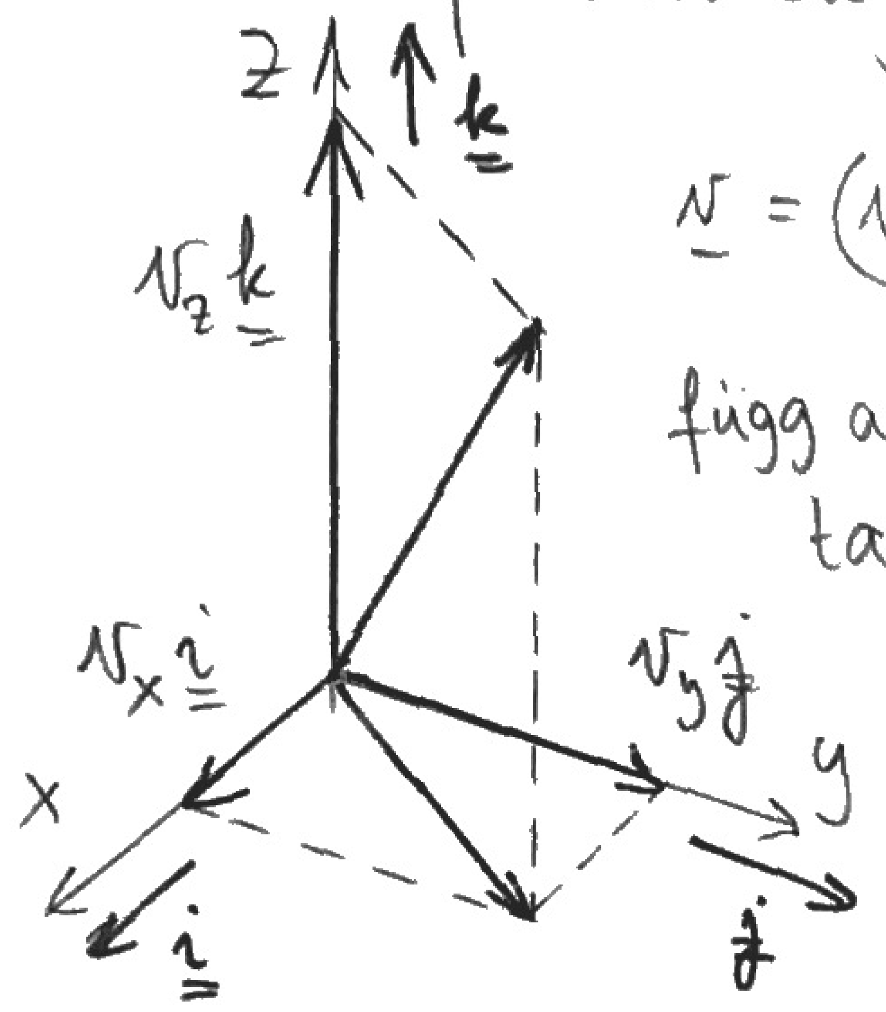
Ismétlés:

vektor: $\underline{\underline{v}}$, irányított szakasz

vektor reprezentációja: $\underline{v}$



$\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$

függ a koordináta-rendszertől!

$|\underline{\underline{i}}| = |\underline{\underline{j}}| = |\underline{\underline{k}}| = 1.$

I.) Műveletek vektorok reprezentációival

1.) Összeadás:

$$\underline{\underline{a}} = a_x\underline{\underline{i}} + a_y\underline{\underline{j}} + a_z\underline{\underline{k}}$$

$$\underline{\underline{b}} = b_x\underline{\underline{i}} + b_y\underline{\underline{j}} + b_z\underline{\underline{k}}$$

$$\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} = (a_x+b_x)\underline{\underline{i}} + (a_y+b_y)\underline{\underline{j}} + (a_z+b_z)\underline{\underline{k}}$$

reprezentációkra:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$$

megjegyzés: kivonásra ugyanez.

2.) Skalárral való szorzás:

$$\lambda\underline{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

3.) Skaláris szorzat:

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = (a_x\underline{\underline{i}} + a_y\underline{\underline{j}} + a_z\underline{\underline{k}})(b_x\underline{\underline{i}} + b_y\underline{\underline{j}} + b_z\underline{\underline{k}})$$

Használjuk a zárójel felbonthatóságát!

