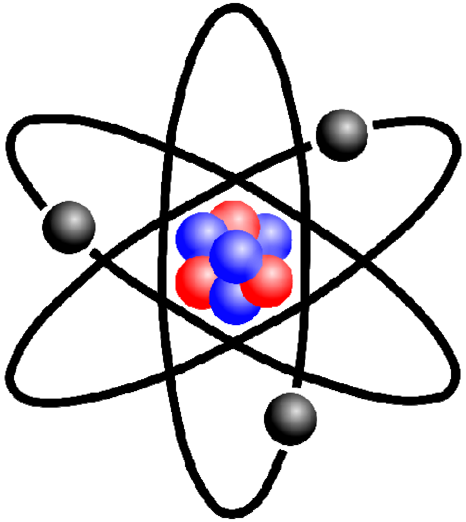
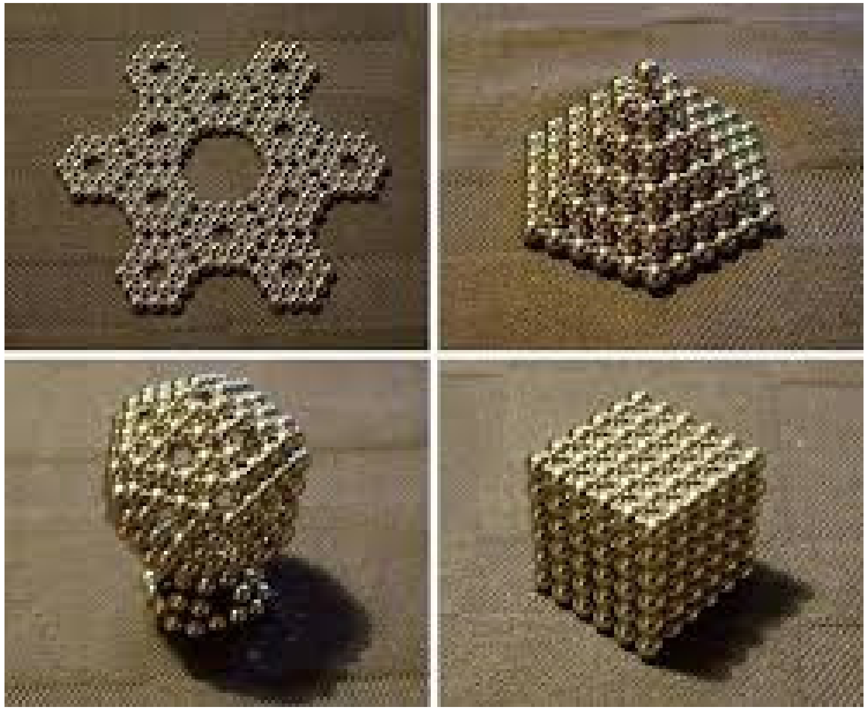
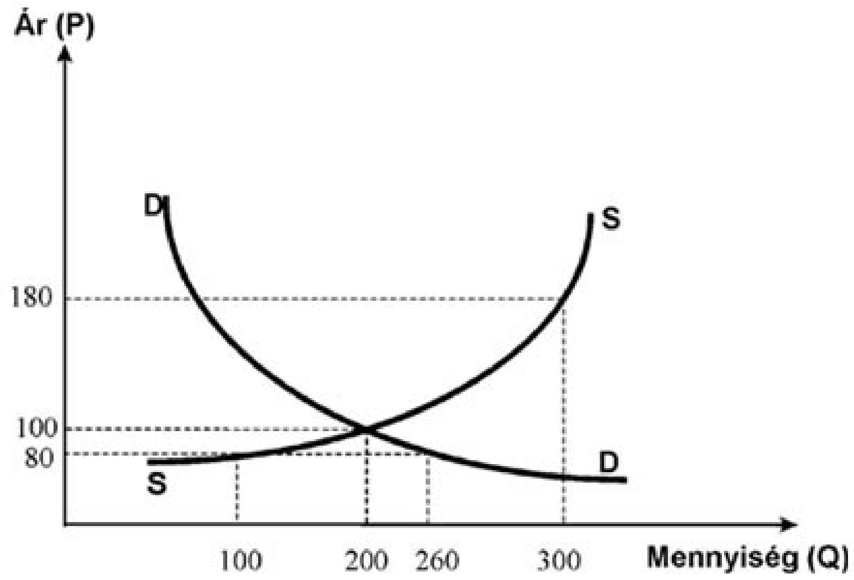


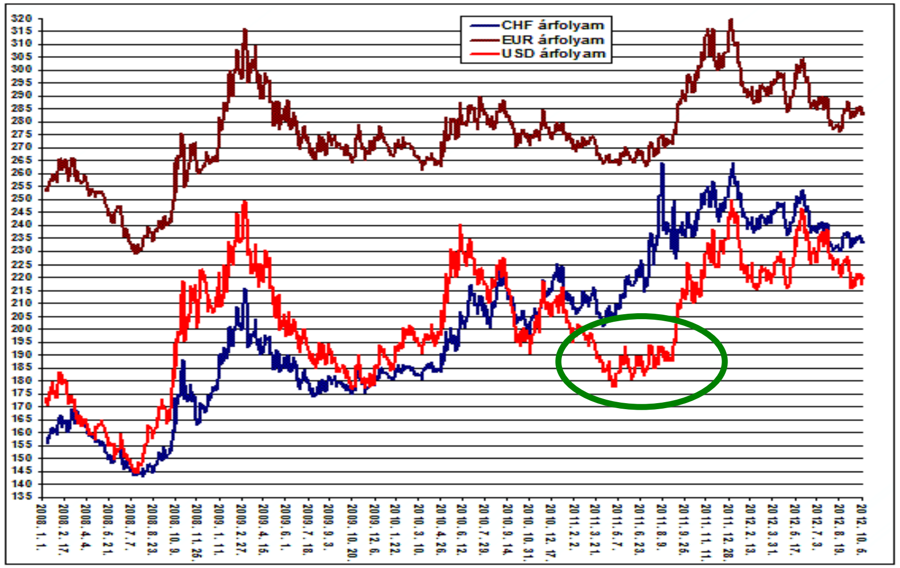
Fizika 112

4. Előadás

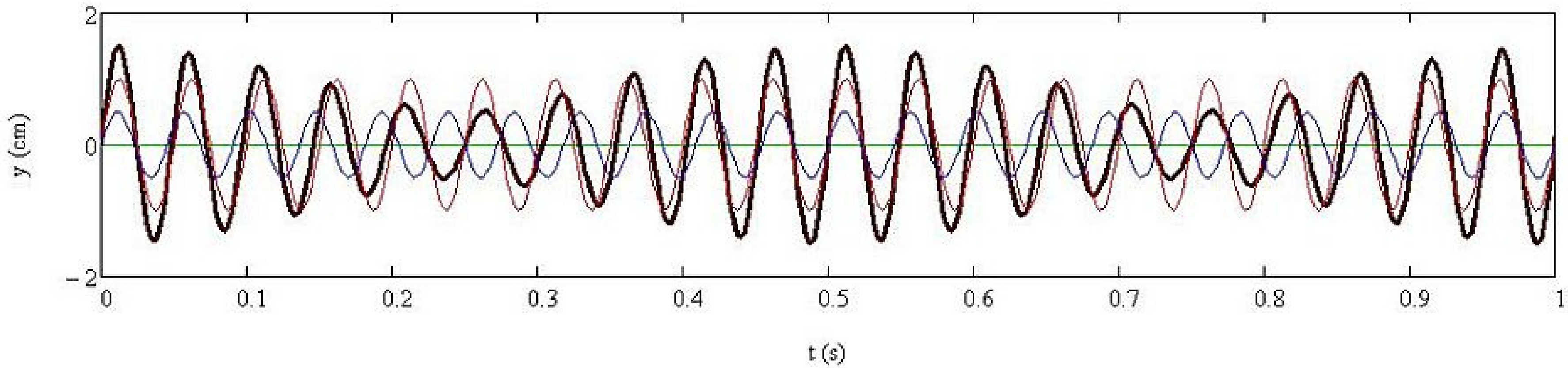


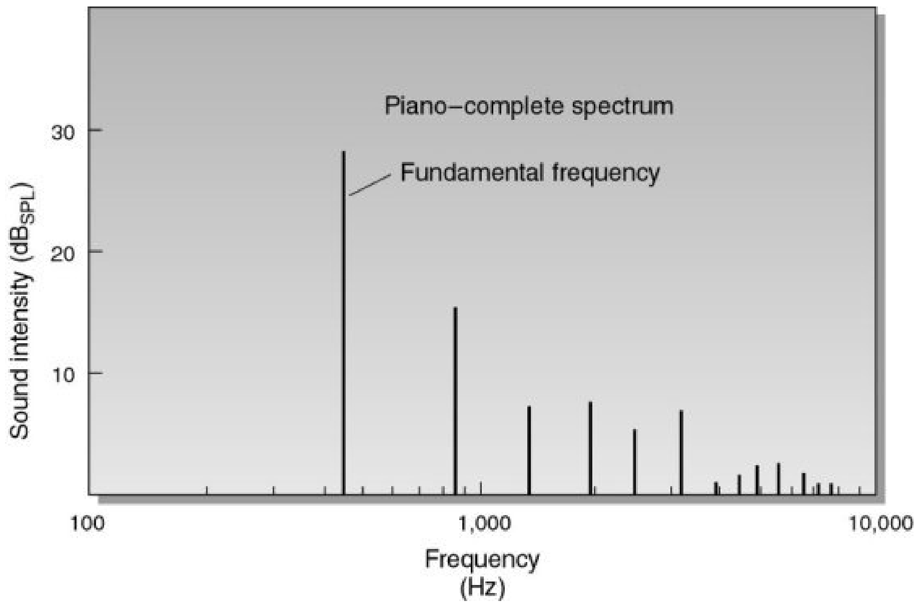
Rezgések: és mi a valóság???

