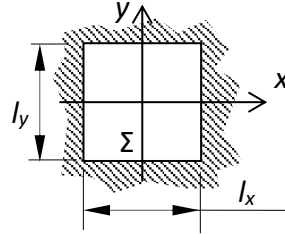


## 9. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2019-11-18

### Téglalapapertúra távoltéri fényeloszlásának meghatározása Fraunhofer-diffrakcióval



$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2+y'^2)}}{i \cdot \lambda z'} \iint_{\Sigma} E(x, y) \cdot e^{-i\frac{k}{z'}(x'x+y'y)} dx dy \quad (1)$$

$$E(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{l_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{l_y}\right) ; \quad \text{rect}(a) \equiv \begin{cases} 1 & \text{ha } |a| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ha } |a| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2+y'^2)}}{i \cdot \lambda z'} \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x+y'y)} dx dy \quad (3)$$

$$\int_{-l_x/2}^{l_x/2} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x)} dx = \left[ -\frac{z'}{ikx'} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x)} \right]_{-l_x/2}^{l_x/2} = -\frac{z'}{ikx'} \left[ e^{-i\frac{k}{z'}(x' \frac{l_x}{2})} - e^{+i\frac{k}{z'}(x' \frac{l_x}{2})} \right] =$$

$$= -\frac{z'}{ikx'} \left[ -2i \sin \frac{k}{z'} \left( x' \frac{l_x}{2} \right) \right] = \frac{2z'}{kx'} \left[ \sin \frac{kx'}{2z'} l_x \right] = \frac{l_x \lambda z'}{l_x \pi x'} \left[ \sin \frac{\pi x' l_x}{\lambda z'} \right] = l_x \text{sinc} \left( \frac{x' l_x}{\lambda z'} \right) \quad (4)$$

$$\text{sinc}(\xi) \equiv \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} ; \quad \xi \equiv \frac{x' l_x}{\lambda z'} \quad (5)$$

$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2+y'^2)}}{i \cdot \lambda z'} l_x l_y \text{sinc} \left( \frac{x' l_x}{\lambda z'} \right) \text{sinc} \left( \frac{y' l_y}{\lambda z'} \right) \quad (6)$$

$$I(x', y') = \frac{v\varepsilon}{2} \frac{1}{(\lambda z')^2} l_x^2 l_y^2 \text{sinc}^2 \left( \frac{x' l_x}{\lambda z'} \right) \text{sinc}^2 \left( \frac{y' l_y}{\lambda z'} \right) \quad (7)$$

Hol a minimumhely?

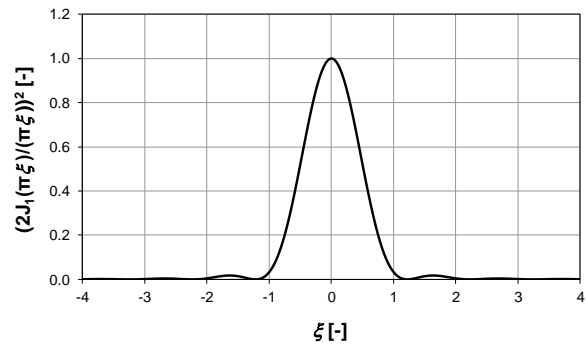
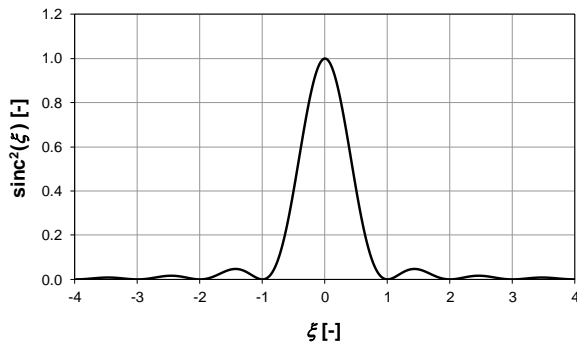
$$\pi \frac{x' l_x}{\lambda z'} = \pi \rightarrow \frac{x' l_x}{\lambda z'} = 1 \quad (8)$$

