offset* értéke legyen mindig 0. A frekvencia, jelamplitúdó, és jelalak (*Sine*, *Square* stb.) beállítása intuitív. A *Mod* gomb megnyomásával juthatunk a modulációs menükhöz az adott csatornára, ha ez világít, akkor az aktuális csatornakimenet modulált.

A HP 10534A rádiófrekvenciás mixer. A mixer L portja a lokál-oszcillátor bemenet, erre $0.5-1 V_{RMS}$ értéket adhatunk, a pontos értéktől a kimenet nagysága nem függ (ez csak a munkapontot állítja be). Az R és X portok lehetnek be ill. kimenetek is. A mixert lekeverőként használva az R port a bemenet és az X a kimenet. A mixert felkeverőként használva az X a bemenet és az R a kimenet. Az L és R portokra 50 kHz-150 MHz-es jelek adhatók, míg az X-re DC-150 MHz. Akár fel akár lekeverőként használjuk a mixert, a kimenet feszültsége (X vagy R) arányos a bemenet (R vagy X) feszültségével. A mixer X vagy R bemenetére adható feszültség ne haladja meg a $0.2 V_{RMS}$ értéket!



B.1. ábra. A mérőprogram kezelőfelületének megjelenése.

A mérőprogram. A mérőprogram akkor működik megfelelően ha az oszcilloszkóp egyes csatornáját használjuk. Az oszcilloszkópon a **Math** gomb megnyomása után az **Operation FFT**-t kell kiválasztanunk. Ezután az **Acquire** gombot kell megnyomni, majd az **Average** funkciót kell kiválasztani. Figyeljünk arra, hogy a horizontális skála osztása MHz-es legyen. A felvételt mindig úgy készítsük, hogy az oszcilloszkópon értelmezhető ábrát lássunk. Kattintunk az asztalon levő *nagyfreki_lab* parancsikonra, a mérőprogram kezelőfelületét a B.1. ábra mutatja. A Fourier transzformált kiolvasása az **FT** felirat alatti **READ** gomb megnyomásával történik. A grafikonon skálahelyesen megjelenik az oszcilloszkópon kijelzett érték. Az alatta levő **SAVE** gombbal lehet elmenteni a spektrumot. A mentett fájl bal oldali oszlopa tartalmazza a frekvenciát a másik pedig a dBV értékeket. Igény szerint az idődoménbeli jelet is rögzíthetjük. Ehhez az oszcilloszkóp 1-es gombját kell megnyomni, így visszatérünk a normál méréshez. A mérőprogramban a **Time Domain** alatti **READ** és **SAVE** gombbal hasonlóan kell eljárni mint az FT kiolvasásánál.