

STATISZTIKUS OPTIKA – IDŐBELI KOHERENCIA

dr. Erdei Gábor, 2018-11-16

Bevezetés – a koherencia fogalmának kialakulása

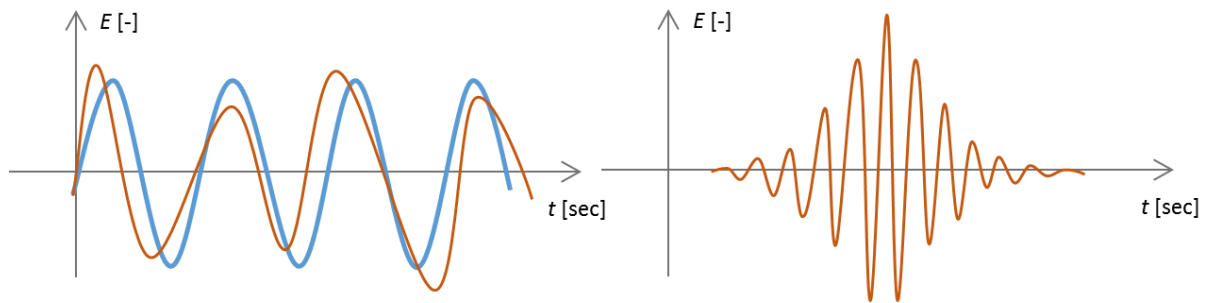
A 17. század második felétől egyre több megfigyelés jelezte, hogy a fényről alkotott addigi fogalmak nem teljesen felelnek meg a valóságnak. Grimaldi a geometriai úton nem leírható fényelhajlást fedezte fel árnyékok szélén. Az effektust „*diffraction*”-nak (széttöredezésnek) keresztelte el (magyarul fényelhajlásnak hívjuk), és a kialakuló mintázatokat az éter (a fényrészecskéket hordozó képzeletbeli közeg) hullámzásaival magyarázta. Mikroszkópos kísérleteivel Hooke a színpigmenteket nem tartalmazó tárgyak (pávatoll, kagylóhéj) színes, irányfüggő reflexióját vizsgálta (irizálás). A század végén Huygens elasztikus hullámok (pontosabban impulzusszerű zavarok) segítségével már le is tudta írni a fényelhajlás alaptulajdonságait. A 18. századi fejlődést nagyban gátolta ugyan Newton részecske-elmélete, de a nagy tudós akaratlanul is hozzájárult a hullámelmélet fejlődéséhez: ő jegyezte le elsőként a két üveglemez közötti vékony légrévben kialakuló periodikus mintázatot (Newton-gyűrűk, vékony lemezek és hárták színe), illetve felfedezte, hogy a fehér fény színek összegéből áll (a „*spectrum*” kifejezést is ő alkalmazta először a magyarul színeknek nevezett fogalomra). A 19. sz. elején Young a modern optika *hullámtani* alapjait fektette le a két résen áthaladó és vékonyrétegekről (pl. szappanbuborék) visszaverődő fény szokatlan viselkedésének magyarázatával. A tapasztalt hatásokat párhuzamba állította a víz- és hanghullámok egymást erősítő és gyengítő képességével, és az effektusra bevezette az *interferencia* fogalmát. Kétréses *hullámfrontosztó* interferométerének segítségével megállapította, hogy a réseket megvilágító fénynek *azonos forrásból* kell származnia azért, hogy az interferencia érzékelhető legyen. A jobb láthatóság érdekében a napfényt először egy kicsi lyukon engedte át, és az így kapott pontforrással világította meg az interferenciát létrehozó további két rést. A szín fogalmát ő kapcsolta először a fény, mint rezgés periodicitásához, interferencia-kísérletei segítségével meg is határozta az alapszínek hozzávetőleges *hullámhosszát*. A hullámelméletet végül Fresnel foglalta egységes keretbe 1817-ben.

Fraunhofer 1814-ben prizmás spektroszkóppal végzett vizsgálatai során fekete vonalakat fedezett fel a Nap színekében. Ezek magyarázatát 1861-ben adta meg Bunsen és Kirchhoff, miszerint az elemek rájuk jellemző *monokromatikus* (egyszínű) hullámokat nyelnek el és sugároznak ki (abszorpció, emisszió). A kémia hívó szavára egycsapásra beindult a színeképelemzés. 1862-ben Fizeau publikálta *amplitúdóosztó* interferométeres vizsgálatainak eredményét. Egyszínű, tehát adott hullámhosszúságúnak gondolt fényt vizsgált a róla elnevezett amplitúdóosztó kéthullámú interferométerben, ahol a fényforrás sárga nátriumláng volt (Na, D-vonal). A tudós azt tapasztalta, hogy az interferogram az úthosszkülönbség függvényében először szinte teljesen eltűnik, majd újból megjelenik. Igen helyesen azt a következtetést vonta le, hogy a látszólag egybefüggő D-vonal valójában két igen közeli, nagyjából azonos teljesítményű komponenset tartalmaz. (A kvantummechanikai atommodellnek megfelelően valóban ez a helyzet: a kérdéses spektrumvonalak a nátrium $3s \rightarrow 3p$ átmenet emissziójából erednek, ahol a p-állapotnak finomsztruktúrája van, azaz két közeli energiaszintet tartalmaz; a megfelelő hullámhosszak 589,0 és 589,6 nm.) Prizmás spektroszkóppal maga Fizeau is meggyőződött elmélete helyességéről. Tehát alig, hogy monokromatikusnak gondolt fényt kezdtek vizsgálni interferométerrel, kiderült, hogy az egyszínűnek látszó fény mégsem teljesen egy hullámhosszúságú, és az interferogram láthatósága függ a spektrum szélességétől.

