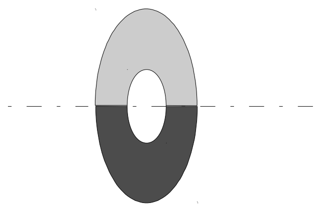
Kísérleti fizika gyakorlat 2 – 1. zh. 2018. március 12.

Név: Neptun kód:

A feladatok eredményét a kiírásban szereplő mennyiségekkel fejezd ki!

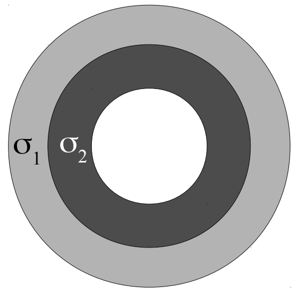
1. Egy szigetelő körgyűrű egyik felére ρ_1, másik felére ρ_2 homogén töltéssűrűséget viszünk fel az ábra szerint. A gyűrű belső sugara R_1, a külső sugara R_2.



a) Mekkora az elektromos térerősség vektor a gyűrű tengelye mentén, a gyűrű síkjától d távolságban? (6p)

b) Mekkora az elektromos potenciál a gyűrű tengelye mentén, a gyűrű síkjától d távolságban a végtelen távoli referencia ponthoz képest? (4p)

2. Két koncentrikus tökéletesen vezető henger közötti teret kitöltünk egy σ_1 és egy σ_2 vezetőképességű anyaggal az ábrán látható módon (keresztmetszeti kép). A belső és külső tökéletesen vezető henger sugara R_1 és R_2, a σ_1 és egy σ_2 vezetőképességű anyag közötti határfelület $(R_1 + R_2)/2$ pozícióban van. A hengerek hossza $l >> R_2$. A belső és külső vezető között I áramerősség folyik. (A vezetők relatív permittivitása 1-gyel közelíthető.)

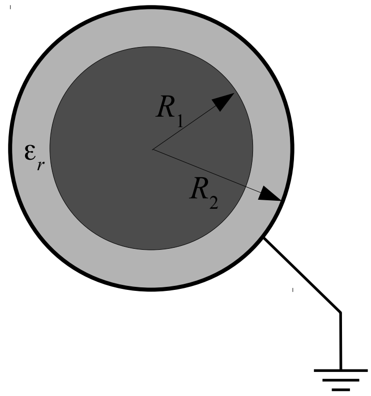


a) Mekkora töltés helyezkedik el a belső illetve külső lemezen? (3p)

b) Mekkora szabad töltés halmozódik fel a σ_1 és egy σ_2 vezetőképességű anyag közötti határfelületen? (3p)

c) Mekkora az elrendezés ellenállása? (3p)

3. Egyenletes ρ töltéssűrűségű, R_1 sugarú szigetelő gömböt koncentrikusan bevonunk ε_r relatív dielektromos állandójú dielektrikummal, majd R_2 sugarú vezető gömbhéjjal veszünk körül, melynek külső felületét leföldeljük. (A belső szigetelő gömb relatív permittivitása 1-gyel közelíthető.)



a) Határozza meg és ábrázolja az elektromos eltolás és térerősség vektorát a gömb középpontjától mért távolság függvényében! (4p)

b) Írja fel és ábrázolja a potenciált a gömb középpontjától mért távolság függvényében! (4p)

c) Számítsa ki az elrendezés elektromos energiáját! (3p)

4. Két hosszú, koaxiális a, ill. b sugarú, henger alakú vezető felületet ε_r relatív dielektromos állandójú, tengelyére merőleges felszínű folyékony dielektrikumba mártunk. A hengerek hossza H, a folyadék h magasságra emelkedik fel a lemezek között. A lemezeket U feszültségű telephez kapcsoljuk.

a) Mekkora így a kondenzátorban az elektromos eltolás és térerősség vektora a töltéssel (Q) kifejezve? (2p)

b) Mekkora a kondenzátor kapacitása és a tárolt elektrosztatikus energia? (3p)

