Fizika M1, BME, gépészmérnök szak, 2017. őszi félév (v11)

Pályi András[1]

[1] *Department of Physics, Budapest University of Technology and Economics, Hungary*

(Dated: November 13, 2017)

Ebben a fájlban az előadás menetrendjét követve gyűjtöm össze az egyes témakörökhöz kapcsolódó gyakorló feladatokat. A fájl hétről-hétre frissülni fog az adott hét feladataival. A zárthelyiken ehhez hasonló feladatok várhatók.

(F-0/1) Nagyon ritkán, de előfordul, hogy egy gépészhallgató készülés és tudás nélkül megy el a zárthelyire. A zárthelyin feleletválasztós tesztet kap, 20 kérdéssel, és minden kérdésre 4 lehetséges válaszlehetőség közül kell kiválasztania az egyetlen helyes választ. 7 helyes válasz még elégtelen, 8 helyes válasz már elégségest ér, azaz 40%-tól eredményes a zárthelyi. Csupán véletlenül tippelgetve mekkora a valószínűsége, hogy eredményes lesz a zárthelyije?

TERV: TÉMÁK, MENETREND

- **Mágneses rezonancia.** Klasszikus és kvantummechanikai leírás, orvosi képalkotás. (1.-3. előadás)
- **Elektronok.** Elektronállapotok atomokban és szilárdtestekben. Szigetelők, félvezetők, fémek. Elektromos vezetés. (4.-6. és 8. előadás)
- 1. zárthelyi (7. előadás)
- **Elektromechanika.** Elektromechanikai kölcsönhatási mechanizmusok. Szenzorok és aktuátorok. (9.-10. előadás)
- **Lézerek.** (11. előadás, Sarkadi Tamás)
- **Részecskefizika.** (12. előadás, Takács Gábor)
- 2. zárthelyi (13. előadás)

A KÉZZEL ÍRT JEGYZETEK HIBAJEGYZÉKE

4. előadás, 8. oldal utolsó képletének jobb oldalán:

$$n \mapsto n^2 \tag{1}$$

5. előadás, 1. oldal alja, hidrogénatom spektruma:

$$-\frac{1}{2}\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{n^2} \mapsto -\frac{1}{2}\frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \tag{2}$$

5. előadás, 4. oldal utolsó képlete, héliumatom spektruma:

$$-\frac{1}{2}\frac{m(2e^2)^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{n^2} \mapsto -\frac{1}{2}\frac{m_e(2e^2)^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \tag{3}$$

Továbbá, az elektron tömegét néhol m jelöli, néha m_e.

I. MÁGNESES REZONANCIA

A. Mágneses rezonancia képalkotás (MRI) dióhéjban

B. MRI egyetlen protonnal

(F-I/1) Az elektromágnesség klasszikus elméletében milyen objektumhoz rendelhetünk (nemnulla) mágneses dipólmomentumot (vagy rövidebben: mágneses momentumot)?

(F-I/2) 1 cm átmérőjű kör alakú drótban 1 mA áram folyik. Mekkora ennek a rendszernek a mágneses momentuma? Mekkora és milyen irányú mágneses teret kelt ez a köráram a vezető síkjában, a vezető középpontjától 1 méterre?

(F-I/3) Mekkora egy proton (hidrogén-atommag, H-atommag) mágneses dipólmomentuma?

(F-I/4) Mekkora (hány Tesla) mágneses teret kelt egy proton 1 méter távolságban? És 10 nanométer távolságban?

(F-I/5) Fejezd ki a Tesla mértékegységet SI alapegységekben!

(F-1/6) Nagyságrendileg mekkora a Föld mágneses tere a Föld felszínén?

(F-1/7) Mi a helyzeti energiája egy adott $\boldsymbol{B}$ mágneses térbe helyezett, adott irányban álló, adott nagyságú $\boldsymbol{m}$ mágneses momentumnak?

(F-1/8) Az origóban rögzítünk egy protont, és körbevesszük azt egy xy síkban fekvő, 1 m sugarú körvezetővel. 50 MHz frekvenciával megforgatjuk a protont úgy, hogy a mágneses momentuma az xz síkban forog. Mekkora amplitúdójú váltóáramú (ac) feszültséget indukál így a proton mágneses momentuma a körvezetőben?