1865-körül Verdet újragondolta Young kétréses kísérletét. Arra a kérdésre kereste a választ, hogy közvetlen (szűretlen) napfényt alkalmazva *milyen messzire* lehet egymástól a két rés, hogy még látható maradjon az interferencia. (Számításai alapján ez a távolság 20 μm -nek adódott.) 1868-ban Fizeau javasolt egy interferométeres elrendezést, amelynek a segítségével elvben távoli objektumok (bolygók, csillagok) látszólagos átmérőjét lehet meghatározni. Gondolatkísérletében egy távcső főtükkrét kimaszkolta, a fény csak két távoli nyíláson át érhetette el a fókuszot. A kialakuló interferenciamintázat láthatósága az objektum *méretétől* függ. Az elrendezést később Michelsonnak sikerült megvalósítania: csillagászati interferométerével először a Jupiter Galilei-holdjainak átmérőjét mérték meg 1891-ben. Ugyanettől az évtől publikálta a spektrumanalízis terén végzett kutatásának eredményeit Michelson: a róla elnevezett, 1880-ban feltalált interferométerrel számos elem színképének vonalait tanulmányozta, az interferogram *láthatóságát* vizsgálva az úthosszkülönbség függvényében (ez az alapja a mai interferencia v. Fourier-transzformációs spektroszkópiának). Kiderült, hogy az elemi spektrumvonalak nem végtelenül keskenyek, hanem a fényenergia folytonosan oszlik el egy kis hullámhossztartományon. Michelson meghatározta az összefüggést az interferogram láthatóság-úthosszkülönbség görbéje és a spektrum alakja között, ami nem más mint az (1830 körül Sturm és Liouville által megfogalmazott) *Fourier-transzformáció*. A Michelson által legmonokromatikusabbnak talált $\lambda_0 = 643,8$ nm-es kadmium vonal interferogramjának láthatósága kb. 15 cm-es úthosszkülönbségnél esik felére, ez alapján a spektrum szélessége: $\Delta\lambda_{\text{FWHM}} = 0,0013$ nm.

1907-ben Laue publikálta két fénynyaláb korrelációjával kapcsolatos kutatásainak eredményeit. Cikkében a korreláció számszerűsítésére bevezette a *koherencia* fogalmát (minél koherensebb a fény, annál inkább képes interferenciát létrehozni). Wiener, Schrödinger, van Cittert és Zernike kutatásai nyomán a koherencia fogalma pontosodott, szétvált a *térbeli*, és *időbeli* koherencia fogalma. Az előbbi Young kétréses kísérleteihez és Michelson csillagászati interferométeréhez, az utóbbi Fizeau és Michelson spektrális vizsgálataihoz kapcsolható. Amplitúdóosztó interferométerekben (pl. Michelson) az időkülönbséget (úthosszkülönbséget) változtatjuk és az interferogram láthatóságát figyeljük. A fény (Rømer 1675-ös mérései után ismert, később pontosított) sebességéből könnyen kiszámítható, hogy az adott láthatóság-csökkenéshez tartozó úthosszkülönbség megtételéhez mennyi idő szükséges. Ezt az időtartamot *koherenciaidőnek* nevezzük. A térbeli koherencia elméletének leírását Zernike alkotta meg 1939-ben, bevezetve többek között a jelenség mértékének számszerűsítésére alkalmazott *koherenciafokot*. (A teljesség kedvéért megemlítendő, hogy létezik még polarizációs koherencia is, melynek jellemzésére Wiener 1928-as publikációja óta a *koherenciamátrixot* használják.) A koherencia fontosságára Wolf hívta fel a figyelmet az ide vonatkozó elméletek rendszerezésével, összegzésével és továbbfejlesztésével a Born-Wolf: Principles of Optics 1959-ben megjelent első kiadásában.

A statisztikus függvényanalízis fejlődése nyomán az 1930-as évekre vált lehetővé az időbeli koherencia fizikai értelmezése és precíz leírása. Statisztikai szempontból egy jel (rezgés, hullám) tekinthető determinisztikusnak vagy indeterminisztikusnak. Az előbbiekre példa a lineáris rendszerek leírására kiválóan alkalmas harmonikus rezgés, amit optikában monokromatikus hullámnak nevezünk. Ilyen hullámmal elvileg végtelen úthosszkülönbség mellett is kapható interferencia, azaz a rezgés koherenciaideje végtelen (ld. kék görbe az alábbi ábrán). Indeterminisztikus jelet pl. úgy állíthatunk elő, ha végtelen sok, különböző frekvenciájú és véletlen kezdőfázisú harmonikus rezgést összegzünk (ld. narancs görbe).