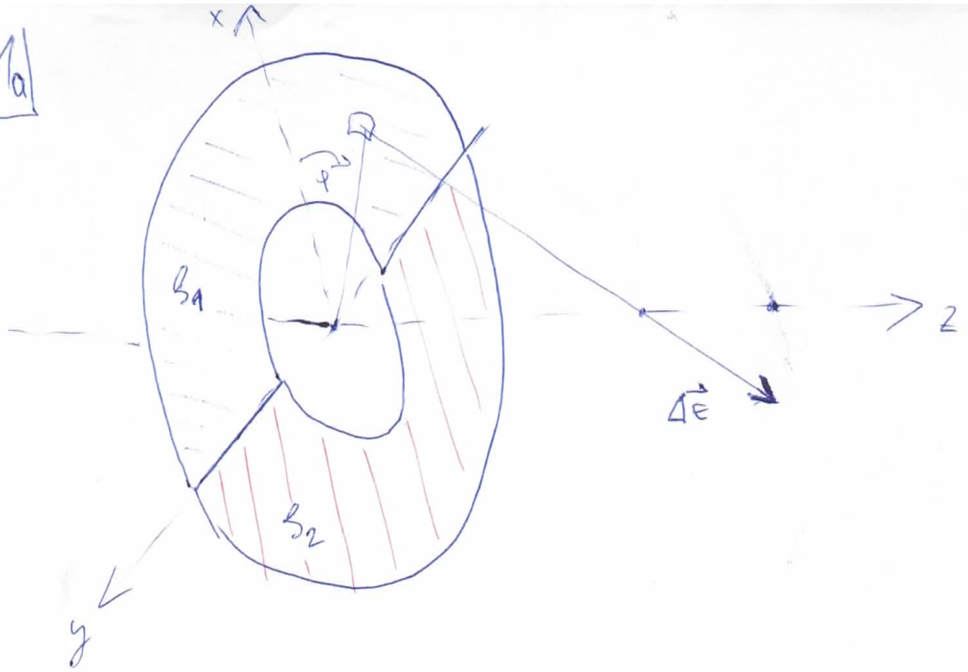
c) Feltételezve, hogy a kondenzátor feszültsége állandó marad, mekkora lesz a kondenzátor elektrosztatikus energiájának megváltozása, ha a folyadékszint kicsiny Δh-val növekszik? (1p)

d) Mekkora ΔQ töltés áramlott eközben a lemezek között? (1p)

e) Mekkora munkát végez a telep, ΔQ töltés átáramlása során? (1p)

f) Mekkora munkát végez a gravitációs erő a Δh emelkedés során? (2p)

1a



$$\frac{\Delta E_x}{\Delta E} = \cos\varphi \cdot \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}} \quad ; \quad \frac{\Delta E_y}{\Delta E} = \sin\varphi \cdot \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$\frac{\Delta E_z}{\Delta E} = \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}} \quad ; \quad |\Delta \vec{E}|_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varrho_{1,2}\, r \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta r}{r^2+z^2}$$

$E_y = \emptyset$ szimmetria miatt.

$$E_x = \frac{\varrho_1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi}_{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr + \frac{\varrho_2}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{+\pi/2}^{-\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi}_{-2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr =$$

$$= \frac{2(\varrho_1-\varrho_2)}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr = \frac{2(\varrho_1-\varrho_2)}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln\left(\sqrt{r^2+z^2}+r\right) - \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} \right]_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{2(\varrho_1-\varrho_2)}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln\left(\frac{\sqrt{R_2^2+z^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+z^2}+R_1} \right) - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+z^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} \right]$$

$$E_z = \frac{\varrho_1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{z r}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr + \frac{\varrho_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{+\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{z \cdot r}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr =$$

$$= \frac{\pi \cdot (\varrho_1+\varrho_2) z}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi(\varrho_1+\varrho_2) z}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}} \right]$$

$$\Delta U_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\delta_{1,2}\, r \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$U_1 = \frac{\delta_1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\delta_1 \cdot \pi}{4\pi\varepsilon_0} \left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\delta_1}{4\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+z^2} - \sqrt{R_1^2+z^2}\right]$$

$$U_2 = \frac{\delta_2}{4\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+z^2} - \sqrt{R_1^2+z^2}\right]$$

$$U = U_1 + U_2 = \frac{(\delta_1+\delta_2)}{4\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+z^2} - \sqrt{R_1^2+z^2}\right]$$

2)

Válasszunk egy képzeletbeli koncentrikus hengerfelületet és számoljuk ki a felületen áthaladó áramerősséget.

$$I = \int \vec{j}\, d\vec{A} = \int \sigma E \cdot dA = \sigma_2 \oint E\, dA = \sigma_2 \cdot \frac{Q_ö}{\varepsilon_0}$$

vagy

$$\sigma_1 \oint E\, dA = \sigma_1 \cdot \frac{Q'_ö}{\varepsilon_0}$$

A végeredmény az integrálási felülettől függ. Amennyiben a σ_2 vezetőképességű vezetőben integrálunk, a bezárt össztöltés csak az elektródán helyezkedik el. A σ_1 vezetőképességű anyagban a bezárt össztöltés egyrészt az elektródán, másrészt a σ_1 és σ_2 vezetőképességű anyag határán helyezkedik el.