(F-1/9) Becsüld meg, hogy hány darab H-atom van a testedben. A becsléshez hagyatkozz arra a tényre, hogy az emberi test kb. 70%-a víz.

C. Kibillentett mágneses momentum Larmor-precesszál

(F-I/10) Hány radián 30°? 45°? 60°? Hány fok 1 radián? $\pi/3$ radián? $\pi/2$ radián?

(F-I/11) Egy egységvektor polárszöge 30°, azimutszöge 45°. Határozd meg az egységvektor Descartes-koordinátáit, $(x, y, z) =$?

(F-I/12) Egy vektor Descartes-koordinátái $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (2, 1, 2)$. Határozd meg a gömbi polárkoordinátáit, $(r, \theta, \varphi) =$?

(F-I/13) Egy protont z-irányú, 1 Tesla nagyságú mágneses térbe helyezünk, és mágneses momentumát x irányba állítjuk a $t = 0$ időpillanatban, majd elengedjük. Másodpercenként hányszor fordul körbe a z tengely körül a mágneses momentum?

D. Rezonánsan gerjesztett mágneses momentum Rabi-oszcillál

(F-I/14) Mik a jellemzői (k hullámszám, ω körfrekvencia, f frekvencia, T periódusidő) a $\lambda = 540$ nm hullámhosszú zöld fénynek?

(F-I/15) Egy protont 1 Tesla mágneses térbe helyezünk. Mekkora a helyzetienergia-különbség a térrel ellentétesen álló és a tér irányába álló mágneses momentum között? Milyen hullámhosszú és frekvenciájú elektromágneses sugárzásnak felel meg ez az energiakülönbség? Azaz milyen hullámhosszú és frekvenciájú elektromágneses sugárzásnak van ugyanakkora energiakvantuma, mint ez az energiakülönbség?

(F-I/16) Egy protont z-irányú, 1 Tesla nagyságú sztatikus mágneses térbe helyezünk, úgy hogy mágneses dipólmomentuma párhuzamos a mágneses térrel. 1 millitesla amplitúdójú, x irányú ac mágnesestér-impulzussal gerjesztjük. Hogyan kell megválasztanunk a gerjesztő impulzus frekvenciáját, hogy a proton mágneses dipólmomentumát át tudjuk forgatni a sztatikus mágneses térrel átellenes irányba?

(F-I/17) Az előző elrendezésben mennyi ideig tartson a gerjesztő impulzus, hogy a proton mágneses momentumát éppen átforgassuk a sztatikus mágneses térrel átellenes irányba?

E. Mágnesestér-gradiens teszi lehetővé a képalkotást

F. Állapotjelzők és fizikai mennyiségek a klasszikus mechanikában: szabadon eső tömegpont

(F-I/18) Egy méter magasból elengedünk egy egykilós testet. Mennyi idő múlva ér földet? Mekkora sebességgel csapódik be?

(F-I/19) Az előző feladatban leírt jelenség esetén melyek a rendszer állapotjelzői? Ezek milyen függvények, azaz honnan hova képeznek? Melyek a rendszer paraméterei? Nevezz meg egy olyan fizikai mennyiséget, ami nem állapotjelző.

(F-I/20) Írd fel a fenti rendszer mozgásegyenleteit $\dot{x}(t) = ...$, $\dot{v}(t) = ...$ alakban. Add meg a kezdeti feltételeket is. Legyen a koordinátarendszer origója a földfelszínen, és az x tengely legyen felfelé irányítva.

(F-I/21) Tekintsünk egy adott m tömegű, egydimenziós mozgást végző tömegpontot. A t időpontban $x(t)$ a helykoordinátája, $v(t)$ a sebessége, és $F(t)$ erő hat rá. Add meg a tömegpont helykoordinátáját és sebességét infinitezimálisan rövid Δt idő múlva: $x(t + \Delta t) =$?, $v(t + \Delta t) =$?

(F-I/22) Egy k rugóállandójú rugóra rögzített m tömegű testet $F(t) = F_0 \sin(2\pi f t)$ erővel gerjesztünk. Írd fel a mozgásegyenleteket, $\dot{x}(t) = ...$, $\dot{v}(t) = ...$ alakban.