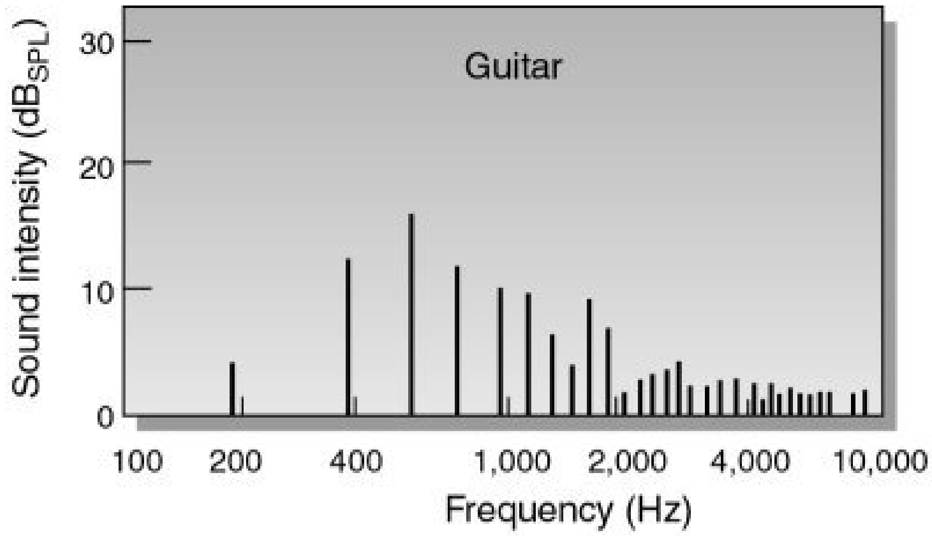




Több rezgés: lineáris szuperpozíció (a mozgásegyenlet lineáris)







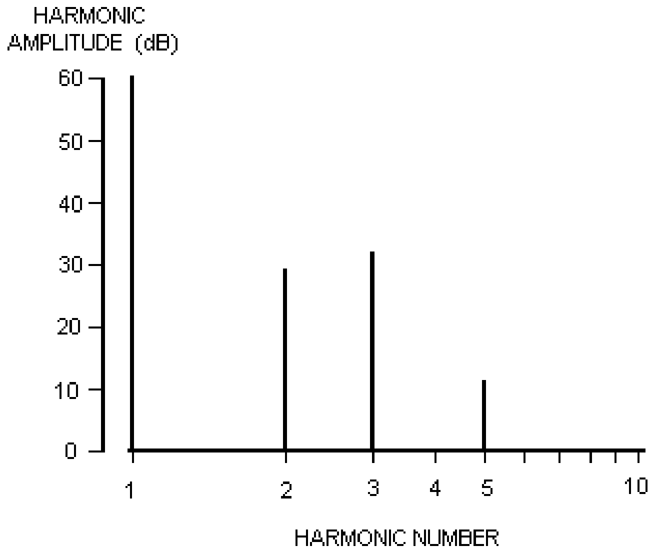
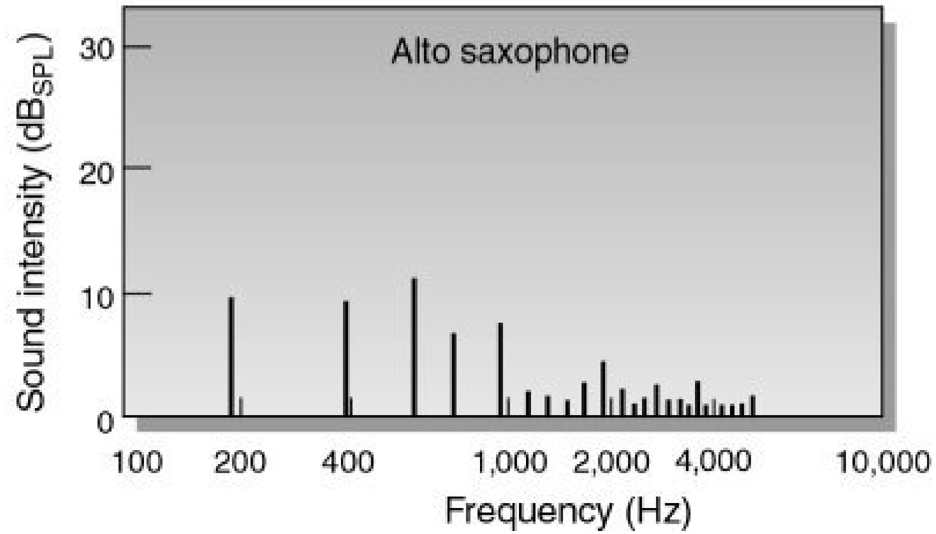


Figure 7 Harmonic Flute spectrum

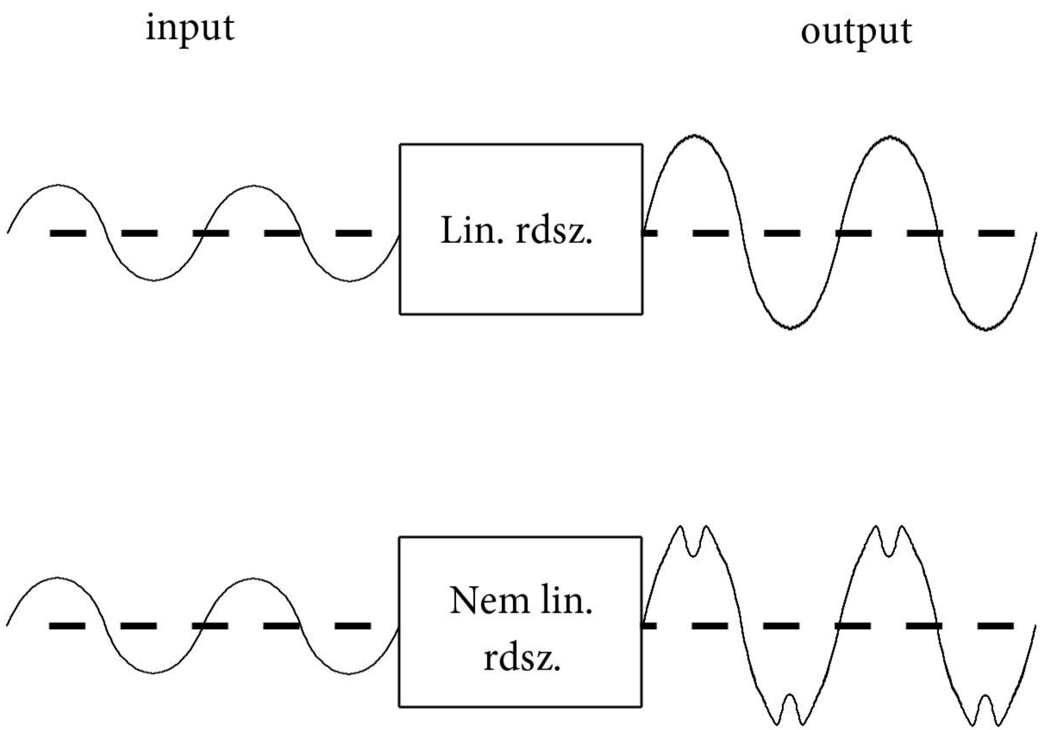


H. F.

$$A\cos(\omega t+\varphi_1)+B\cos(\omega t+\varphi_2)=C\cos(\omega t+\varphi)$$

Lineáris ↔ nemlineáris rendszer

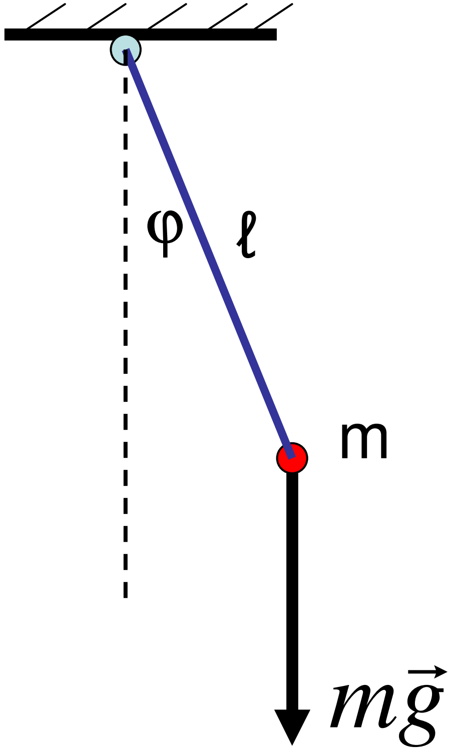
RC kör,
RL kör,
RLC kör,
Stb.