Mivel

$$\underline{\underline{i}}\,\underline{\underline{i}} = \underline{\underline{j}}\,\underline{\underline{j}} = \underline{\underline{k}}\,\underline{\underline{k}} = 1,$$

$$\underline{\underline{i}}\,\underline{\underline{j}} = \underline{\underline{i}}\,\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{j}}\,\underline{\underline{k}} = 0,$$

így

$$\boxed{\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = \underline{a}\,\underline{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}$$

vektorok reprezentációjuk

4.) Vektoriális szorzat:

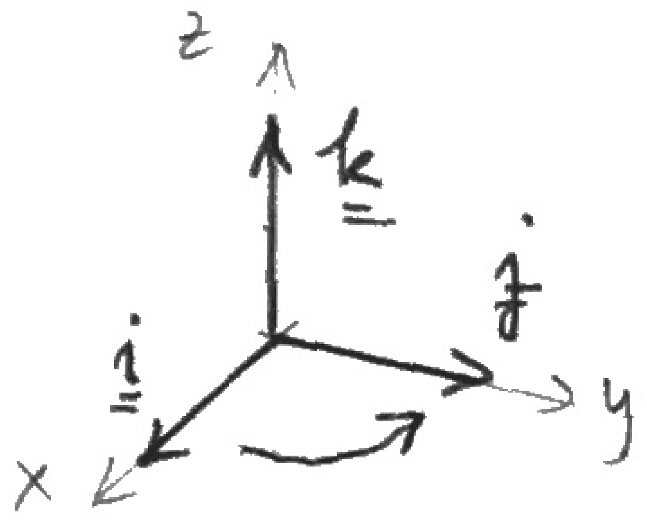
$$\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = (a_x\underline{\underline{i}} + a_y\underline{\underline{j}} + a_z\underline{\underline{k}}) \times (b_x\underline{\underline{i}} + b_y\underline{\underline{j}} + b_z\underline{\underline{k}})$$

A zárójel felbontható. Igazak a következők:

$\underline{\underline{i}} \times \underline{\underline{i}} = \emptyset$ $\quad \underline{\underline{i}} \times \underline{\underline{j}} = \underline{\underline{k}}$

$\underline{\underline{j}} \times \underline{\underline{j}} = \emptyset$ $\quad \underline{\underline{i}} \times \underline{\underline{k}} = -\underline{\underline{j}}$

$\underline{\underline{k}} \times \underline{\underline{k}} = \emptyset$ $\quad \underline{\underline{j}} \times \underline{\underline{k}} = \underline{\underline{i}}$



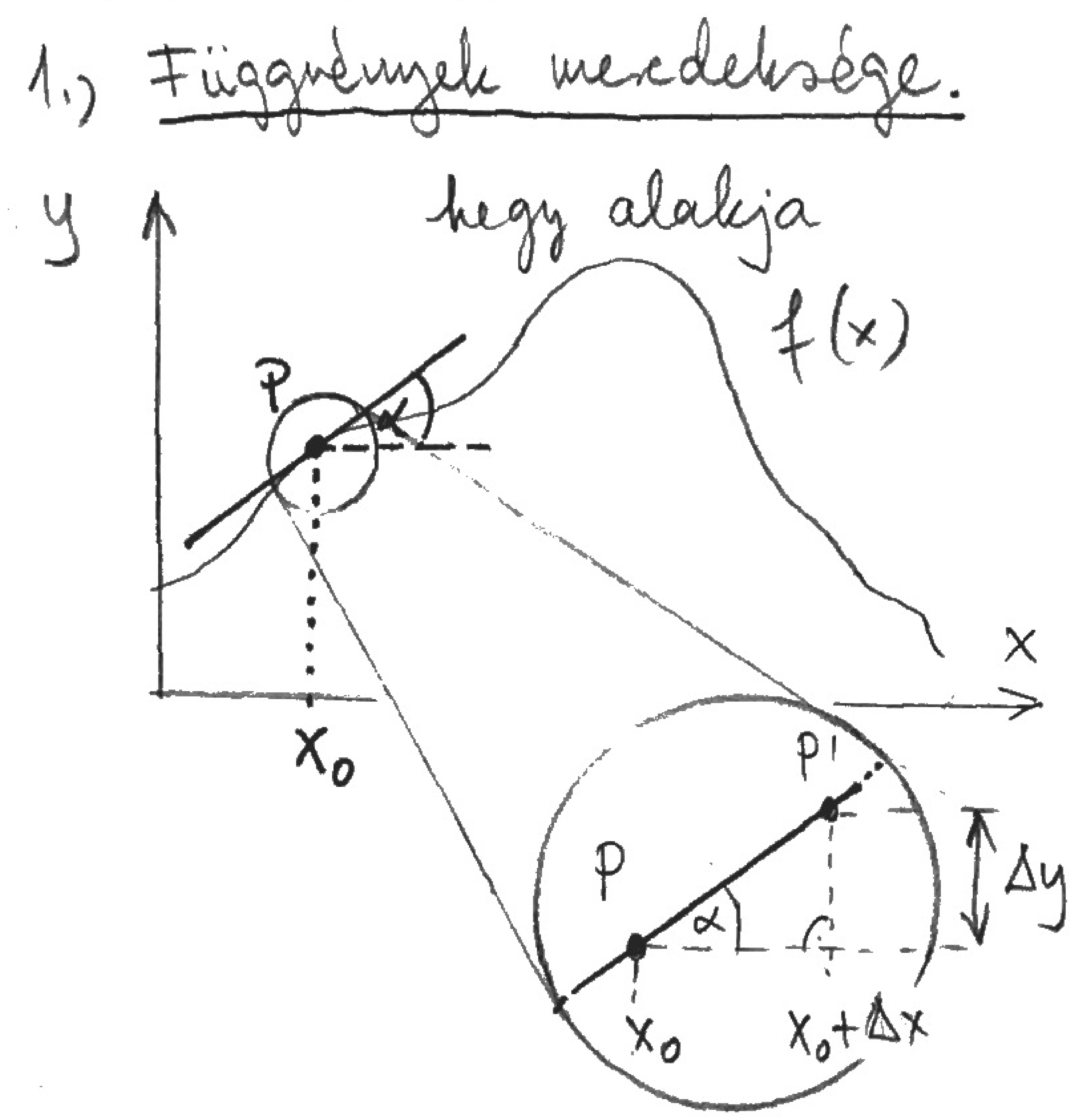
Ezzel:

$$\underline{a}\,\underline{b} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{j}} & \underline{\underline{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

determináns

II. Differenciálszámítás (deriválás).

1.) Függvények meredeksége.



Kérdés: Milyen meredek a hegy az x_0 helyen?

A választ megadhatjuk a P pontbeli érintő $\mathrm{tg}\,\alpha$ meredekségével:

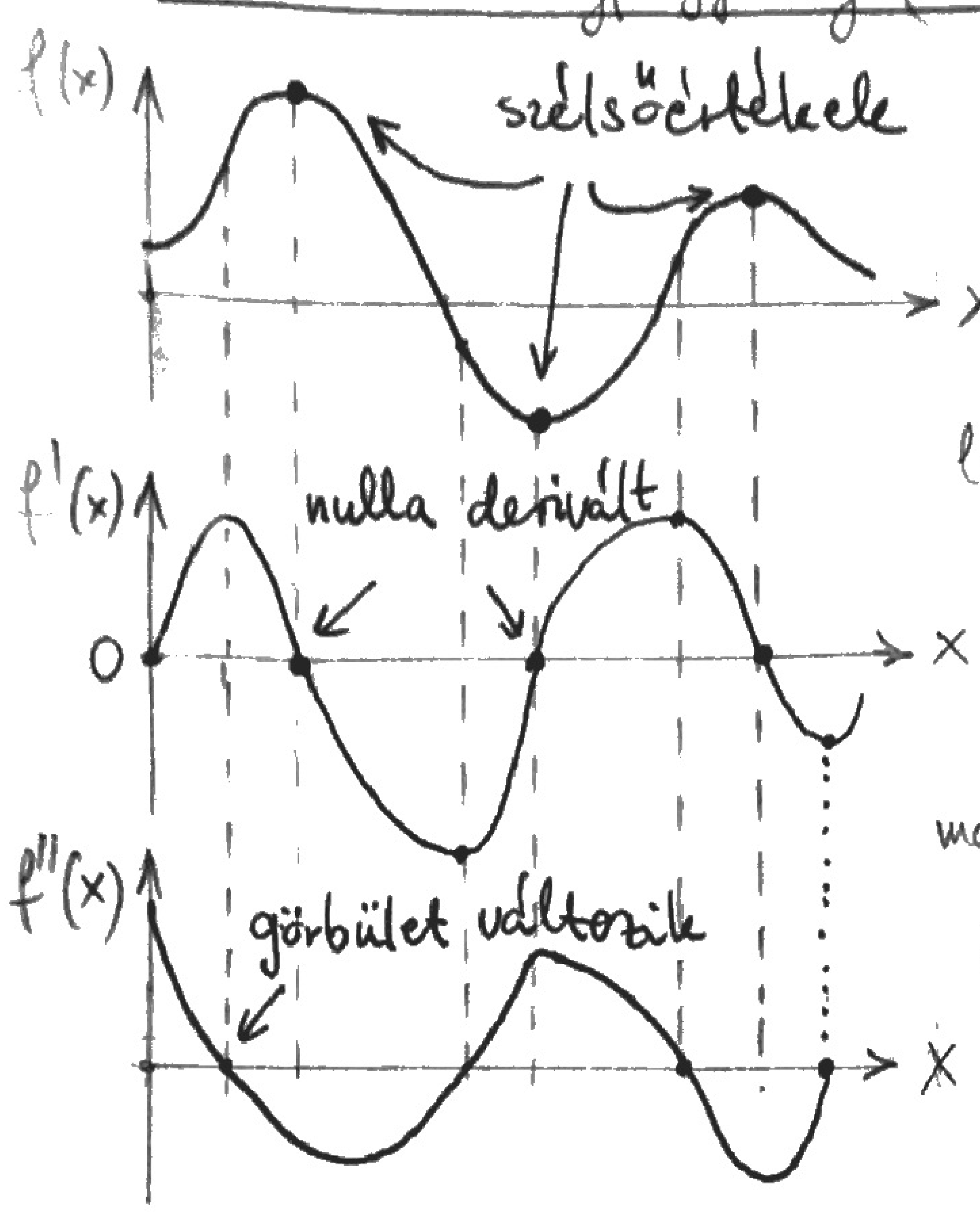
$$\mathrm{tg}\,\alpha\Big|_{x=x_0} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x=x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ha pontos értéket szeretnénk, Δx-et kell csökkenteni:

$$\mathrm{tg}\,\alpha\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \equiv f'(x_0)$$

(derivált)

2.) A meredekségfüggvény (deriváltfgv.)



lokális szélsőérték:

$$f'(x_0) = \emptyset$$

maximum: $f''(x_0) < 0$ minimum: $f''(x_0) > 0$

inflexiós pont: $f''(x_0) = \emptyset$.

3.) Elemi függvények deriváltja:

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \approx \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + n x^{n-1}\Delta x - x^n}{\Delta x}$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$1/\cos^2 x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$

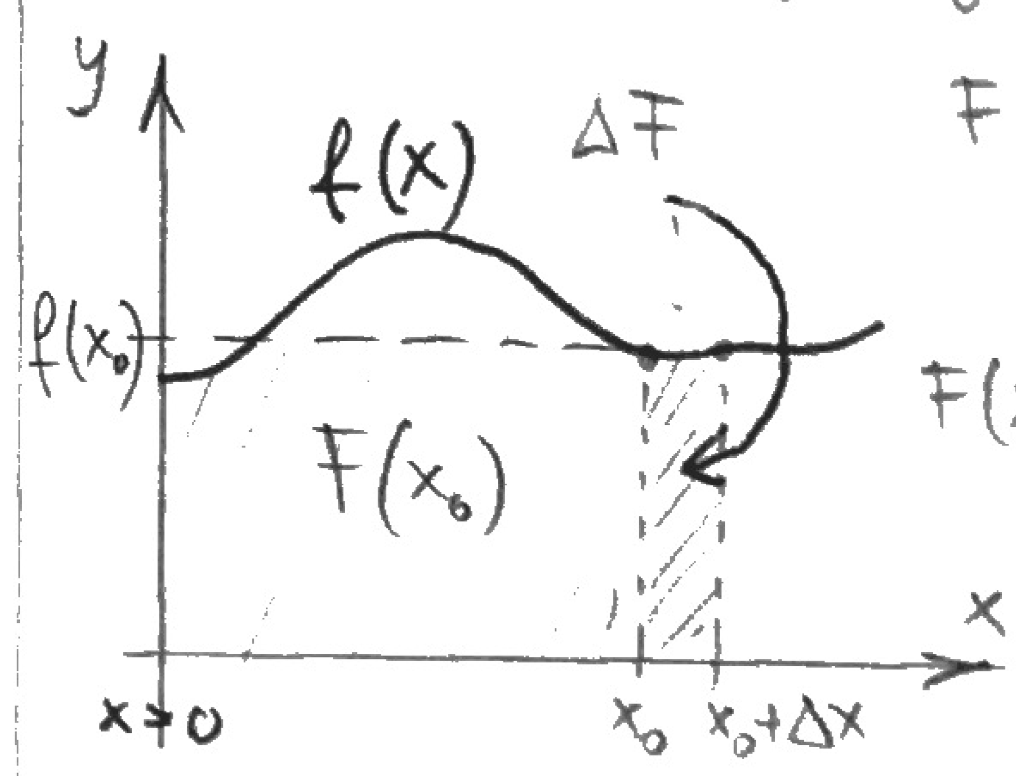
4.) Deriválási szabályok.