Amennyiben a kezdőfázisok nem véletlenszerűek, hanem pl. azonosak, valamilyen impulzust fogunk kapni (ld. jobb oldali ábra). Bár az impulzusok önmagukban determinisztikusak, véges időtartamuk miatt az ennél nagyobb időkülönbségek esetén általában itt sem kapunk interferenciát. Az impulzusok tárgyalásától a továbbiakban eltekintünk.

Az indeterminisztikus rezgések egyik fontos jellemzője a *spektrális teljesítménysűrűség* (power spectral density), amely a különböző frekvenciák összegzése miatt nem lehet végtelenül keskeny függvény (Dirac- δ), azaz egy ilyen hullám nem tekinthető monokromatikusnak. További fontos statisztikus jellemző az *autokorrelációs függvény*, amely megmutatja, hogy a rezgés fázisállapota két, adott távolságra lévő időpillanat között mennyire korrelált, mennyire van összhangban (mennyire koherens). Ha a vizsgált intervallum szélessége zérus, akkor tökéletes a korreláció, az autokorrelációs függvény értéke maximális. Determinisztikus jeleknél (pl. monokromatikus rezgésnél) az autokorrelációs függvény értéke bármilyen széles időintervallumra konstans, indeterminisztikus jeleknél viszont fokozatosan nullára csökken. Egy interferogram láthatósága szoros kapcsolatban van a rezgés autokorrelációs függvényével. A spektrumvonalak vizsgálatakor Michelson arra jött rá, hogy indeterminisztikus jeleknél minél szélesebb frekvenciatartományra terjed ki a spektrális teljesítménysűrűség, annál keskenyebb az autokorrelációs függvény (és fordítva), tehát annál kisebb a koherencia idő, azaz a rezgés egyre kevésbé koherens. A matematikában, teljesen általános formában ezt az 1930-as években felírt Wiener-Khinchin-tétel fogalmazza meg: az autokorrelációs függvény és a spektrális teljesítménysűrűség egymásnak kölcsönös Fourier-transzformáltjai. A modern fizikának az az ága, amely indeterminisztikus fénysugárzások leírásával foglalkozik a *statisztikus optika*, melynek részletekbe menő taglalását Goodman: *Statistical Optics* c. monográfiájában találhatjuk meg.

Források: Born-Wolf: *Principles of Optics*; Klein-Furtak: *Optics*; Thomas Young: *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, Vol. I., 1807; Carlos R. Stroud Jr: *A jewel in the crown*, Univ. of Rochester, 2004; Saleh-Teich: *Fundamentals of Photonics*; wikipedia)

Kéthullámú interferencia két hullámhossz esetén

A továbbiakban két közel azonos irányba haladó, azonos polarizációjú síkhullám („a” és „b”) interferenciáját vizsgáljuk (tehát paraxiális skalár közelítésben), ugyanis ezen a példán keresztül lehet a legegyszerűbben megismerkedni az időbeli koherencia interferogramokra gyakorolt hatásával. Valós terminológiát használva az eredő intenzitás ekkor:

$$I(\mathbf{r}, T) = v \cdot \varepsilon \cdot \left\langle (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 \right\rangle = v \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 \cdot dt \quad (1)$$

Fizeau nyomán nézzük meg először két olyan hullám interferenciáját, amelyek két-két azonos körfrekvenciájú komponenst (ω_1 és ω_2) tartalmaznak:

$$E_a(t, \mathbf{r}) = A_1 \cdot \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_{a1} \mathbf{r} + \varphi_{a1}) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_{a2} \mathbf{r} + \varphi_{a2}) =$$

$$= A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \quad (2)$$

$$E_b(t, \mathbf{r}) = B_1 \cdot \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_{b1} \mathbf{r} + \varphi_{b1}) + B_2 \cdot \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_{b2} \mathbf{r} + \varphi_{b2}) =$$

$$= B_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) + B_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \quad (3)$$

Természetesen feltételezzük, hogy $\mathbf{k}_{a1} \parallel \mathbf{k}_{a2}$ és $\mathbf{k}_{b1} \parallel \mathbf{k}_{b2}$. A négyzetreemelését elvégezve:

$$(E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t))^2 =$$

$$= A_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) + A_1 A_2 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + A_1 B_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) + A_1 B_2 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) +$$

$$+ A_2 A_1 \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) + A_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + A_2 B_1 \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) + A_2 B_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) +$$

$$+ B_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) + B_1 A_2 \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + B_1 B_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) + B_1 B_2 \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) +$$

$$+ B_2 A_1 \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) + B_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + B_2 B_1 \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) + B_2 B_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \quad (4)$$

Ezután tagonként elvégezzük az időátlagolást (mivel az lineáris művelet). Először olyan rövid T -t választunk, hogy csak az EM tér 10^{14} Hz körüli rezgései átlagolódnak ki (mintha lenne egy gyors detektorunk, ami 10^{14} Hz alatt valamivel levág). A kifejezés azon tagjai, amelyekben a szorzattényezők *azonos argumentumú* koszinusz függvényt tartalmaznak konstans értéket vesznek fel, például:

$$\langle A_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \rangle = \frac{A_1 A_1}{2} \quad (5)$$