G. Állapotjelzők és fizikai mennyiségek a kvantummechanikában: Larmor-precesszáló mágneses momentum

(F-I/23) Egy protont sztatikus mágneses térbe helyezünk. A proton mágneses momentumának dinamikáját szeretnénk kvantummechanikailag leírni. Mi az állapotjelző a kvantummechanikai leírásban? Milyen függvény, azaz honnan hova képez? Mik a fizikai mennyiségek? Milyen függvények, honnan hova képeznek?

(F-I/24) Hogyan fejezhető ki a proton mágneses momentumának kvantummechanikai várhatóértéke a hullámfüggvény segítségével?

(F-I/25) Az alábbi hullámfüggvények jellemezhetik egy proton mágneses momentumának állapotát egy adott időpillanatban: $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\psi_5 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ezek közül mely hullámfüggvények normáltak, és mely hullámfüggvények nem normáltak?

(F-I/26) Számold ki ψ_1 és ψ_4 skalárszorzatát, $\langle \psi_1 | \psi_4 \rangle =?$

(F-I/27) Írd fel a három Pauli-mátrixot.

(F-I/28) Egy proton mágneses momentumát egy adott időpillanatban a $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hullámfüggvény jellemzi. Számold ki a mágneses momentum vektorának várhatóértékét, $\langle \hat{m}_x \rangle_\psi =?$, $\langle \hat{m}_y \rangle_\psi =?$, $\langle \hat{m}_z \rangle_\psi =?$ Ismételd meg a számolást a $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ hullámfüggvénnyel.

(F-I/29) A proton mágneses momentumát az $\hat{\boldsymbol{m}} = (\hat{m}_x, \hat{m}_y, \hat{m}_z) = \mu_p \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mu_p(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ operátor reprezentálja. A protont $\boldsymbol{B} = (B_0, 0, 0)$ mágneses térbe helyezzük. Írd fel a Hamilton-operátort és a hullámfüggvény $\psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}$ két komponensének mozgásegyenleteit (azaz az időfüggő Schrödinger-egyenletet).

H. Az energiasajátállapotok stacionáriusak

(F-I/30) A három Pauli-mátrix:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Határozd meg mindhárom Pauli-mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

(F-I/31) Egy protont z irányú, B_0 nagyságú mágneses térbe helyezünk. A proton mágneses momentumára vonatkozó Hamilton-operátor ekkor

$$\hat{H} = -\mu_p B_0 \hat{\sigma}_z. \tag{5}$$

Add meg a hullámfüggvény időfejlődését, $\psi(t) =?$, ha a kezdeti hullámfüggény $\psi(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(F-1/32) Egy protont x irányú, B_0 nagyságú mágneses térbe helyezünk. Add meg a Hamilton-operátor 2×2-es mátrixát. Írd fel az időfüggetlen Schrödinger-egyenletet. Határozd meg az alapállapot és a gerjesztett állapot hullámfüggvényét és energiasajátértékét. Ha a $t = 0$ időpillanatban az alapállapotban van a rendszer, akkor hogyan időfejlődik, $\psi(t) =?$ Számítsd ki a mágneses momentum z komponense várhatóértékének időfejlődését, $\langle \hat{m}_z \rangle_{\psi(t)} =?$.

I. A hőmérséklet növelésével nő a gerjesztett állapot betöltési valószínűsége

(F-I/33) Egy protont 1 Tesla mágneses térbe teszünk. Termikus egyensúlyban milyen valószínűséggel van alapállapotban, és milyen valószínűséggel van gerjesztett állapotban? Mekkora a mágneses momentumának termikus átlaga? Mekkora a termikus polarizációja, azaz a mágneses momentum termikus átlagának és hosszának (μ_p) aránya?

(F-I/34) Szobahőmérsékleten mekkora mágneses térbe kellene tenni a protont, hogy a termikus polarizációja 90%-os polarizációja legyen?

(F-I/35) Milyen hőmérsékletre kellene lehűteni egy 1 Tesla mágneses térbe helyezett protont, hogy termikus polarizációja 90%-os legyen?

(F-I/36) Az exponenciális függvény segítségével definiáld a trigonometrikus (sin, cos, tan, cot) és a hiperbolikus (sinh, cosh, tanh, coth) függvényeket.