Vizsgálat:
Frekvencia-tartományban

Nemlin. hatások → torzítás
Pl. HiFi torony nagy hangintenzitások mellett

Matematikai inga



$$\beta = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi$$

$$\cancel{\varphi << 1\,rad}$$

$$T = ???$$

nemlinearitás

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots$$

hatása

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(3\omega t)$$

A mozgásegyenlet numerikus megoldása Euler módszerrel

Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus

A differenciálegyenletek numerikus megoldására szolgáló Euler módszerben a deriváltakat véges differenciák hányadosával közelítjük. Először az erőtörvényből kiszámítjuk az anyagi pont kezdeti gyorsulását és a kezdeti feltételek ismeretében meghatározzuk sebességének és helyzetének közelítő értékét Δt idővel későbbi időpontban, majd az új időpontban számított gyorsulással folytatjuk az eljárást.

Ismert az erő: $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$

és a kezdeti feltételek: $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ $\quad \vec{v}_0 = \vec{v}(0)$

$$\Downarrow$$

$$a_x(t) = \frac{F_x(\vec{r},\vec{v},t)}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$a_x(t) \approx \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \Rightarrow v_x(t+\Delta t) \approx v_x(t) + a_x(t)\,\Delta t$$

Hasonlóan kapjuk meg az anyagi pont helyzetvektorának *x* komponensét

$$v_x(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad \text{, ebből}$$

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + v_x(t)\,\Delta t$$

Ezt az eljárást folytatva, lépésenként meghatározhatjuk az anyagi pont új helyzetét és sebességét. Így tetszőleges időpontban, véges számú lépésben megkaphatjuk ezek (közelítő) értékét. A számítás pontossága a Δt megválasztásától függ; csökkenő Δt-vel növekszik a pontosság.

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + v_x(t)\,\Delta t + \tfrac{1}{2} a_x(t)\,(\Delta \mathrm{t})^2$$

Tovább nő a pontosság, ha az új helyzet számítása során $v_x(t)$ helyett a Δt időtartam felénél felvett sebességgel, $v_x(t+\Delta t/2)$ értékével számolunk. De ez már nem az Euler módszer.

Lineáris ↔ nemlineáris differenciálegyenletek

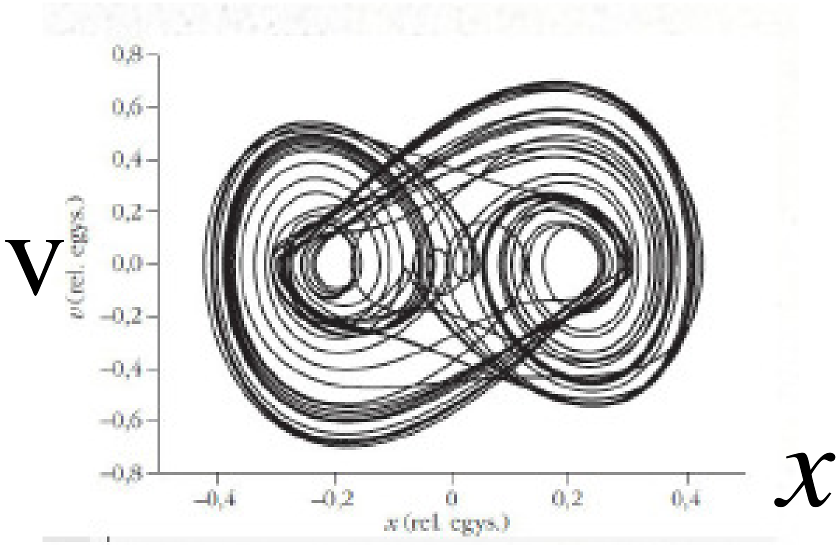
Harmonikus oszcillátor → lineáris

Csillapított oszcillátor → lineáris

Gerjesztett oszcillátor → lineáris

Matematikai inga (φ >5°) → nemlineáris

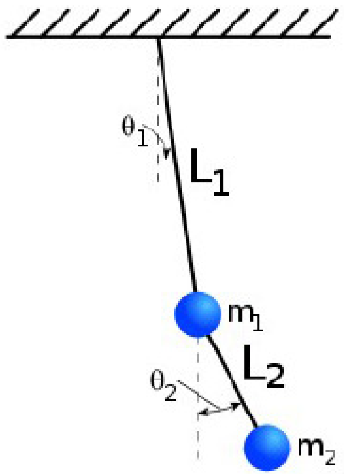
Parabolikus oszcillátor → nemlineáris $m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} + (1 - ax^2)\cos(\omega t)$

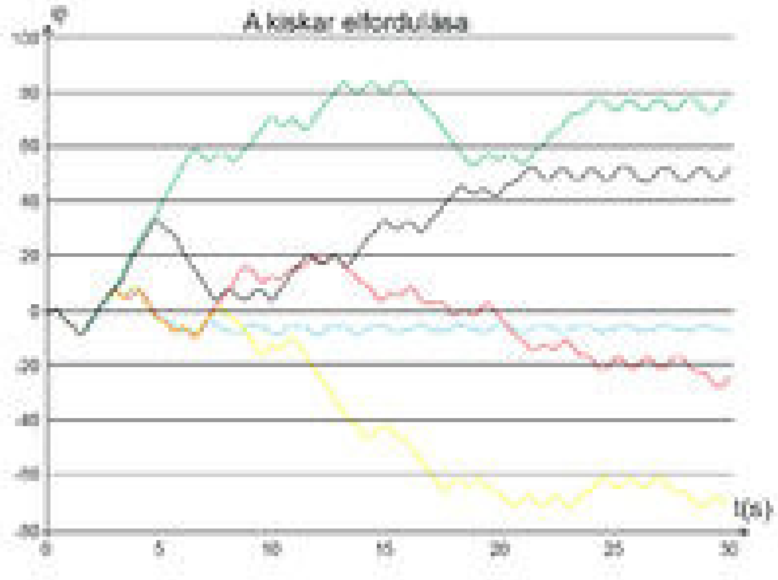


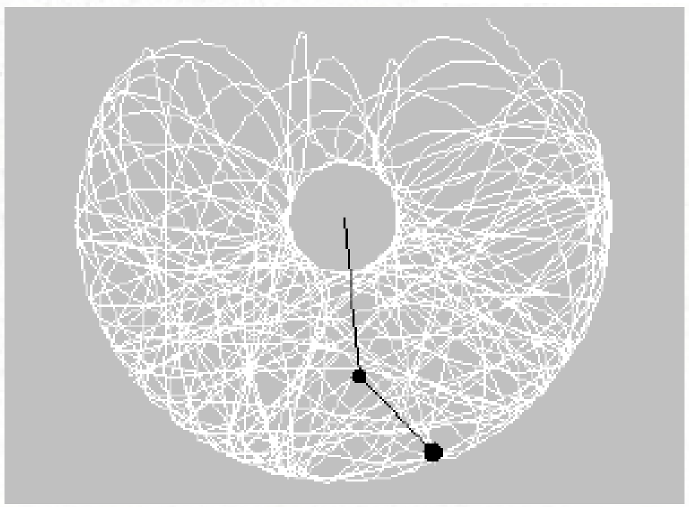
Forrás: Slíz Judit Fizikai szemle 2010/4

Nemlineáris differenciálegyenletek

Kettős inga



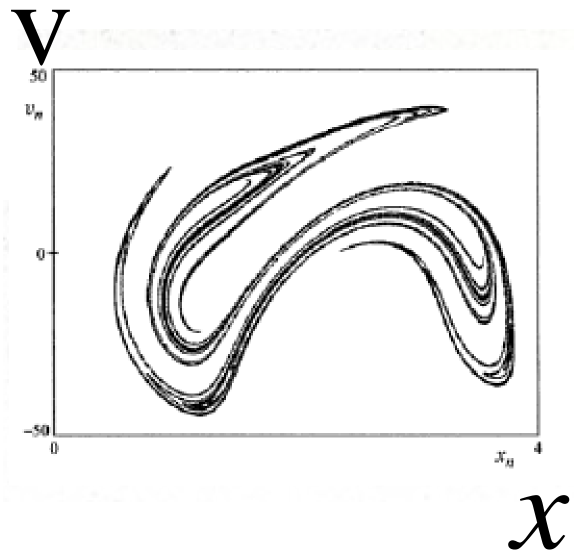


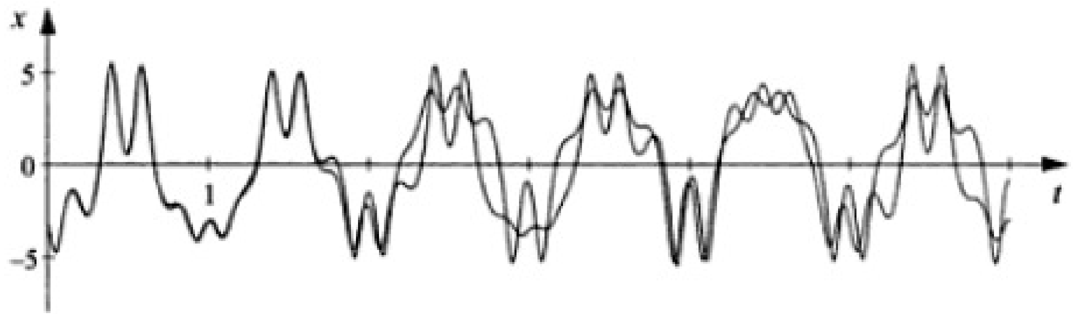


Forrás:Peter Selinger

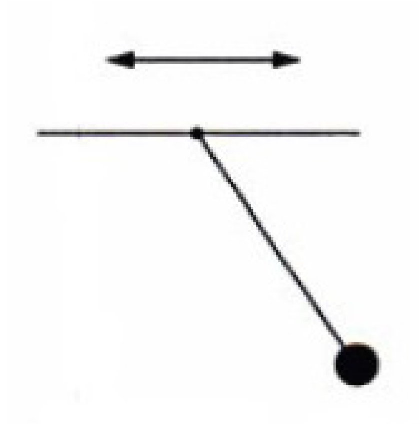
Nemlin. Rugóerő

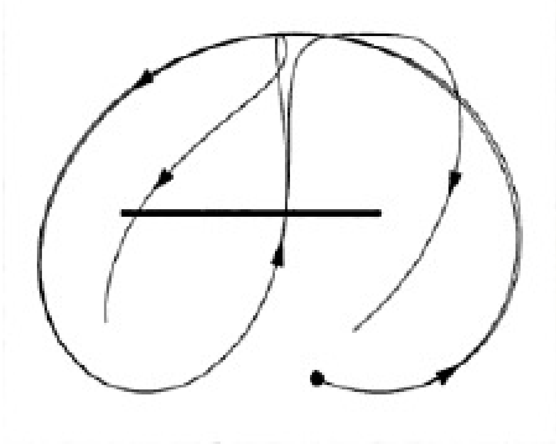
gerjesztett oszc.