Azokat a tagokat, amelyek tényezői *különböző argumentumú* koszinusz függvényt tartalmaznak, az alábbi trigonometrikus azonosság segítségével bontjuk ketté:

$$2 \cos(a) \cos(b) \equiv \cos(a + b) + \cos(a - b). \quad (6)$$

Például:

$$A_1 A_2 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) = \frac{A_1 A_2}{2} [\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \Phi_{a1} + \Phi_{a2}) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{a1} - \Phi_{a2})] \quad (7)$$

Az ilyen tagok időátlagolásakor az összegfrekvenciás tag a nagy rezgésszám miatt mindig nullát eredményez. Ezek alapján (4)-ből a következő marad:

$$\langle (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 \rangle =$$

$$= \frac{A_1 A_1}{2} + \frac{A_1 A_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{a1} - \Phi_{a2}) + \frac{A_1 B_1}{2} \cos((\omega_1 - \omega_1)t + \Phi_{a1} - \Phi_{b1}) + \frac{A_1 B_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{a1} - \Phi_{b2}) +$$

$$+ \frac{A_2 A_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{a2} - \Phi_{a1}) + \frac{A_2 A_2}{2} + \frac{A_2 B_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{a2} - \Phi_{b1}) + \frac{A_2 B_2}{2} \cos((\omega_2 - \omega_2)t + \Phi_{a2} - \Phi_{b2}) +$$

$$+ \frac{B_1 A_1}{2} \cos((\omega_1 - \omega_1)t + \Phi_{b1} - \Phi_{a1}) + \frac{B_1 A_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{b1} - \Phi_{a2}) + \frac{B_1 B_1}{2} + \frac{B_1 B_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{b1} - \Phi_{b2}) +$$

$$+ \frac{B_2 A_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{b2} - \Phi_{a1}) + \frac{B_2 A_2}{2} \cos((\omega_2 - \omega_2)t + \Phi_{b2} - \Phi_{a2}) + \frac{B_2 B_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{b2} - \Phi_{b1}) + \frac{B_2 B_2}{2} \quad (8)$$

A kifejezést átrendezve:

$$\begin{aligned}
& \langle (E_a(\mathbf{r},t) + E_b(\mathbf{r},t))^2 \rangle = \\
& = \frac{A_1 A_1}{2} + \frac{A_2 A_2}{2} + \frac{B_1 B_1}{2} + \frac{B_2 B_2}{2} + \\
& + \frac{A_1 B_1}{2} \cos(\Phi_{a1} - \Phi_{b1}) + \frac{A_2 B_2}{2} \cos(\Phi_{a2} - \Phi_{b2}) + \frac{B_1 A_1}{2} \cos(\Phi_{b1} - \Phi_{a1}) + \frac{B_2 A_2}{2} \cos(\Phi_{b2} - \Phi_{a2}) + \\
& + \frac{A_1 A_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{a1} - \Phi_{a2}) + \frac{A_1 B_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{a1} - \Phi_{b2}) + \\
& + \frac{A_2 A_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{a2} - \Phi_{a1}) + \frac{A_2 B_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{a2} - \Phi_{b1}) + \\
& + \frac{B_1 A_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{b1} - \Phi_{a2}) + \frac{B_1 B_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{b1} - \Phi_{b2}) + \\
& + \frac{B_2 A_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{b2} - \Phi_{a1}) + \frac{B_2 B_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{b2} - \Phi_{b1})
\end{aligned} \tag{9}$$

A valóságban ω_1 és ω_2 általában olyan nagy, hogy detektoraink még a különbségi frekvenciás rezgést sem tudják lekövetni. Pl. a Fizeau 1862-es kísérletében alkalmazott nátrium D-vonal hullámhosszai 589,0 és 589,6 nm, aminél $\omega_1 - \omega_2 = 3,3 \cdot 10^{12}$ Hz. Tehát azt lehet mondani, hogy méréseink során minden időfüggő tag kiátlagolódik. Ez alól egymódusú lézerek lehetnek kivételek, ahol a frekvenciasávszélesség 1-10 MHz. Megfelelő sávszélességű detektorral elvileg ilyen esetekben kimutatható a fent leírt nagyfrekvenciás lebegés. A (9) kifejezésből további átrendezés után ez marad:

$$\begin{aligned}
& \langle (E_a(\mathbf{r},t) + E_b(\mathbf{r},t))^2 \rangle = \\
& = \left[\frac{A_1 A_1}{2} + \frac{B_1 B_1}{2} + A_1 B_1 \cos(\varphi_{a1} - \varphi_{b1}) \right] + \left[\frac{A_2 A_2}{2} + \frac{B_2 B_2}{2} + A_2 B_2 \cos(\varphi_{a2} - \varphi_{b2}) \right]
\end{aligned} \tag{10}$$

ahol kihasználtuk, hogy a koszinusz páros függvény, emiatt az argumentuma anélkül szorozható -1 -el, hogy az értéke megváltozna, és kifejtettük Φ -t. Itt most az egyszerűség kedvéért két teljesen azonos irányba haladó síkhullámot tekintünk, emiatt a helyfüggő tag kiesett, de általános esetben $\Phi(\mathbf{r})$ helyfüggő. Az eredmény értelmezése az, hogy „a” és „b” hullám szuperponálásakor csak az *azonos körfrekvenciájú* (hullámhosszú) komponensek hoznak létre interferenciát, és az így kapott interferogrammok *intenzitása összegezhető*. Mivel azonos hullámhosszú, konstans kezdőfázisú fénysugárzást csak azonos forrásból származó fény kettéosztásával tudunk megvalósítani, feltételezhető, hogy az A és B amplitudók arányosak egymással. Tehát az általánosság elvesztése nélkül írhatjuk, hogy:

$$B_1 = p \cdot A_1 \quad ; \quad B_2 = p \cdot A_2 , \tag{11}$$

ahol „ p ” konstans arányossági tényező. Ezzel (10) így alakul:

$$\langle (E_a(\mathbf{r},t) + E_b(\mathbf{r},t))^2 \rangle = A_1 A_1 \left[\frac{1}{2} + \frac{p^2}{2} + p \cdot \cos(\varphi_{a1} - \varphi_{b1}) \right] + A_2 A_2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{p^2}{2} + p \cdot \cos(\varphi_{a2} - \varphi_{b2}) \right] \tag{12}$$

Az általánosságot némileg korlátozva tegyük fel, hogy a két interferáló fénynyaláb azonos amplitudójú, azaz $p = 1$. Ezzel:

$$\langle (E_a(\mathbf{r},t) + E_b(\mathbf{r},t))^2 \rangle = A_1 A_1 \cdot (1 + \cos(\varphi_{a1} - \varphi_{b1})) + A_2 A_2 \cdot (1 + \cos(\varphi_{a2} - \varphi_{b2})), \tag{13}$$

illetve az átlagintenzitások:

$$I_{a,1} = I_{b,1} = \langle I_{a,1}(\mathbf{r}, t) \rangle = v \cdot \varepsilon \cdot \langle (A_1 \cdot \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r} + \varphi_{a1}))^2 \rangle = v \cdot \varepsilon \cdot \frac{A_1^2}{2} \equiv I_1 \quad (14)$$

$$I_{a,2} = I_{b,2} = \langle I_{a,2}(\mathbf{r}, t) \rangle = v \cdot \varepsilon \cdot \langle (A_2 \cdot \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r} + \varphi_{a2}))^2 \rangle = v \cdot \varepsilon \cdot \frac{A_2^2}{2} \equiv I_2 \quad (15)$$

Ezzel az eredő intenzitás:

$$I = 2I_1(1 + \cos(\varphi_{a1} - \varphi_{b1})) + 2I_2(1 + \cos(\varphi_{a2} - \varphi_{b2})), \quad (16)$$

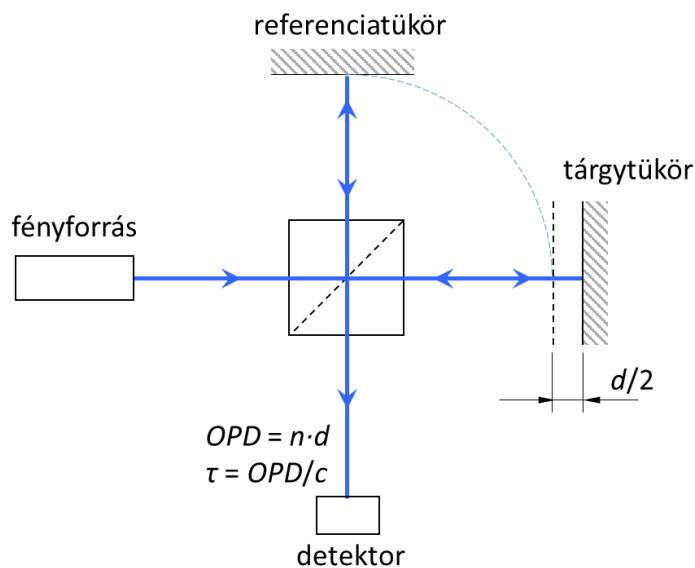
Mivel a fáziskülönbséget (mind hullámfront- mind amplitúdóosztó) interferométerekben adott „ d ” úthosszkülönbséggel hozzuk létre, az intenzitás átírható a következő alakba:

$$k = n \cdot \frac{\omega}{c} \Rightarrow \varphi_{a1} - \varphi_{b1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} d = \frac{\omega_1}{c} nd \quad ; \quad \varphi_{a2} - \varphi_{b2} = \frac{2\pi}{\lambda_2} d = \frac{\omega_2}{c} nd \quad , \quad (17)$$

ahol „ n ” a közeg törésmutatója (most feltételezzük, hogy ez nem hullámhosszfüggő). A hullámhosszról azért érdemes áttérni körfrekvencára, mert lineáris közegben ω állandó. Két fénycsugár interferenciája precízen vizsgálható Michelson- (vagy más néven Twyman-Green) interferométerben, ui. ebben a műszerben lehet legkönnyebben és mérhetően folytonosan változtatni az optikai úthosszat, ld. ábra. A (17) behelyettesítésével (16)-ból ez lesz:

$$I(d) = 2I_1 \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_1}{c} nd\right) \right) + 2I_2 \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_2}{c} nd\right) \right). \quad (18)$$

E kifejezés segítségével a kétfrekvenciás esetről könnyen áttérhetünk tetszőleges számú komponenset tartalmazó frekvenciaspektrumú hullámok interferenciájára.