(F-I/37) Mágneses rezonanciás képalkotás esetén ésszerű cél lehet egy 1 mm^3-es térbeli felbontás elérése szobahőmérsékleten. Becsüljük meg, hogy ehhez milyen nagyságrendű feszültséget kell mérni tudni, ha egy egyszerű, makroszkopikus körvezetőt használunk detektorként. Tegyük fel, hogy a vizsgált minta víz, ami az origóban elhelyezett $1\mathrm{mm} \times 1\mathrm{mm} \times 1\mathrm{mm}$ kockában található. A minta z-irányú, 1 Tesla nagyságú mágneses térben van, és a H-atommagok mágneses momentuma ekörül Larmor-precesszál. A detektor egy 5 cm sugarú körvezető, ami az yz síkkal párhuzamosan helyezkedik el, és középpontja az $\boldsymbol{r}_k = (10\mathrm{cm}, 0, 0)$ pontban van. (a) Rajzold le az elrendezést. (b) Mekkora a minta H-atommagjainak teljes mágneses momentuma termikus átlagának abszolútértéke? (c) Hogyan változik az időben a minta teljes mágneses momentumának vektora? (d) Becsüld meg, hogy a Larmor-precesszáló mágneses momentumok mekkora amplitúdójú váltófeszültséget indukálnak a detektorban.

II. ELEKTRONOK

A. Atomok abszorpciós színképe vonalas szerkezetet mutat

(F-II/1) A két elektronvoltos energiakvantummal rendelkező elektromágneses sugárzásnak mennyi a hullámhossza és a frekvenciája?

B. A klasszikus Rutherford-féle atommodell nem magyarázza a vonalas színképet

(F-II/2) Egy elektron a hidrogénatom klasszikus Rutherford-modelljének megfelelően körpályán mozog egy rögzítettnek tekintett proton körül. Tegyük fel, hogy a mozgás az xy síkban történik, és a pálya sugara $R = 0.2$ Å. Mekkora az elektron sebessége m/s egységekben? Hányadrésze ez a fénysebességnek? Mekkora és milyen irányú az elektron $\boldsymbol{L}$ perdülete (pontosabban perdület-vektora) SI egységekben, illetve $\hbar$ egységekben? Mekkora az elektron mozgási energiája elektronvoltban kifejezve? Mekkora az elektron helyzeti energiája elektronvoltban kifejezve?

(F-II/3) Tekintsük az előző feladatban vizsgált egyenletes körmozgást. Hogyan függ az elektron teljes energiája az $L = |\boldsymbol{L}|$ perdületétől?

C. A félklasszikus Bohr-modell megmagyarázza a vonalas színképet

(F-II/4) A félklasszikus Bohr-modell szerint milyen frekvenciájú és hullámhosszú elektromágneses sugárzást bocsát ki a hidrogénatom elektronja, amikor az első gerjesztett állapotból az alapállapotba relaxál?

D. A kvantummechanikai modell: az elektron Schrödinger-egyenlete

(F-II/5) Egy dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a klasszikus mechanika eszközeivel. Az elektron helyzeti energiájának helyfüggése $V(x) = -V_0 e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}$ alakú. Add meg az elektron teljes energiáját a sebessége (v) és a pozíciója (x) függvényeként. Fejezd ki ezt a teljes energiát az impulzusa (p) és a pozíciója függvényeként.

(F-II/6) Ha az előző példában az elektronról tudjuk, hogy kötött állapotban van, akkor mit tudunk a teljes energiájáról? Ha tudjuk, hogy szórási állapotban van, akkor mit tudunk a teljes energiájáról?

(F-II/7) Egy dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a kvantummechanika eszközeivel. Az elektron hullámfüggvénye honnan hova képez? Mi a dimenziója (mértékegysége) az argumentumainak és az értékének?

(F-II/8) Egy dimenzióban mozgó elektron hullámfüggvénye egy adott pillanatban

$$\psi(x) = \begin{cases} N \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \text{ha } 0 < x < L, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{6}$$

Normált-e a ψ hullámfüggvény, ha $N = 1$? Hogyan válasszuk N-t, hogy ψ normált legyen? Rajzold fel a normált hullámfüggvényt. Rajzold fel az elektron $|\psi(x)|^2$ megtalálási valószínűségét a pozíció függvényeként.