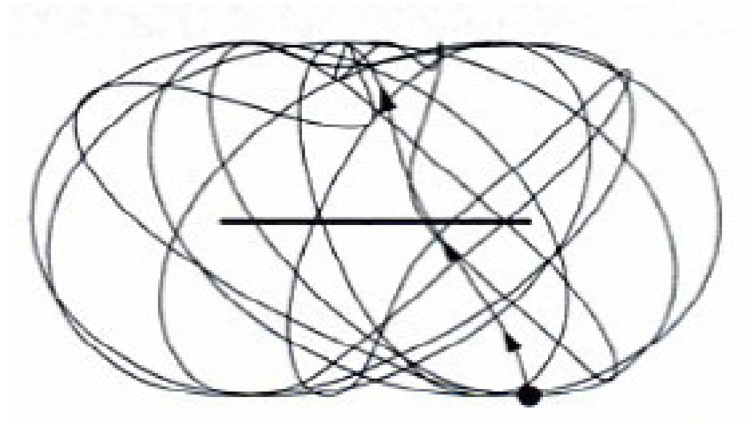


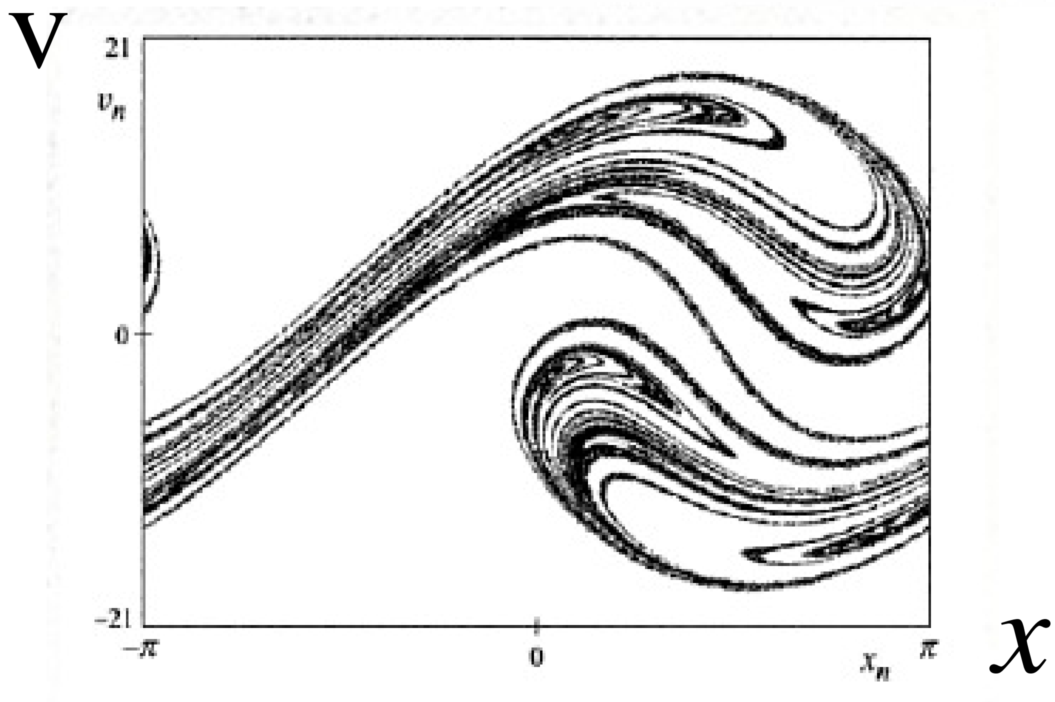


Rezgetett oszcillátor





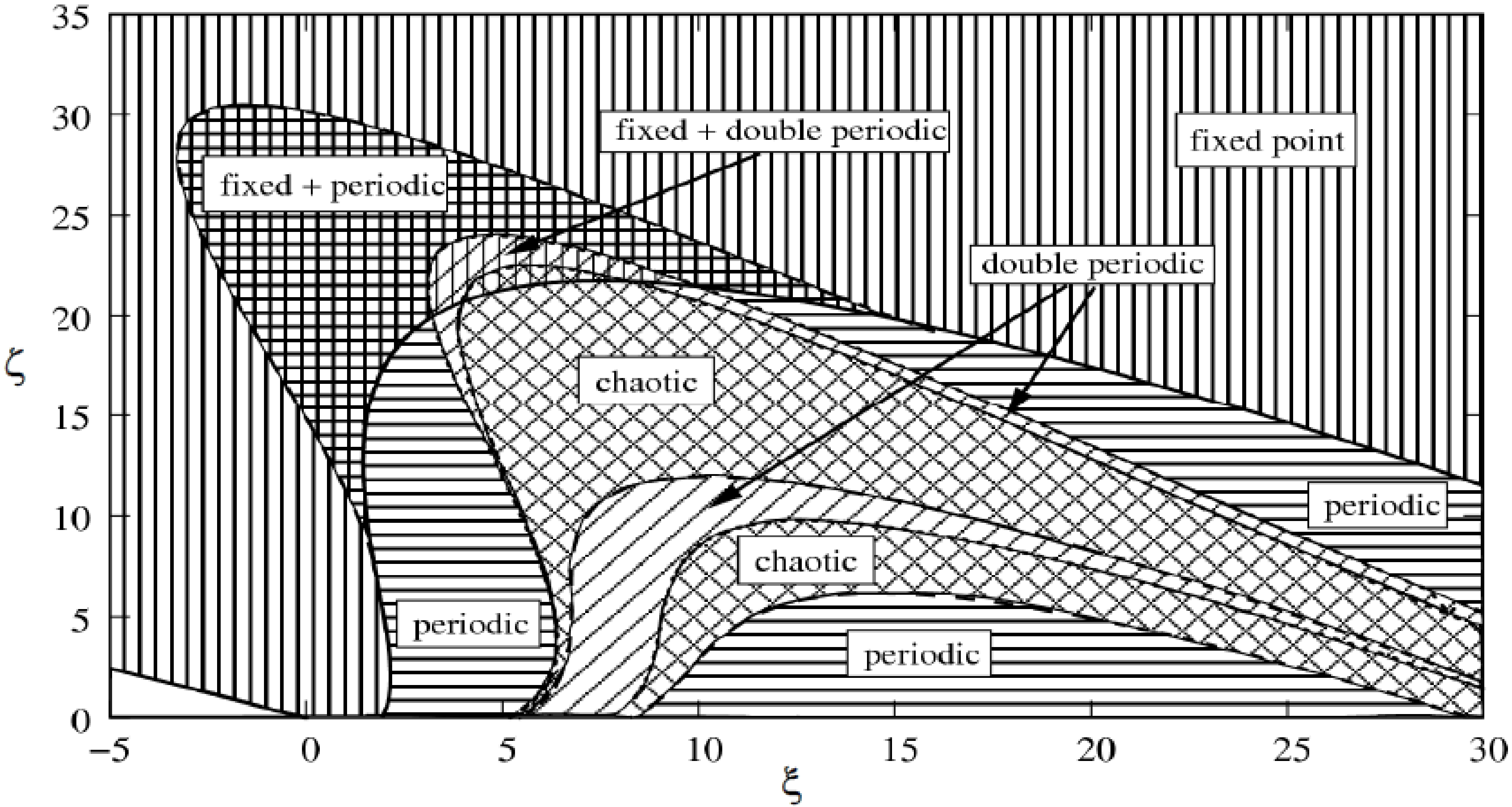




Forrás: Tél Tamás -Gruiz Márton: Kaotikus dinamika

Miért áll az esztergályos a gép mellett és miért nem hagyja ott a munkafolyamat végéig?