a) $Q = Q_ö = \dfrac{I \cdot \varepsilon_0}{\sigma_2}$

b) $\Delta Q = Q'_ö - Q_ö = I \cdot \varepsilon_0 \left(\dfrac{1}{\sigma_1} - \dfrac{1}{\sigma_2} \right)$

c)
$$\left.\begin{aligned} E_2(r) &= \frac{Q_ö}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{1}{r} \\ E_1(r) &= \frac{Q'_ö}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{1}{r} \end{aligned}\right\} U = -\int_{R_1}^{\frac{R_1+R_2}{2}} E_2(r)\, dr - \int_{\frac{R_1+R_2}{2}}^{R_2} E_1(r)\, dr =$$

$$= -\frac{Q_ö}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_1+R_2}{2R_1}\right) - \frac{Q'_ö}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{2R_2}{R_1+R_2}\right) =$$

$$= -\frac{I}{2\pi l \sigma_2} \ln\left(\frac{R_1+R_2}{2R_1}\right) - \frac{I}{2\pi l \sigma_1} \ln\left(\frac{2R_2}{R_1+R_2}\right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi l} \left[\frac{\ln\left(\frac{R_1+R_2}{2R_1}\right)}{\sigma_2} + \frac{\ln\left(\frac{2R_2}{R_1+R_2}\right)}{\sigma_1} \right]$$

3.

a) Gauss-tétel a szigetelő gömbben:

$$4\pi r^2 D_1 = \frac{4\pi r^3}{3}\rho \to D_1 = \frac{\rho r}{3}$$

A dielektrikumban:

$$4\pi r^2 D_2 = \frac{4\pi R_1^3}{3}\rho \to D_2 = \frac{\rho R_1^3}{3r^2}$$

A fémben és azon kívül:

$$D_3 = 0$$

A térerősségek:

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, \qquad E_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}, \qquad E_3 = 0$$

b) A potenciálok:

$$\Phi_1 = \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}$$

$$\Phi_2 = -\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0\varepsilon_r r} + C,$$

A folytonosság feltételéből: $\Phi_1(R_1) = \Phi_2(R_1) \to C = \frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow$

$$\Phi_2 = \frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(1 - \frac{R_1}{r}\right)$$

$$\Phi_3 = \frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$$

c) A térenergia az energiasűrűség térfogatra vett integrálja:

$$W = \int_0^{R_1} 4\pi r^2\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2\right)dr + \int_{R_1}^{R_2} 4\pi r^2\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_2^2\right)dr = \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\int_0^{R_1} r^4 dr + \frac{2\pi\rho^2 R_1^6}{9\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{2\pi\rho^2 R_1^5}{9\varepsilon_0}\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{\varepsilon_r}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)\right]$$

4.

a) $\underline{E}$ folytonos →

$$D_1 = \varepsilon_0 E \ , \ D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

Felírva a Gauss-tételt:

$$2\pi r(L-h)D_1 + 2\pi r h D_2 = Q$$

Innen az elektromos térerősség és az eltolás a töltéssel kifejezve:

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L+(\varepsilon_r-1)h}\cdot\frac{1}{r}, \qquad D_1 = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{L+(\varepsilon_r-1)h}\cdot\frac{1}{r}, \qquad D_2 = \frac{Q}{2\pi}\frac{\varepsilon_r}{L+(\varepsilon_r-1)h}\cdot\frac{1}{r}$$

b) A fegyverzetek közti feszültség:

$$U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\ln\frac{b}{a}}{L+(\varepsilon_r-1)h}$$

A kondenzátor kapacitása:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\left[L+(\varepsilon_r-1)h\right]}{\ln\frac{b}{a}}$$

Az elektromos energia:

$$E_{kond} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}U^2\frac{2\pi\varepsilon_0\left[L+(\varepsilon_r-1)h\right]}{\ln\frac{b}{a}}$$

c)

$$\Delta E_{kond} = \frac{\partial E_{kond}}{\partial h}\Delta h = \frac{1}{2}U^2\frac{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}{\ln\frac{b}{a}}\Delta h$$

d)

$$\Delta Q = U\cdot\frac{\partial C}{\partial h}\Delta h = U\frac{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}{\ln\frac{b}{a}}\Delta h$$

e)

$$W_{telep} = \int (U\cdot I)dt = U\cdot\int I dt = U\Delta Q = U^2\frac{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}{\ln\frac{b}{a}}\Delta h$$

f)

$$W_{grav} = -mg\Delta h = -(b^2-a^2)\pi\rho_f g h\Delta h$$

Megjegyzés:

A munkatétel szerint:

$$\Delta E_{kond} = W_{telep} + W_{grav}$$

$$\frac{1}{2}U^2 \frac{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\ln\frac{b}{a}}\Delta h = U^2 \frac{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\ln\frac{b}{a}}\Delta h - (b^2 - a^2)\pi\rho_f g h \Delta h$$

Így a folyadék sűrűsége:

$$\rho_f = \frac{\pi\varepsilon_0}{gh\pi(b^2 - a^2)\ln\frac{b}{a}}(\varepsilon_r - 1)\cdot U^2$$