(F-II/9) Egy dimenzióban mozgó elektron hullámfüggvénye egy adott pillanatban

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \text{ha } 0 < x < L, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{7}$$

Ebben az állapotban mekkora a valószínűsége annak, hogy az elektront a $[0, L/4]$ szakaszon találjuk?

(F-II/10) Az előző ψ hullámfüggvénnyel jellemzett állapotban mennyi a pozíció várhatóértéke? Mennyi az impulzus várhatóértéke?

(F-II/11) Három dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a kvantummechanika eszköztárával. Az elektron hullámfüggvénye honnan hova képez? Mi a dimenziója (mértékegysége) az argumentumainak és az értékének?

(F-II/12) Írd fel a rögzített proton Coulomb-erőterében mozgó elektron időfüggetlen Schrödinger-egyenletét. Mik az ismeretlenek?

E. Elektronállapotok hidrogénatomban

(F-II/13) A hidrogénatomban levő egyetlen elektron kötési energiája az alapállapotban 1 Rydberg. Hány Rydberg a kötési energiája az elektronnak az első gerjesztett állapotban?

(F-II/14) Hányszorosan degenerált a hidrogénatom $n = 2$ főkvantumszámú nívója, a spin szabadsági fokot is figyelembe véve? Hányszorosan degenerált az $n = 3$ főkvantumszámú nívó?

(F-II/15) Vegyünk egy hidrogénatomot szobahőmérsékleten. A Boltzmann-elvet felhasználva becsüld meg, hogy mekkora valószínűséggel található az elektron az alapállapotban. Az egyszerűség kedvéért tétetezd fel, hogy csak az alapállapot (főkvantumszám: $n = 1$) és az első gerjesztett állapot (főkvantumszám: $n = 2$) elérhető az elektron számára.

F. Periódusos rendszer

(F-II/16) Hány Rydberg a kötési energiája az egyszeresen pozitívan töltött héliumion egyetlen elektronjának az alapállapotban és az első gerjesztett állapotban?

(F-II/17) Tekintsük a H, He, Li, Be, Ne atomok elektronrendszerét, és hanyagoljuk el az elektron-elektron-kölcsönhatást. Mindegyik atomra válaszoljuk meg a következő kérdéseket: Hányszorosan degenerált az atom alapállapota? Hány törzsi elektronnal, hány lezárt héjjal, és hány vegyértékelektronnal rendelkezik az atom? Mekkora (hány Rydberg) az alapállapoti kötési energia? Hányszorosan degenerált az első gerjesztett állapot? Mekkora (hány Rydberg) az első gerjesztett állapot kötési energiája?

G. Elektromos vezetés fémekben: a klasszikus Drude-modell

(F-II/18) A réz fajlagos ellenállása $\rho_{\mathrm{Cu}} \approx 17 \times 10^{-9}\ \Omega$ m. Mekkora a fajlagos vezetőképessége? Mekkora egy 1 m hosszú, 1 mm^2 átmérőjű rézdrót ellenállása és vezetőképessége?

(F-II/19) Egy adott típusú fém egyszerű köbös rácsban kristályosodik, melynek rácsállandója 2Å. Tegyük fel, hogy atomonként egyetlen elektron vesz részt a elektromos vezetésben; hívjuk ezeket *vezetési elektronoknak*. Mekkora a vezetési elektronok részecskesűrűsége (1/m^3 egységekben) és töltéssűrűsége (C/m^3 egységekben) ebben az anyagban? Hány vezetési elektron van egy ilyen anyagból készült, 1 m hosszú, 1 mm^2 átmérőjű drótban?

(F-II/20) Tekintsük az előző feladatban leírt fémet. Ha tudjuk róla, hogy a fajlagos vezetőképessége megegyezik a réz fajlagos vezetőképességével, akkor mennyi a vezetési elektronokat jellemző ütközési idő, $\tau =$? Használd a Drude-modellt.

(F-II/21) Mekkora áram folyik ebben a drótban, ha 1 mV feszültséget kapcsolunk a két vége közé? Mekkora a vezetési elektronok drift-sebessége ilyenkor?

(F-II/22) Az ekvipartíció tétele alapján adott T hőmérsékletű egyatomos ideális gázban a részecskék tipikus mozgási energiája nagyságrendileg $E_{\mathrm{mozg}} \approx k_B T$, ahol k_B a Boltzmann-állandó. Becsüld meg ebből a szobahőmérsékletű ideális elektrongáz elektronjainak tipikus sebességét.