Kéthullámú interferencia több frekvenciát tartalmazó rezgés esetén

Az $n \cdot d$ szorzatot optikai úthosszkülönbségnek (OPD) nevezzük. Ha „ N ” darab különböző hullámhosszúságú komponensből áll az „ a ” és „ b ” hullám, a fentiek általánosításával az interferogram intenzitása az alábbi módon kapható meg:

$$I(OPD) = 2 \sum_{i=1}^N I_i \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_i}{c} \cdot OPD\right) \right). \quad (19)$$

A fenti esetben az N db diszkrét körfrekvencia alkotja a fény *spektrumát*. Amennyiben a spektrum folytonos, az összegzésből integrálás lesz:

$$I(OPD) = 2 \int_0^{\infty} S(\nu) \cdot \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\nu}{c} \cdot OPD\right) \right) \cdot d\nu, \quad (20)$$

ahol $S(\nu)$ egy új mennyiség, a spektrális sűrűségfüggvény. Folytonos üzemű fényforrásoknál a *spektrális teljesítménysűrűséget* használják, az energiára vonatkozó sűrűségfüggvényt pedig pl. impulzusoknál alkalmazzák. A fenti képletben körfrekvenciáról áttértünk frekvenciára (ν). Az „a” vagy a „b” interferáló nyaláb összintenzitása ezzel kifejezve:

$$I_0 \equiv \int_0^{\infty} S(\nu) \cdot d\nu \quad (21)$$

Ha azt az időt amely alatt a fény OPD -nyi optikai úthosszat megtesz, τ -val jelöljük:

$$I(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\nu) \cdot (1 + \cos(2\pi \nu \cdot \tau)) \cdot d\nu; \quad \tau \equiv \frac{OPD}{c}. \quad (22)$$

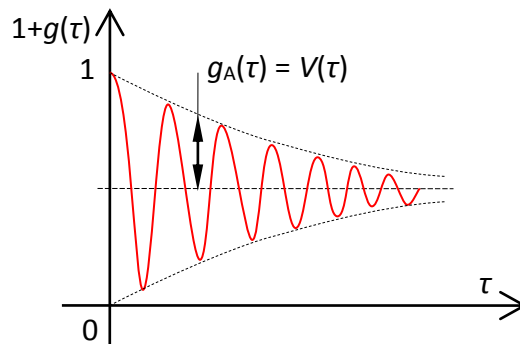
A fenti kifejezéssel leírt intenzitás nem más, mint a τ függvényében felvett *interferogram*. Az összefüggés egy konstans és egy τ -függő tagot tartalmaz. Ezeket szétválasztva:

$$I(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\nu) \cdot d\nu + 2 \int_0^{\infty} S(\nu) \cdot \cos(2\pi \nu \cdot \tau) \cdot d\nu = 2I_0 \left[1 + \int_0^{\infty} \frac{S(\nu)}{I_0} \cdot \cos(2\pi \nu \cdot \tau) \cdot d\nu \right] \quad (23)$$

Az interferogram tehát egy $2I_0$ átlagérték körül ingadozó függvény. Bevezetve a *normált koherencia függvény* $g(\tau)$ fogalmát, a fenti összefüggés általánosan így írható fel:

$$g(\tau) \equiv \int_0^{\infty} \frac{S(\nu)}{I_0} \cdot \cos(2\pi \nu \cdot \tau) \cdot d\nu \Rightarrow I(\tau) = 2I_0 (1 + g(\tau)). \quad (24)$$

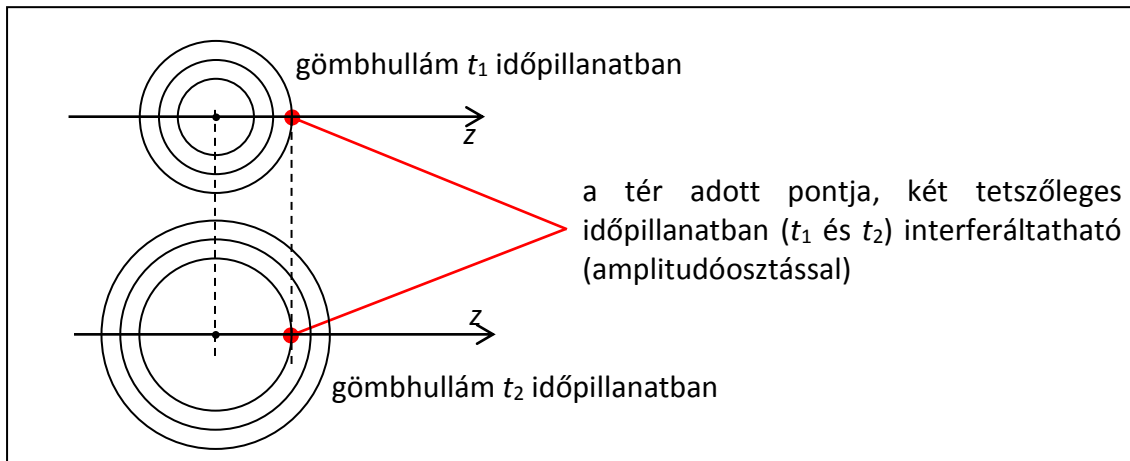
Az egy konkrét τ környezetében mérhető ingadozás mértékét jellemzi a láthatóság $V(\tau)$, amely nem más mint a fenti integrál burkolója. Azt az időtartamot, ahol a láthatóság egy előre meghatározott érték alá csökken *koherenciaidőnek* (τ_c) nevezzük. A (23) összefüggés jól alátámasztja és magyarázza Fizeau és Michelson megfigyeléseit: növekvő úthossz- (idő-) különbség esetén a polikromatikus fénynyalábok interferenciája romló láthatóságot mutat.