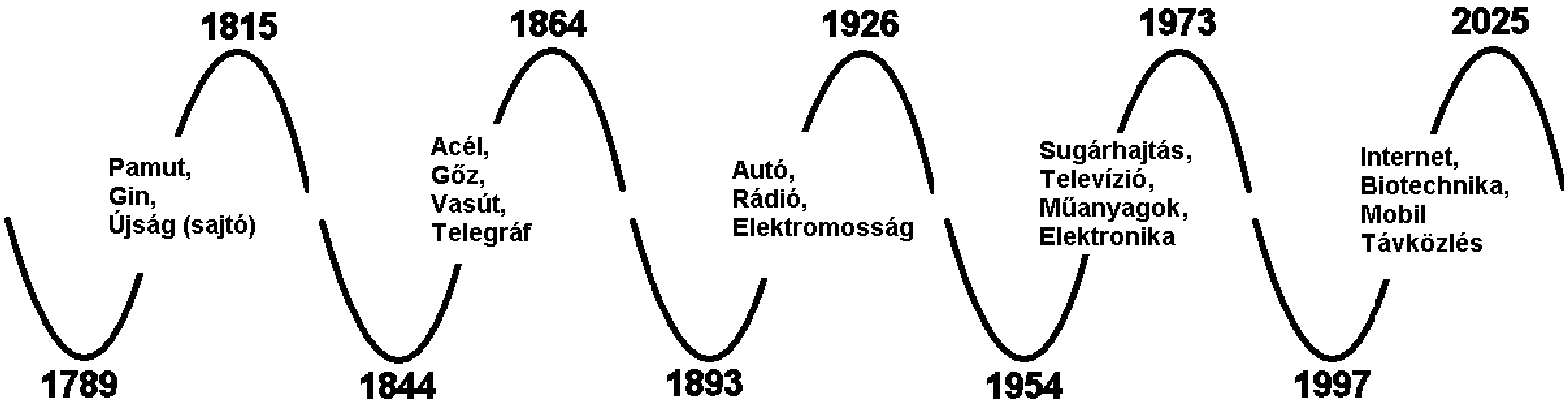
Nemliearitás és zajok!!!



Pálmai Zoltán: kontínuummechanikai modell a forgácsolás leírására.

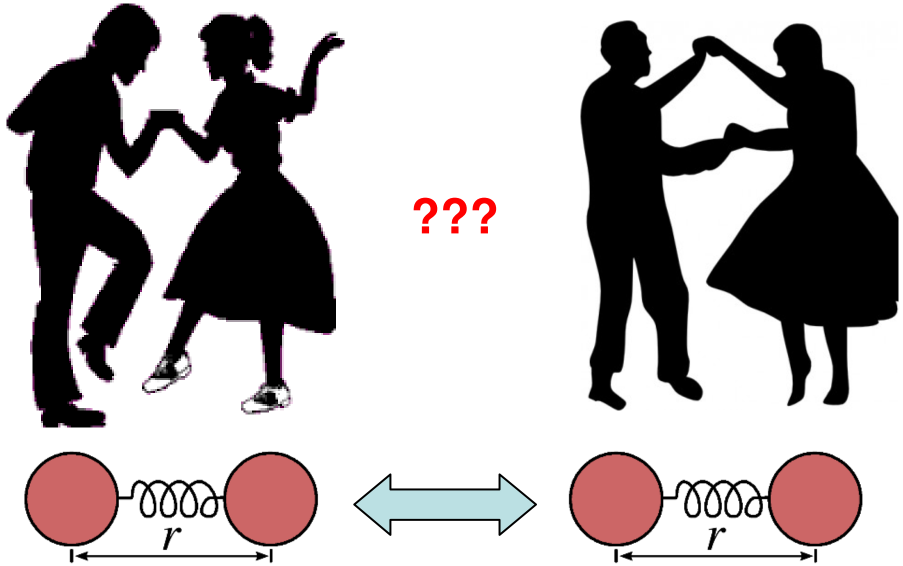
Gazdasági modellek

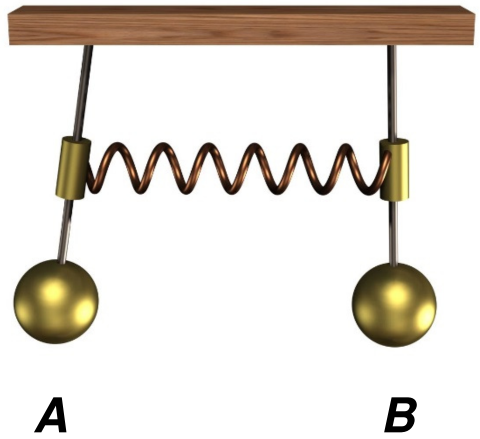
Kondratyev ciklus:

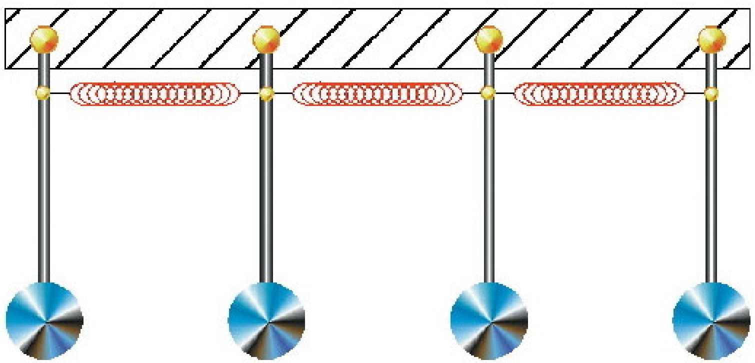


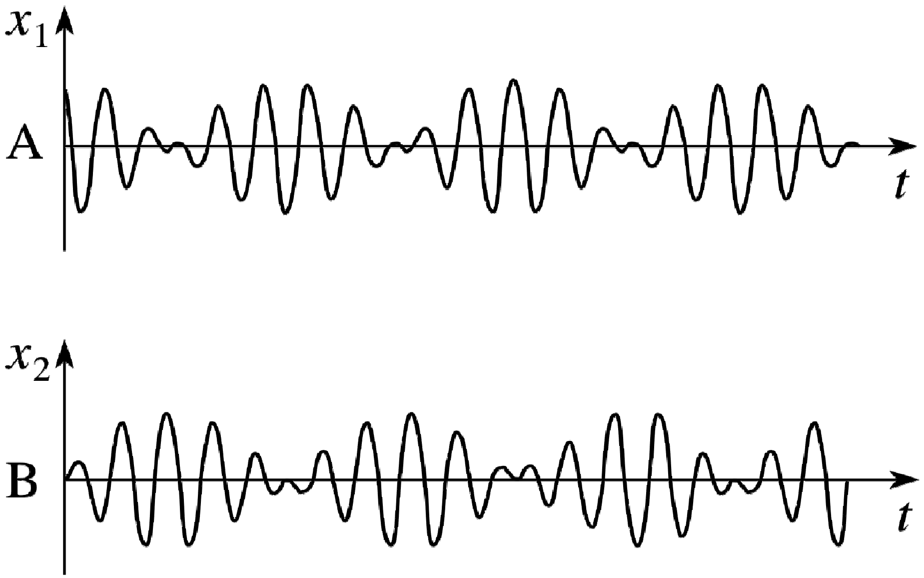
Nyikolaj Dmitrijevics Kondratyev: 1982 – 1938
Szovjetúnió → az első 5 éves terv

Csatolt oszcillátorok

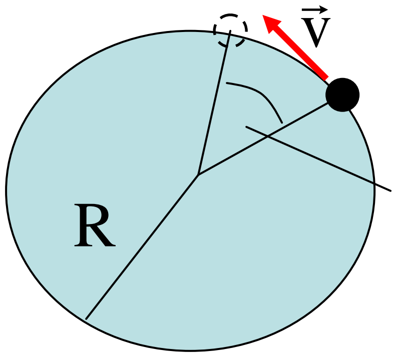








Merev test forgómozgása rögzített tengely körül



Θ: (szög)elfordulás [rad]

(forgó korong
sugár: R)

Def.: átlagos szögsebesség [1/s]

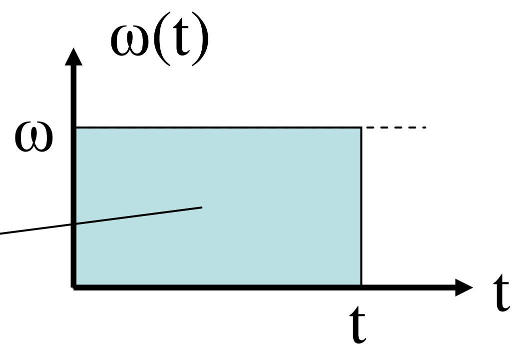
$$\omega_{átl.} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \frac{\Theta(t_2) - \Theta(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Ha ω=const.

$$\omega = \frac{\Theta(t) - \Theta_o}{t}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Korong helyzete: $\Theta(t)$

Elfordulás szöge: $\Theta(t) - \Theta_o = \omega t$

Ha ω≠const.