	$f(x)$	$f'(x)$
	$a\cdot f(x) + b g(x)$	$a f'(x) + b g'(x)$
	$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
	$f(k\cdot x)$	$k f'(kx)$
Lánc-szabály:	$f(g(x))$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$

példák: gyakorlaton

III. Integrálszámítás.

1.) A területfüggvény.



$F(x_0)$: a terület az $x=0$ és $x=x_0$ között

$F(x_0+\Delta x)$: terület az $x=0$ és $x=x_0+\Delta x$ között.

$$\Delta F = F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = \Delta x \cdot \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} \approx \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = F'(x_0) = f(x_0)$$

2.) A határozatlan integrál.

Az $F(x_0)$ területet az $f(x)$ függvényből a deriválás fordított műveletével kaphatjuk meg.

$$F(x) := \text{primitív függvény}$$

Adott $f(x)$-hez végtelen sok primitív fgv. tartozik, melyek csak egy konstansban térnek el, hiszen $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$

A primitív függvények összessége $f(x)$ határozatlan integrálja. Jelölése:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c},$$ itt $F'(x) = f(x)$

3.) A határozott integrál.

Mennyi a terület $x=a$ és $x=b$ között?

$$\text{terület} = F(b) - F(a)$$

terület $x=0$ és $x=a$ között

terület $x=0$ és $x=b$ között

Ezt az $f(x)$ függvény határozott integráljának nevezzük:

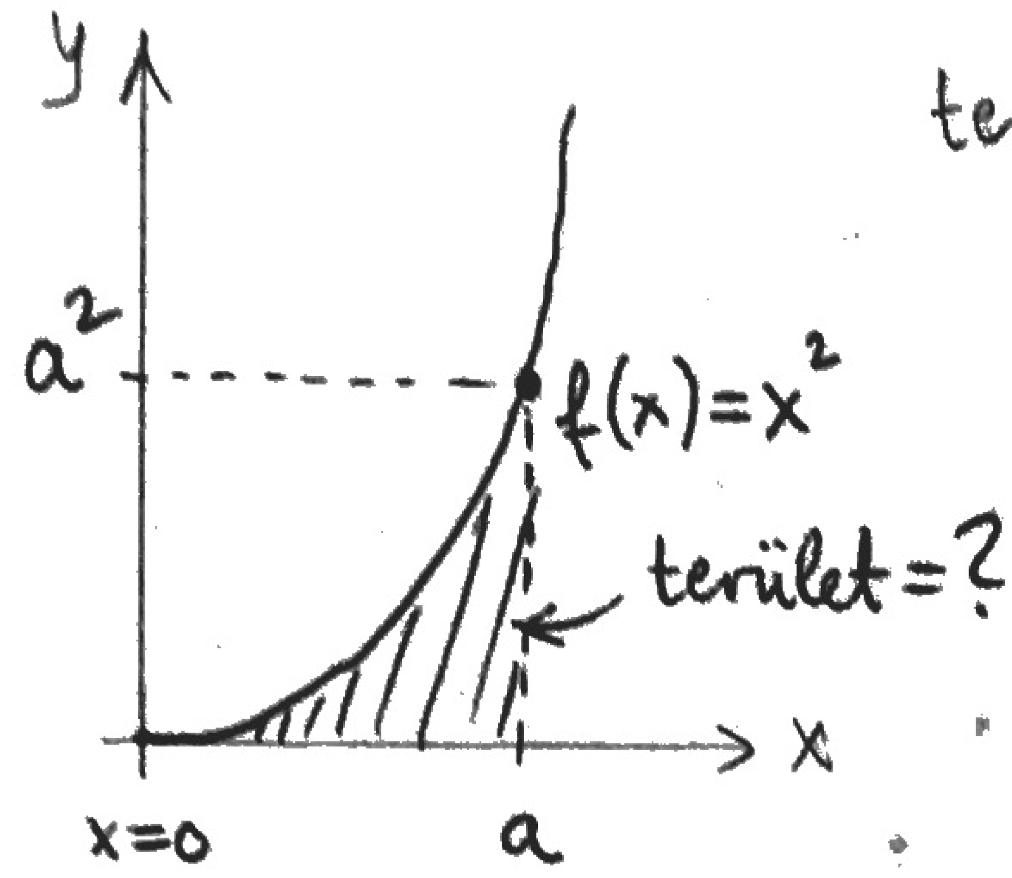
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

(Newton-Leibniz-tétel)

4.) Elemi függvények integrálja.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\mathrm{tg}\, x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$

5.) Példa.



$$\text{terület} = \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

Tehát terület $= \frac{a^3}{3}$,

ami éppen $1/3$-a a befoglaló téglalap területének.