Nyquist-apertúra:

$$x_{\text{Nyquist}} \equiv x' = \frac{\lambda z'}{l_x} \quad (9)$$

Körpértúránál (Airy-rádiusz):

$$R_{\text{Airy}} \equiv r' = 1,22 \frac{\lambda z'}{D} ; \quad \xi \equiv \frac{r' D}{\lambda z'} \quad (10)$$



Pl. A projektorokban található térbeli fénymodulátor (Spatial Light Modulator – SLM) egy pixele ( $l_x = 7,6 \mu\text{m}$ ) mekkora területen világítja ki a vetítő objektívlencsét ( $f = 30 \text{ mm}$ ), ha  $\lambda = 550 \text{ nm}$ ? A lensét ideálisnak tekintjük, és kb. fókusztávolságnyira az SLM-től.

$$x_{Nyquist} = \frac{\lambda z'}{l_x} = \frac{0,550 \cdot 30}{7,6} = 2,17 \text{ mm} \quad (11)$$

### Távcső felbontóképessége, ld. előadásanyag

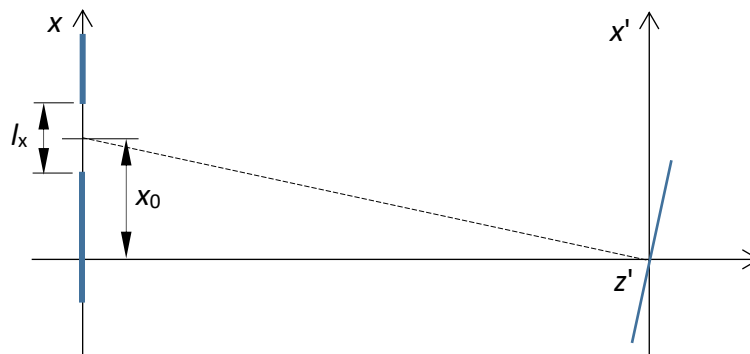
...

Pl. Very Large Telescope – VLT (ESO, paranal Observatory),  $D = 8,2 \text{ m}$ ,  $\lambda = 550 \text{ nm}$

$$\tan \theta' = \frac{r'}{z'} = \frac{R_{Airy}}{z'} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \approx \theta' = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ rad} \quad (12)$$

A Jupiter Európa holdjának látószöge:  $5,0 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ !

### Az optikai tengelytől eltolt téglalap apertúra távolterének modellezése



Legyen az eltolás mértéke  $x_0$ :  $E(x, y) \rightarrow E(x - x_0, y)$ . (4) alapján:

$$\begin{aligned} \int_{x_0 - l_x/2}^{x_0 + l_x/2} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x)} dx &= \left[ -\frac{z'}{ikx'} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x)} \right]_{x_0 - l_x/2}^{x_0 + l_x/2} = \\ &= -\frac{z'}{ikx'} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x_0)} \left[ e^{-i\frac{k}{z'}(x' \frac{l_x}{2})} - e^{+i\frac{k}{z'}(x' \frac{l_x}{2})} \right] = \\ &= e^{-i\frac{kx_0}{z'}x'} \cdot l_x \operatorname{sinc} \left( \frac{x' l_x}{\lambda z'} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

A kapott eredményben megjelent egy síkhullám, ami pontosan megfelel a Fourier-transzformáció eltolási tételének, ha a térfrekvencia értékét  $f_x = x'/(\lambda z')$ -nek vesszük. Az intenzitáseloszlásban a rés eltolása nem okoz változást.

## Két szimmetrikusan eltoló téglalap apertúra távolterének modellezése

Az eltolás legyen  $+x_0$  és  $-x_0$ :  $E(x, y) \rightarrow E(x - x_0, y) + E(x + x_0, y)$ . A számolásnak akkor van értelme, ha a rések nem fednek át, azaz  $x_0 \geq l_x/2$ . Ha  $l_y \gg l_x$ , akkor a struktúra egy dimenziósra tekinthető. (13) alapján:

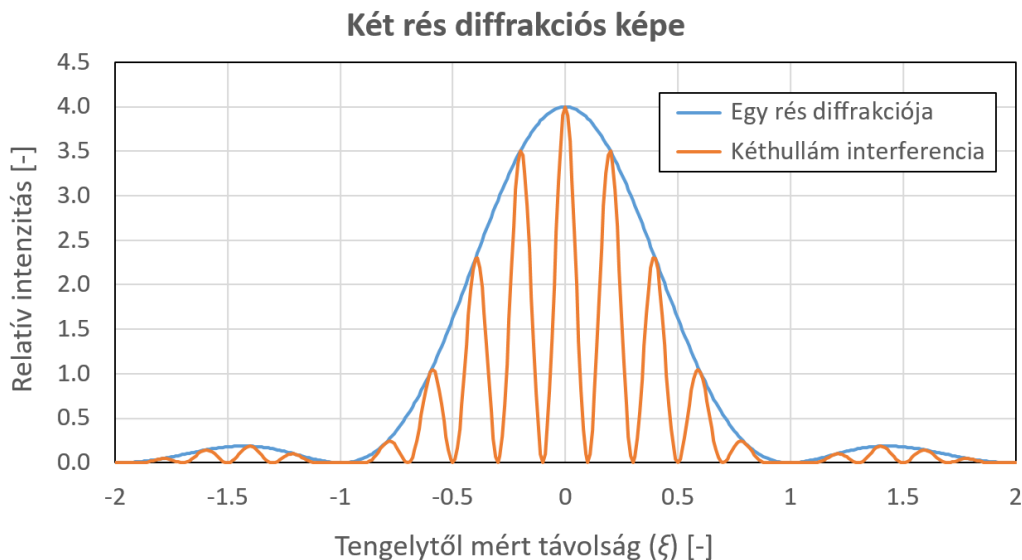
$$\int_{x_0-l_x/2}^{x_0+l_x/2} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x)} dx + \int_{-x_0-l_x/2}^{-x_0+l_x/2} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x)} dx =$$

$$\left( e^{-i\frac{kx_0}{z'}x'} + e^{+i\frac{kx_0}{z'}x'} \right) \cdot l_x \operatorname{sinc}\left(\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right) = 2 \cos\left(\frac{kx_0}{z'}x'\right) \cdot l_x \operatorname{sinc}\left(\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right) \quad (14)$$

A második rés hozzáadása tehát már megváltoztatja az intenzitáseloszlást is:

$$I(x', y') = \frac{v\varepsilon}{2} \frac{1}{(\lambda z')^2} l_x^2 l_y^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{y'l_y}{\lambda z'}\right) 4 \cos^2\left(\pi \frac{x'2x_0}{\lambda z'}\right) \quad (15)$$

Ahol  $2x_0 = d$ , a rések távolsága. A fenti összefüggés a Young-féle kétréses kísérlet skalár diffrakciós modellje.



$d/l_x = 5$ .

Pl. Helyezzünk el egy hajszál (vastagság  $50 \mu\text{m}$ ) egy  $150 \mu\text{m}$  keskeny, hosszú nyílás közepén, a hossziránnyal párhuzamosan. Az elrendezés optikai modellje két, egymástól  $d = 100 \mu\text{m}$ -re lévő,  $l_x = 50 \mu\text{m}$ -es rés. Mivel  $l_y \gg l_x$  a számolást egy dimenzióban végezzük,  $\lambda = 633 \text{ nm}$ . Hány zérushelye van az interferogrammnak az egy rés diffrakciós képének első zérushelyei között (azaz a kétszeres Nyquist-apertúrában)?

$$2x_{\text{Nyquist}} = 2 \frac{\lambda z'}{l_x} \quad (16)$$

$$\pi \frac{x'2x_0}{\lambda z'} = \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x' = \frac{\lambda z'}{2x_0} = \frac{\lambda z'}{d} \quad (17)$$

$$\frac{2x_{\text{Nyquist}}}{2x'} = \frac{2d}{l_x} = 4 \text{ db} \quad (18)$$

Mekkora az interferenciacsíkok távolsága egy  $z' = 200 \text{ mm}$  távolságban elhelyezett ernyőn?

$$2x' = \frac{\lambda z'}{d} = \frac{0,633 \cdot 200}{100} = 1,27 \text{ mm} \quad (19)$$

Az eredmények teljes összhangban vannak a kéthullám interferenciánál kapott kifejezéssel.