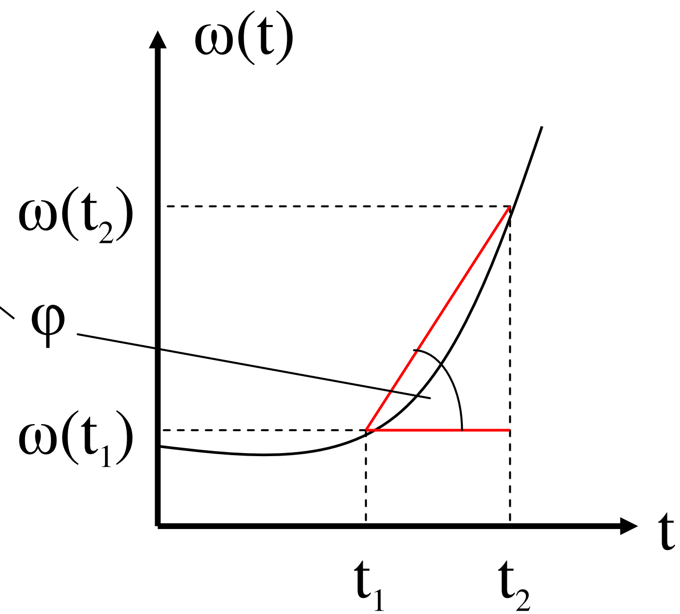
Def.: pillanatnyi szögsebesség

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Theta(t+\Delta t) - \Theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\Theta}{dt}$$

$$\beta(t) = \frac{a_t}{R}$$

Def.: átlagos szöggyorsulás [1/s²]

$$\beta_{átl} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1} = tg\,\varphi$$



Def.: pillanatnyi szöggyorsulás

$$\beta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

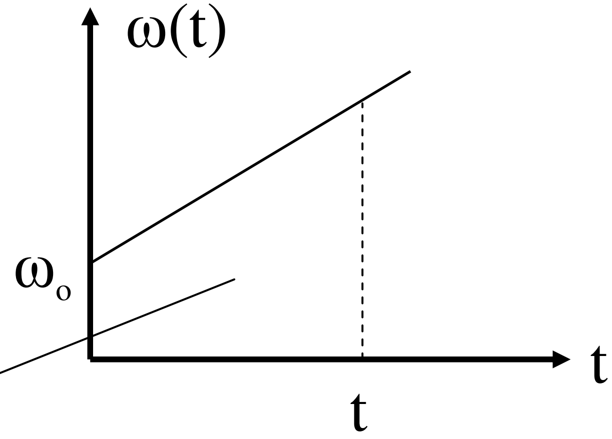
Adott: β(t), ω_o és θ_o

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \beta(\tau)d\tau}$$

$$\boxed{\Theta(t) = \Theta_0 + \int_0^t \omega(\tau)d\tau}$$

Ha β=const.

$$\omega(t)=\omega_o+\beta t$$

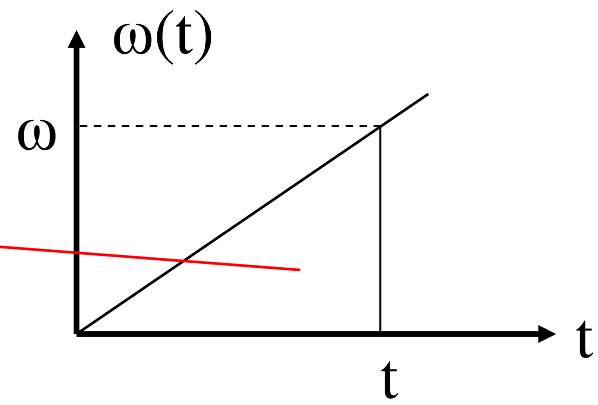


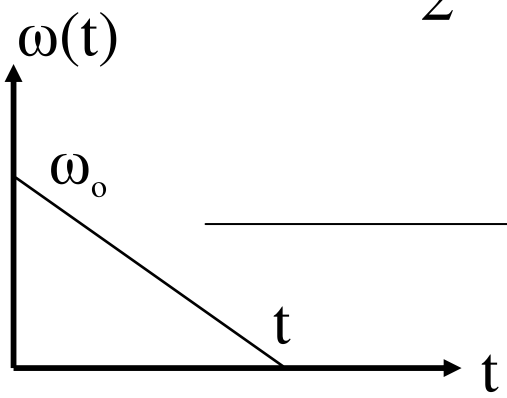
Szögelfordulás:

$$\Theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

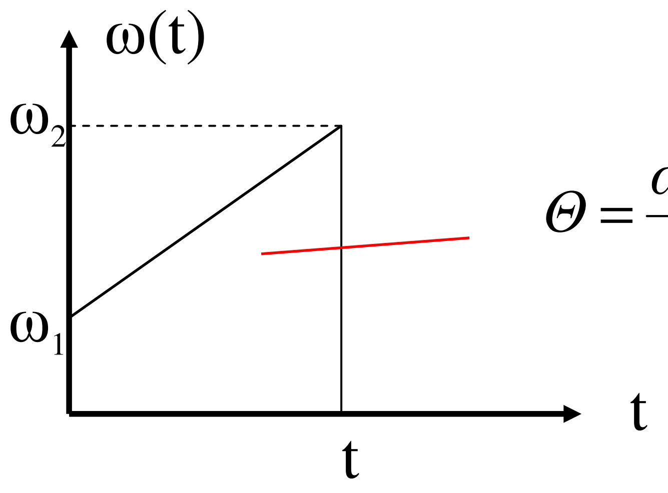
Ha ω_o=0 szögelfordulás:

$$\Theta = \frac{1}{2}\beta t^2 = \frac{\omega t}{2} = \frac{\omega^2}{2\beta}$$





$$\beta \rightarrow |\beta| \ , \ \omega \rightarrow \omega_o$$



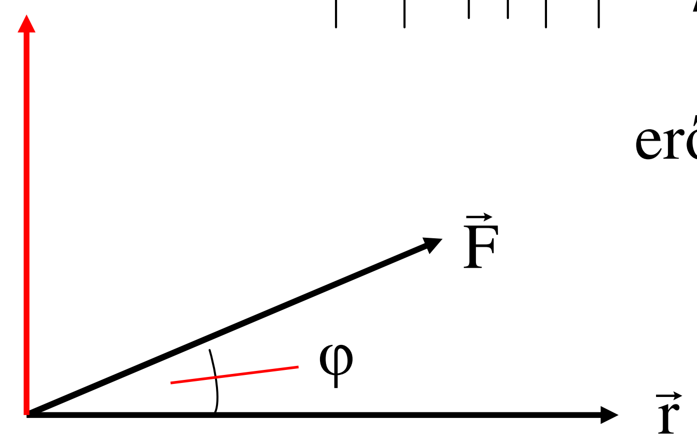
$$\Theta = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\beta}$$

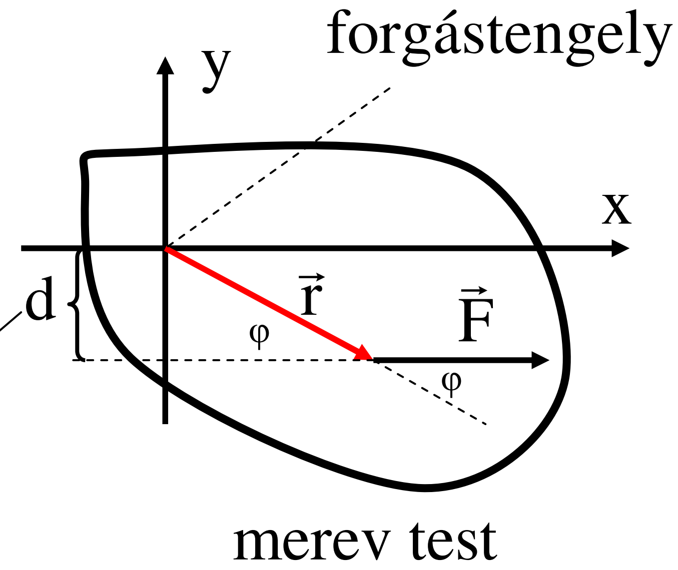
Def.: forgatónyomaték [Nm] $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \sin\varphi = F \cdot d$$