H. Geometriai piezorezisztivitás

(F-II/23) Egy fémdarabot homogén izotrop módon összenyomunk, úgy hogy mindhárom iránybeli kiterjedése 1%-ot csökken. Nő vagy csökken az ellenállása az összenyomás hatására? Hány százalékkal? Válaszodat alapozd a geometriai Ohm-törvényre és a Drude-féle vezetőképesség-formulára.

I. A vezetési elektronok kvantummechanikai Sommerfeld-modellje

(F-II/24) Tekintsük az egydimenziós üresrács-modellt, elemi cellánként egyetlen atommal, legyen a rácsállandó 2 Å, és tegyük fel hogy minden atom egyetlen vezetési elektront ad. Hány vezetési elektron található egy 1 cm hosszú mintában? Ebben a mintában mekkora a hullámszám-kvantum, $\delta k =$? Mekkora a Fermi-hullámszám, $k_F =$? Mekkora a Fermi-hullámhossz, $\lambda_F =$? Mekkora a Fermi-sebesség, $v_F =$? Mekkora a Fermi-energia, $\varepsilon_F =$? (Vedd figyelembe az elektronok spin szabadsági fokát is.)

(F-II/25) Tegyük fel, hogy a fenti mintára külső elektromos teret kapcsolunk, melynek hatására a betöltött állapotok a hullámszámtérben eltolódnak, és így a $[-k_F + \Delta k, k_F + \Delta k]$ hullámszám-intervallumban helyezkednek el (az egyensúlyt jellemző $[-k_F, k_F]$ intervallum helyett). Tegyük fel hogy $\Delta k_F = 0.01 k_F$. Becsüld meg, hogy mekkora áram folyik a mintán.

J. Elektronok az egyatomos láncban

Emlékeztető: az "egyatomos lánc" azt jelenti, hogy egyfajta atomból áll a lánc, nem pedig azt, hogy egyetlen atomból.

(F-II/26) Legyen egy egyatomos lánc rácsállandója a, és az elektronok szomszédos atomok közti alagutazási mátrixeleme $t < 0$. Ábrázold az elektronok diszperziós relációját az első Brillouin-zónában. Az ábrán tüntesd fel a nevezetes tengelymetszeteket.

(F-II/27) Legyen egy egyatomos lánc rácsállandója $a = 2$ Å, és a szomszédos atomok közti alagutazási mátrixelem $t = -1\,\mathrm{eV}$. Rajzold fel az elektronok diszperziós relációját az első Brillouin-zónában. Jelöld a nevezetes tengelymetszeteket.

(F-II/28) Mekkora az elektronok effektív tömege a sáv alján az (F-II/27) példában?

(F-II/29) Mekkora a $k = 0$, $k = \pi/(2a)$, és a $k = \pi/a$ hullámszámú elektronok csoporsebessége az (F-II/27) példában?

(F-II/30) Add meg az általános formulát, ami kifejezi a sáv alját jellemző effektív tömeget az alagutazási mátrixelem és a rácsállandó függvényében. E formula alapján meg tudod-e mondani, hogy a rács összenyomása esetén az effektív tömeg nő vagy csökken?

(F-II/31) A fenti egyatomos láncban minden atom egy elektront ad a vizsgált vezetési sávba. Fém vagy szigetelő ez az anyag? Vedd figyelembe az elektronok spinjét is. Mekkora az elektronok Fermi-sebessége? Mekkora az elektronok Fermi-energiája (a sáv aljához viszonyítva)?

(F-II/32) Fém vagy szigetelő a fenti egydimenziós lánc, ha minden atom két elektront ad ad a vezetési sávba?

(F-II/33) Tekintsünk egy hat atomból álló egyatomos láncot, és az alagutazási mátrixelemet jelölje t. Írd fel a 2. atomra vonatkozó hullámfüggvény-amplitúdó időderiváltját tartalmazó mozgásegyenletet. Írd fel a 6. atomra vonatkozót is.

III. ELEKTROMECHANIKA

A. Piezorezisztivitás az egyatomos láncban

(F-III/1) Mi a mechanikai deformáció (ε) dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós modellekben?