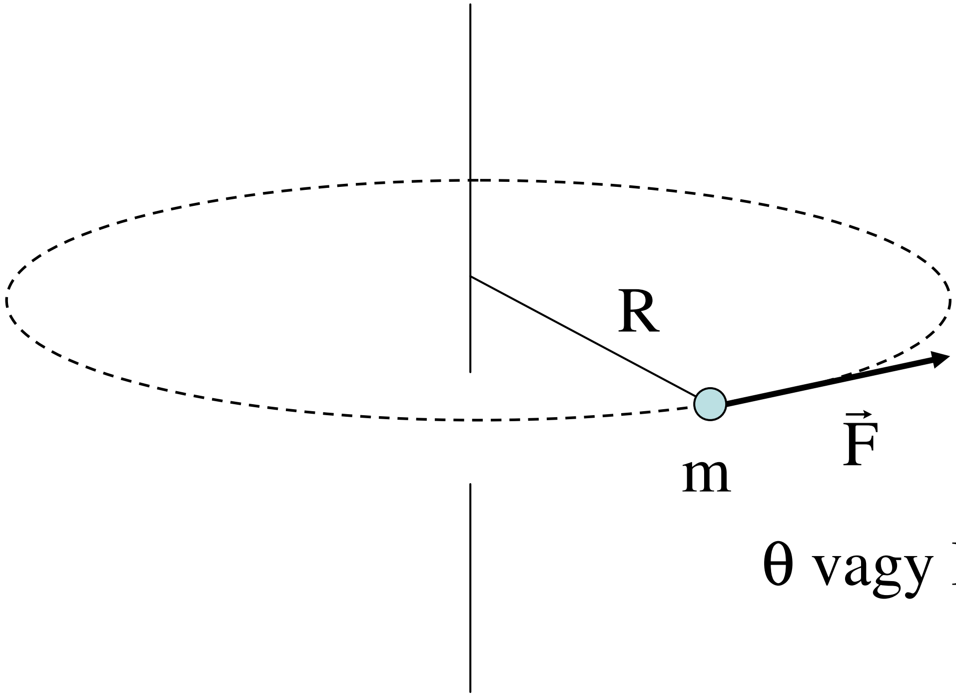
erő

erőkar





Forgás - dinamika



$$F = ma$$

$$FR = mRa$$

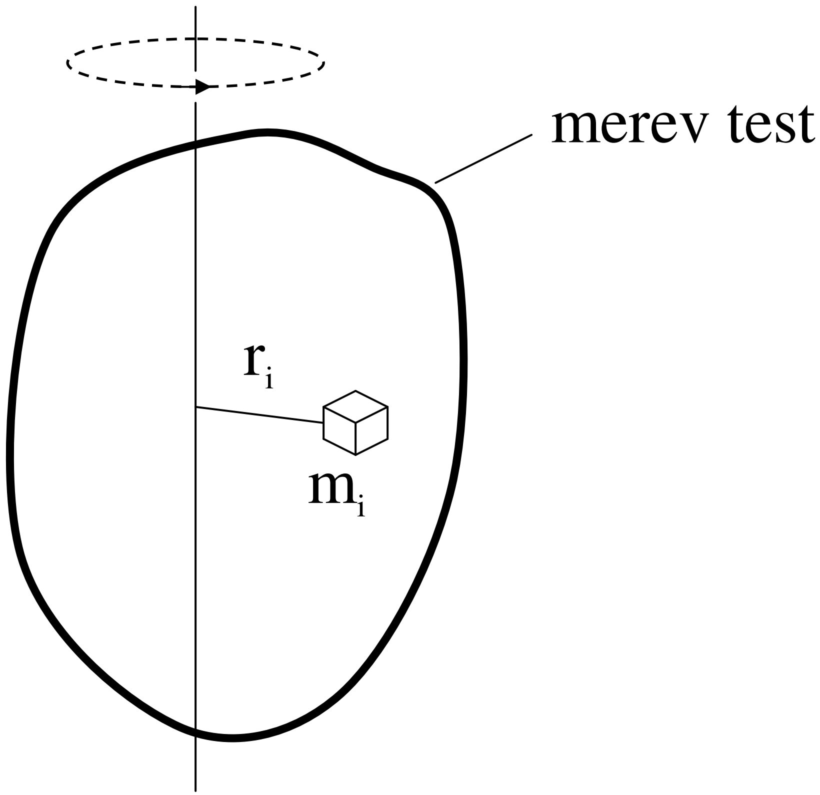
$$a_t = \beta R$$

$$M = \underbrace{mR^2}\beta$$

θ vagy I: tehetetlenségi nyomaték

$$\boxed{M = \Theta\beta}$$

$$\langle F = ma \rangle$$

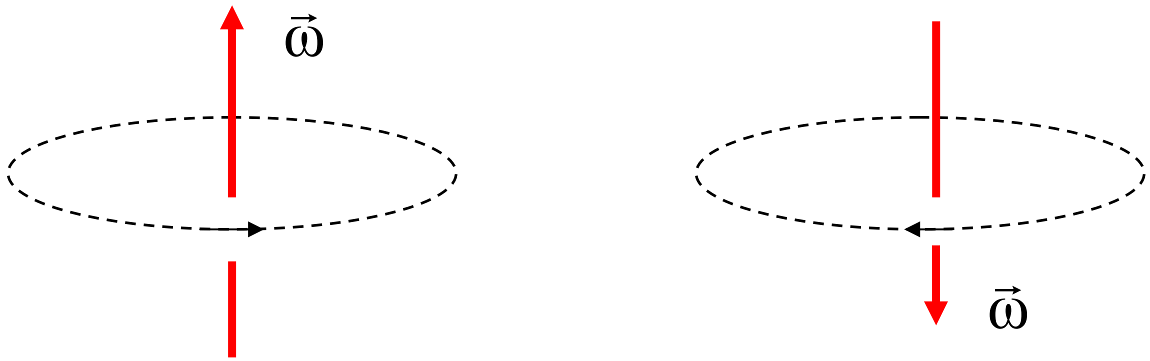


Tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2$$

Steiner tétel: $\Theta = \Theta_o + ms^2$

Irány:

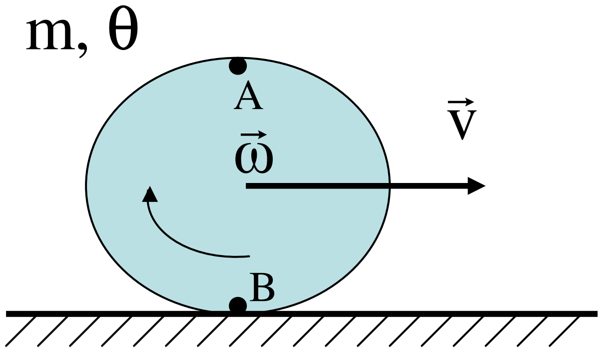


Mozgási energia: $E_k = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$

Munka: $W = M \cdot \varphi$ $\qquad W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi)d\varphi$

Pillanatnyi teljesítmény: $P = M \cdot \omega$

Gördülő mozgás



$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

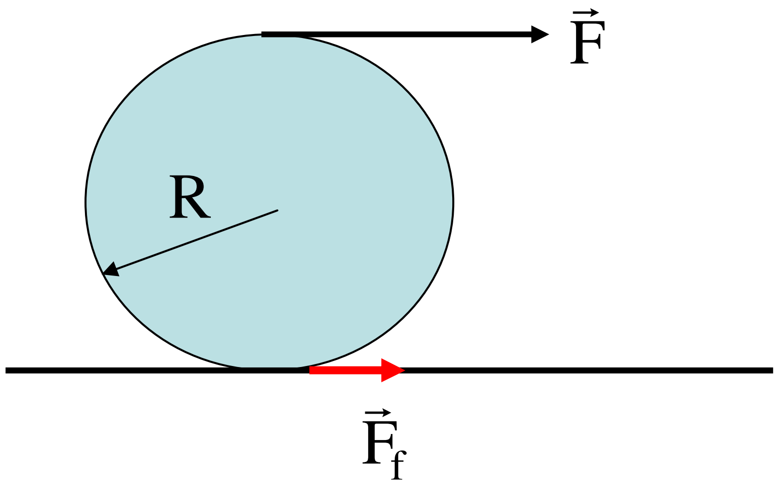
$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta}{R^2}\right)v^2$$

$v_B = 0$

$v_A = 2v$

Példa: tiszta gördülés



$$I. \quad F + F_f = ma$$

$$(M = \Theta\beta)$$

$$II. \quad (F - F_f)R = \Theta\beta = \Theta\frac{a}{R}$$

Tömör korong: $\Theta = \frac{1}{2}mR^2$

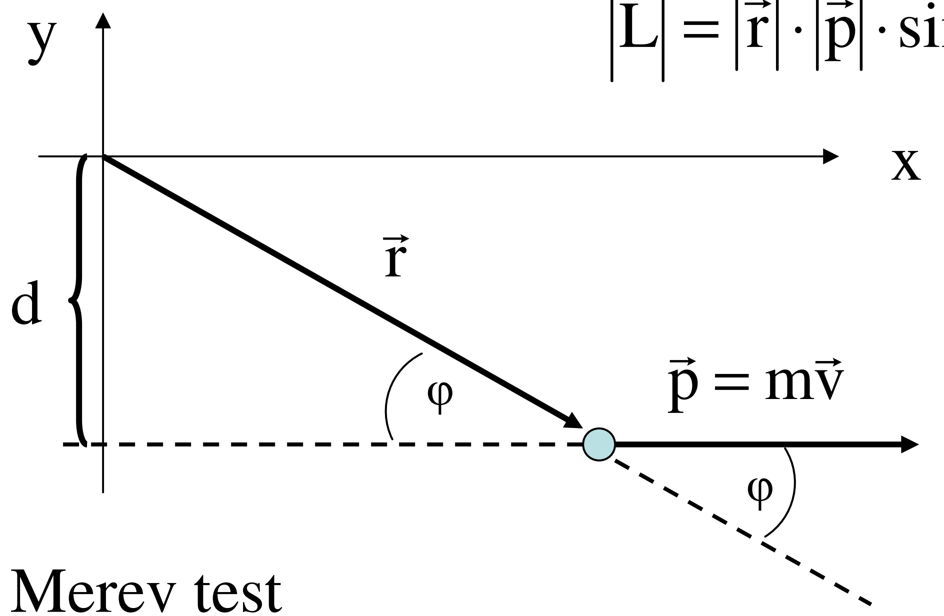
Súrlódási erő: $F_f \leq F_{f,\ \max.}$

$$a = \frac{4}{3}\frac{F}{m}$$

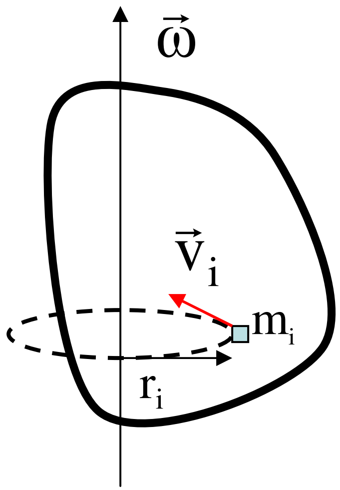
$$F_f = \frac{1}{3}F$$

Láttuk: impulzusmomentum v. perdület $\vec{N} = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{p}\right| \cdot \sin(\varphi) = \mathrm{mvr}\sin(\varphi) = \mathrm{mvd}$$



Merev test



$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega \qquad (v_i = \omega r_i)$$

$$L = \sum_i m_i v_i r_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \Theta\omega \qquad \Rightarrow \quad E_k = \frac{L^2}{2\Theta}$$

Impulzusmomentum megmaradás

$$M = \Theta\beta$$

$$\Downarrow$$

$$M = \Theta\beta = \Theta\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \Theta\frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Theta\omega_2 - \Theta\omega_1}{\Delta t} = \frac{L_2 - L_1}{\Delta t}$$

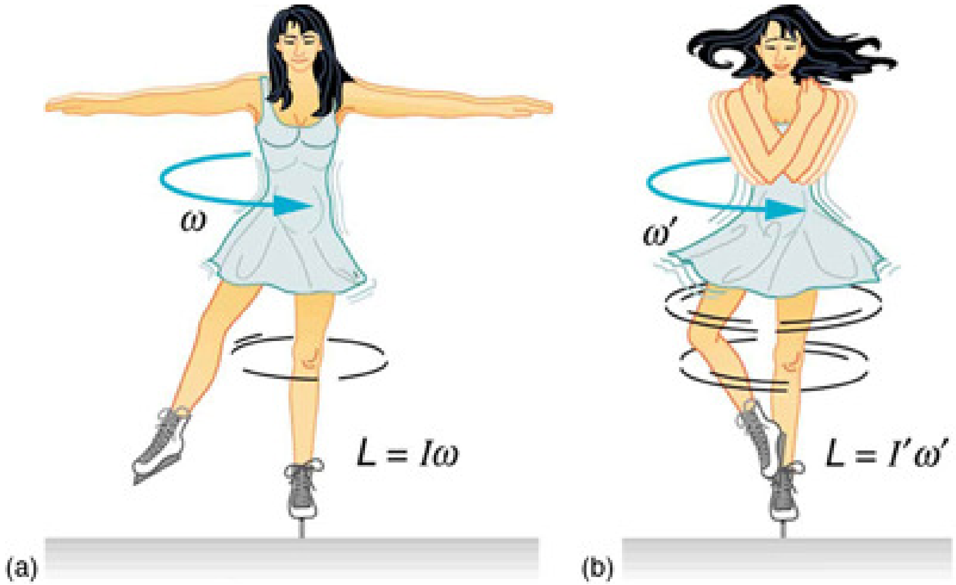
$$\Downarrow$$

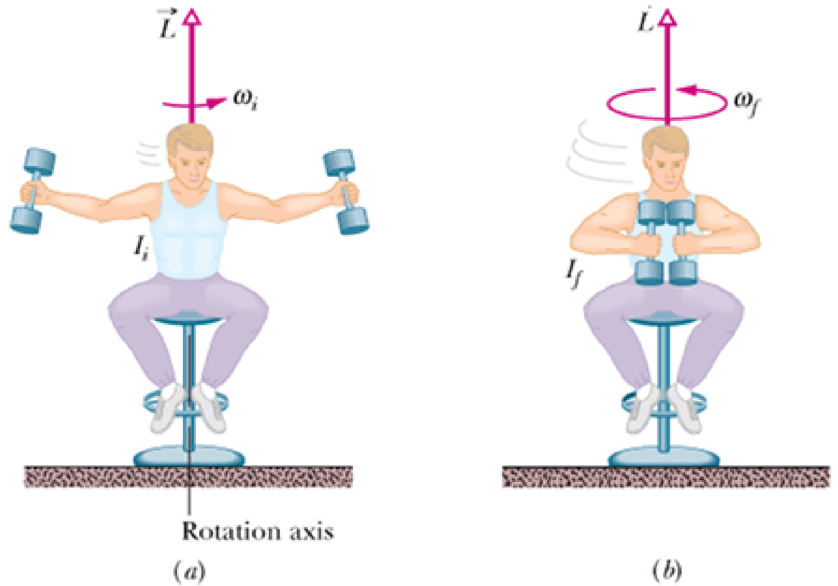
$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad M = \frac{dL}{dt} \quad \Rightarrow$$

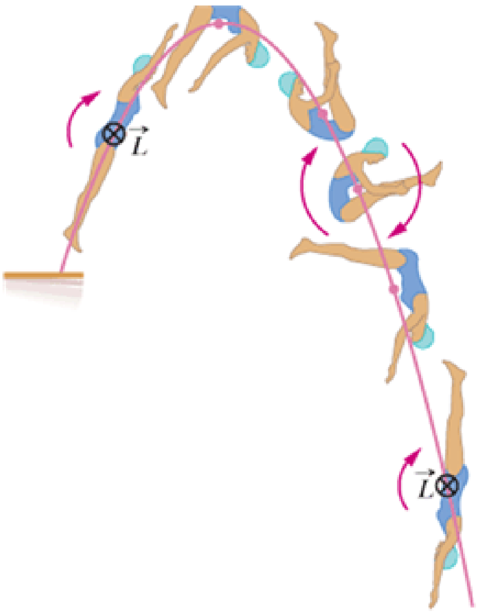
Perdület megmaradás:

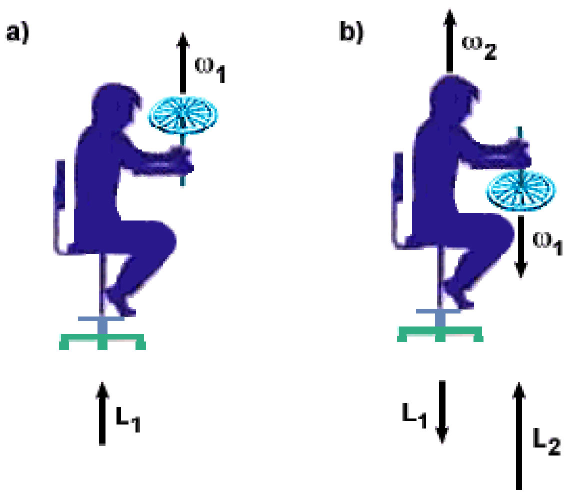
$$Ha \ \vec{M}_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const.$$

Impulzusmomentum megmaradás: példák

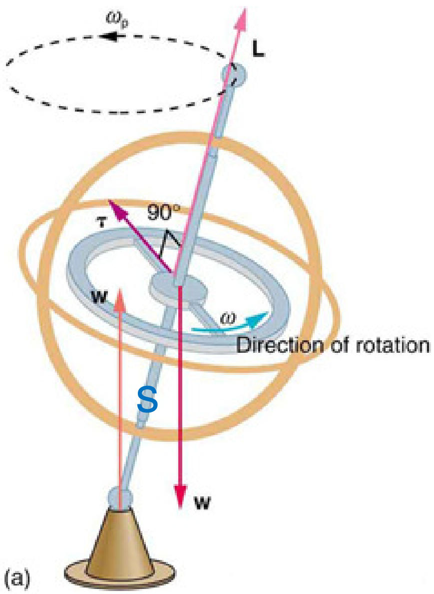


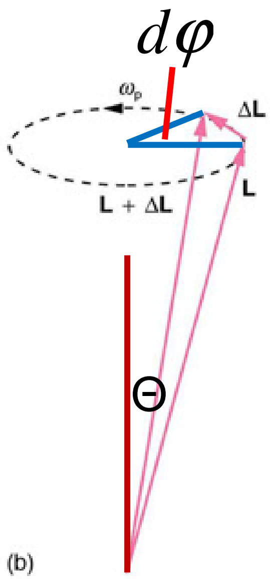


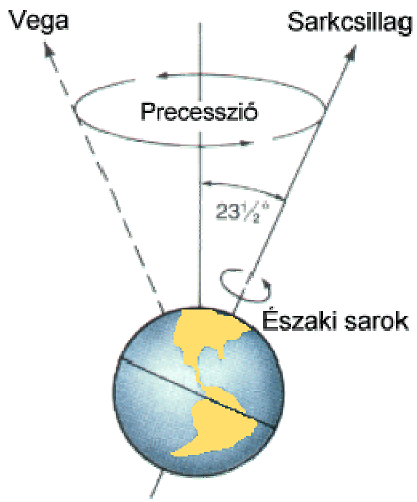


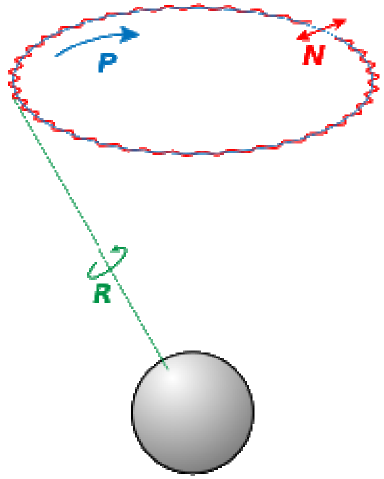


Precesszió

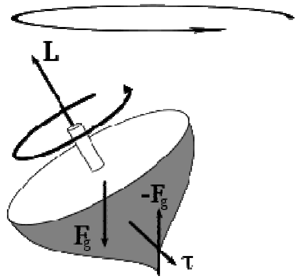








$$M = \frac{dL}{dt}$$



$$d\vec{L} = \vec{M}dt \qquad \left|\vec{M}\right| = mgs\sin\Theta$$

$$\left|d\vec{L}\right| = L\sin\Theta d\varphi = Mdt$$

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgs}{L}$$