(F-III/2) Mi a mechanikai feszültség (σ) dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós modellekben?

(F-III/3) Mi a részecskesűrűség dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós szilárdtest esetében?

(F-III/4) Mi az elektromos áramsűrűség dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós szilárdtest esetében?

(F-III/5) Mi a fajlagos vezetőképesség dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós szilárdtest esetében?

(F-III/6) Mi az elektromos ellenállás dimenziója (mértékegysége) egydimenziós/kétdimenziós/háromdimenziós minta esetében?

(F-III/7) Ha egy fémdrótot megnyújtunk (azaz ε mértékű longitudinális mechanikai deformációt alkalmazunk), akkor az ellenállása ennek hatására megváltozik, $R = R(\varepsilon)$. Kis deformáció esetén az ellenállásváltozás lineáris függvénye a deformációnak:

$$R(\varepsilon) = R(0)(1 + c\varepsilon), \tag{8}$$

ahol c a *(deformáció-alapú) longitudinális piezorezisztivitás*:

$$c = \frac{R(\varepsilon) - R(0)}{R(0)\varepsilon} \tag{9}$$

A klasszikus Drude-modellben kapott vezetőképesség-formula és a geometriai Ohm-törvény alapján mi c értéke? Mi az előjele? Hogyan függ az anyagi minőségtől? Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a relaxációs idő és a vezetési elektronok száma nem függ a deformációtól.

(F-III/8) Háromdimenziós vezető esetén a geometriai Ohm-törvény alakja $R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{A}$, ahol R a minta ellenállása, σ a minta anyagának fajlagos vezetőképessége, L a minta hossza, A a minta keresztmetszete. Hogy néz ki ez a geometriai Ohm-törvény, ha a vezetőnk egydimenziós, például egy egyatomos lánc?

(F-III/9) Tekintsük egy 1 cm hosszú egyatomos lánc vezetési elektronjait. Legyen a rácsállandó $a_0 = 2$ Å, és az alagutazási mátrixelem $t_0 = -1$ eV. Tegyük fel, hogy a vezetési sáv 5%-os betöltöttségű, és hogy $\varepsilon = 0.01$ deformáció esetén, azaz 1%-os megnyújtásra, az alagutazási mátrixelem 1%-ot csökken: $t(\varepsilon) = t_0(1 - \varepsilon)$. (a) Mekkora a vezetési elektronok sűrűsége ebben a láncban? (b) Mekkora ennek a láncnak az ellenállása, ha benne a relaxációs idő $\tau = 1\,\text{fs}$? (c) Hogyan változik a sáv alját jellemző effektív tömeg, ha 1%-kal megnyújtjuk a láncot? (d) Hogyan változik a lánc ellenállása, ha 1%-kal megnyújtjuk a láncot? (e) Mekkora ennek a láncnak a deformáció-alapú longitudinális piezorezisztivitása, azaz $c =$? A kérdések megválaszolásához használjuk a Drude-féle vezetőképesség formulát, a vákuumbeli elektrontömeget (m_e) helyettesítve a vezetési sáv alját jellemző effektív tömeggel (m^*). Itt is tegyük fel, hogy a relaxációs idő nem függ a deformációtól, és vegyük figyelembe hogy egydimenziós a modell.

(F-III/10) Általánosítsuk az előző feladatot: tegyük fel, hogy az alagutazási mátrixelem deformáció-függése $t(\varepsilon) = t(0)(1 - \beta\varepsilon)$ alakú. Nő vagy csökken a sáv alját jellemző effektív tömeg, ha nyújtuk a láncot? Nő vagy csökken az ellenállás, ha nyújtjuk a láncot?

(F-III/11) Egy donoratomokkal adalékolt félvezető anyag vezetési sávjának alján az elektronok effektív tömege 0.1 m_e, és az anyag dielektromos állandója $\epsilon_r = 10$. Hány rydberg, illetve hány eV távolságban vannak a donor-nívók a vezetési sáv aljától? Mekkora hőmérsékletnek felel meg ez az energia-távolság?

B. Tömegmérés gerjesztett-csillapított harmonikus oszcillátorral

(F-III/12) Egy k rugóállandójú ideális (nulla tömegű) rugó végén m tömegű pontszerű test helyezkedik el. Ezt a harmonikus oszcillátort $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ időfüggő erővel gerjesztjük, ahol F_0 a *gerjesztés erőssége* és ω a *gerjesztés körfrekvenciája.* A mozgást az $x(t)$ kitérés-idő függvény írja le; legyen x pozitív, ha a rugó megnyúlik, és negatív, ha a rugó összenyomódik. A test mozgását az $F_\text{s}(t) = -\alpha\dot{x}(t)$ súrlódási erő csillapítja, ahol α a *súrlódási együttható.* (a) Mi α dimenziója/mértékegysége? (b) Írd fel a test mozgásegyenletét. (c) Határozd meg a stacionárius állapotban kialakuló harmonikus rezgőmozgás amplitúdóját a k, m, α, F_0, ω paraméterek függvényeként. (d) Fejezd ki ezekkel a paraméterekkel a rendszer *rezonanciafrekvenciáját*, azaz azt a gerjesztési frekvenciát, ahol a rezgés amplitúdója maximális. (e) Fejezd ki ezt a maximális amplitúdót is, $A_\text{max} =$?

(F-III/13) Legyen a fenti rendszerben a rugóállandó $k = 65\,\text{kN/m}$, a tömeg $m = 1.6\,\text{mg}$, és a csillapítási paraméter $\alpha = 45\,\text{mg}\,\text{Hz}$. (a) Mekkora ennek az oszcillátornak a sajátfrekvenciája, $f_0 =$? (b) Mekkora a maximális rezgési amplitúdó, $A_\text{max} =$?, ha $F_0 = 1\,\mu\text{N}$? (c) Ábrázold az oszcillátor rezonanciagörbéjét, azaz az $A(f)/A_\text{max}$ függvényt. (d) Mekkora ennek a rezonanciagörbének a félértékszélessége, $\Delta f =$? (e) Mekkora ennek az oszcillátornak a *jósági tényezője*, $Q = \frac{f_0}{\Delta f} =$? (f) Mennyi idő alatt cseng le az oszcillátor rezgése, miután abbahagytuk a gerjesztését?

(F-III/14) Mennyivel változik a fenti rendszer sajátfrekvenciája, ha a testre ráragasztunk egy kis $\Delta m = 100$ ng extra tömeget?

(F-III/15) Tekintsük a fenti rendszert egy mérlegnek, vagy tömeg-szenzornak. A tömeg-szenzor *tömeg-felbontása* az a legkisebb Δm extra tömeg, amit a rezonanciagörbe megváltozása révén érzékelni tudunk. Egy lehetséges konkrét definíció a tömeg-felbontásra: az a legkisebb Δm extra tömeg, ami legalább akkora sajátfrekvencia-eltolódást okoz, mint az eredeti rezonanciagörbe félértékszélessége. Eszerint a definíció szerint mekkora a fenti rendszer tömeg-felbontása?

(F-III/16) Javul (csökken) a fenti mérleg tömeg-felbontása, ha növeljük az (a) α súrlódási együtthatót? (b) k rugóállandót? (c) m tömeget?

C. Piezoelektromosság

D. Elektronikus tömegmérés piezoelektromos hangvillával

(F-III/17) Piezoelektromos kvarc hangvillát kötünk egy elektromos áramkörbe. A vizsgált rezgési normálmódust jellemző paraméterek numerikus értékeit az (F-III/13) feladatban megadtuk. A rendszerre $U_0 = 1$ mV amplitúdójú váltófeszültséget adunk, és mérjük a válaszként az áramkörön átfolyó áramerősséget a gerjsztő frekvencia függvényében. Azt tapasztaljuk, hogy a maximális áram-amplitudú értéke $I_{\max} = 1\,\mu$A. Mekkora a rendszer piezoelektromos erősségét jellemző β paraméter értéke?

(F-III/18) Az előző feladatban kiszámolt β piezoelektromos erősséggel számolva adjuk meg a kvarc hangvilla áramköri helyettesítő képében szereplő effektív ellenállás (R), effektív induktivitás (L) és effektív kapacitás (C) numerikus értékét.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönet Fehér Titusznak, Fürjes Péternek, Halbritter Andrásnak, Mihály Györgynek, Orosz Lászlónak a tananyag összeállításában nyújtott segítségért.