[A koherencia fogalma, fajtái](#)

A koherencia egy adott sugárzásra jellemző tulajdonság, hasonlóan a hullámhosszhoz vagy az intenzitáshoz. Csökkenése minden esetben azzal van kapcsolatban, hogy a vizsgált rezgés az idő függvényében bizonytalanságokat mutat, és azzal lehet jellemezni, hogy két adott távolságra lévő időpillanatban mennyire állandó a fáziskülönbség. Ettől függetlenül három fajtáját különböztetik meg a koherenciának: időbeli/térbeli/polarizációs. Az utóbbi azt jelenti, hogy a fény polarizációs állapota ingadozik az idő vagy a hely függvényében, de ezzel az esettel itt nem foglalkozunk. Legfontosabb az időbeli koherencia, amit úgy kell elképzelni, mintha a sugárzás fázisállapotát egy adott térbeli pontban vizsgálnánk, de különböző

időpillanatokban. Ilyen eszközök az amplitudóosztó interferométerek (pl. Michelson). Amint a továbbiakban ki fog derülni, az időbeli koherencia mértéke a fényforrás frekvenciaspektrumának szélességétől függ.



Időbeli koherencia (longitudinális) koherenciahossza:

$$l_L = v \cdot \tau_c \quad (25)$$

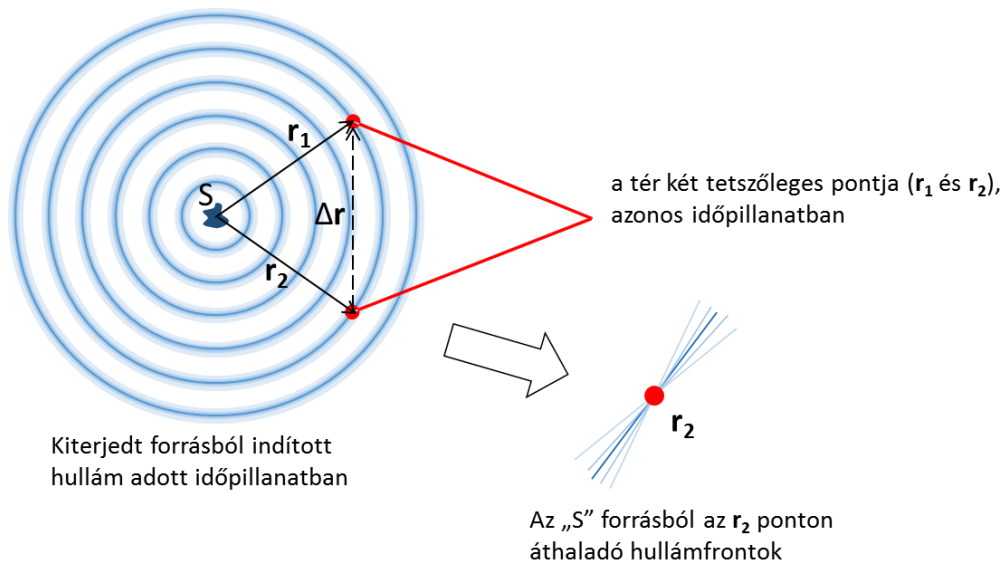
Pl.: $\lambda = 633 \text{ nm}$; $\Delta\lambda = 0,01 \text{ nm}$; $\Delta\nu = 7,5 \text{ GHz}$; $l_L \approx 40 \text{ mm}$; $\tau_c \approx 0,1 \text{ nsec}$ (kb. 63000 periódus)

Emiatt van, hogy két független lézerforrást szuperponálva nem látunk állóhullámképet: interferencia ugyan itt is kialakul, de kb. 0,1 nsec-onként megváltozik a kép, aminek mi csak az átlagát vagyunk képesek érzékelni.

A térbeli koherencia hullámfrontosztó interferométerekkel vizsgálható (ld. pl. Young-féle kétréses kísérlet). Ebben az esetben a tér két különböző pontjából jövő fényt interferáltatjuk, azonos időpillanatban. A *transzverzális koherenciahossz* az a távolság, ahol az interferencia láthatósága egy adott érték alá csökken:

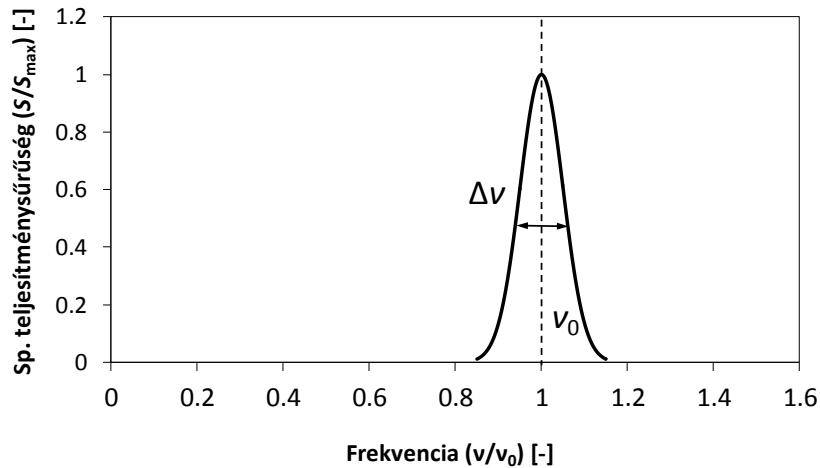
$$l_T \equiv |r_1 - r_2|. \quad (26)$$

Térben koherens egy nyaláb ha $l_T \gg \lambda$. A frekvenciaspektrum analógiájára a térbeli koherencia az ún. *szög spektrummal* van kapcsolatban, ami azt mutatja meg, hogy milyen térszögtartományba eső irányú síkhullámkomponensek szuperponálásával kapható meg az adott sugárzás. A térbeli koherenciánál is fontos a véges időbeli sáv szélesség: teljesen monokromatikus, de véletlen kezdőfázisú síkhullámok eredője ugyanis egy időben állandó szemcsekép (speckle). A térbeli koherenciával itt most részletesebben nem foglalkozunk.



Kvázimonokromatikus hullámok

Az eddigieket összegezve megállapíthatjuk, hogy az interferogrammok láthatósága a fény statisztikus tulajdonságaitól függ. Az indeterminisztikus rezgések közül műszaki szempontból azok a legérdekesebbek, ahol az interferencia a hullámhossznál jóval nagyobb úthosszkülönbség esetén is még látható marad. Az ilyen sugárzások teljesítményspektrumára az a jellemző, hogy egy központi frekvenciát tartalmaz (ν_0), amelyhez képest a spektrum szélessége jellemzően kicsi: $\Delta\nu \ll \nu_0$. Az ilyen rezgéseket *kvázimonokromatikusnak* nevezzük.



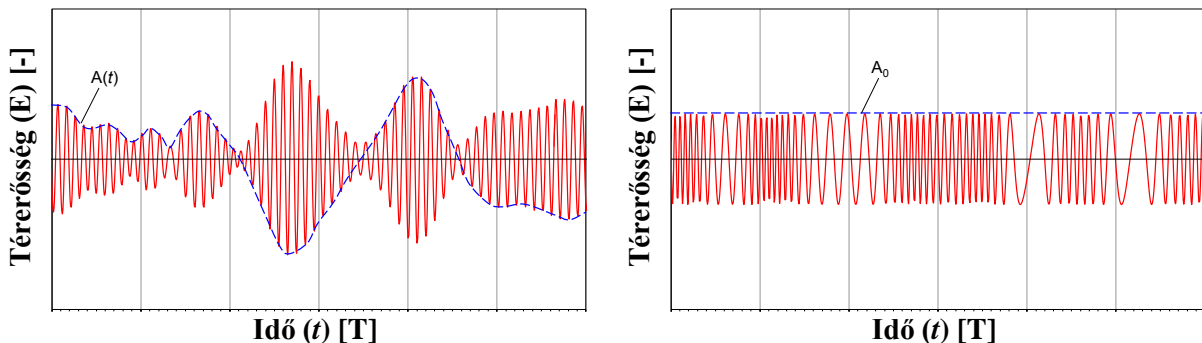
Kvázimonokromatikus hullámok általában a következő formulával írhatók le:

$$E(t) = A(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi(t)) \quad (27)$$

Mivel $\Delta\nu \ll \nu_0$, mind az amplitúdóra (A) mind pedig a fázisra (φ) jellemző, hogy időben jóval lassabban változnak, mint a körfrekvencia. (27) idő szerinti deriválásából tehát:

$$\left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right| \ll \omega \text{ és } \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \ll \omega. \quad (28)$$

Az ilyen rezgések két tipikus fajtája látható az alábbi ábrán. A bal oldali képen az ún. amplitúdómoduláció látható (ez felel meg a látható sugárzások többségének), a jobb oldalin pedig a frekvenciamoduláció, ami egymódusú lézereknél, FM-modulált rádióhullámoknál fordul elő. A továbbiakban csak az amplitúdómodulációval foglalkozunk.



Amplitúdómoduláció: $E(t) = A(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ Frekvenciamoduláció: $E(t) = A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi(t))$

A teljesítményspektrum alakja többféle lehet, pl. Lorentz (élettartam v. ütközési kiszélesedés v. Fabry-Perot rezonátorok), vagy Gaussos (Doppler-kiszélesedés). A frekvencia- és a λ_0 középpontú hullámhosszspektrum szélessége közötti kapcsolat könnyen megkapható:

$$\nu = v/\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \Delta\nu \cdot \lambda_0^2/\nu. \quad (29)$$

Látható fényforrások: Gázlézer: $\Delta\lambda \sim 0,01 \text{ nm}$
 Szilárdtestlézer: $\Delta\lambda \sim 0,1 \text{ nm}$
 Félvezetőlézer: $\Delta\lambda \sim 1 \text{ nm}$ (+ hőmérsékleti ingadozás: $2 \text{ nm}/10^\circ\text{C}$)
 LED: $\Delta\lambda \sim 10 \text{ nm}$

Az időben statisztikus viselkedés leírása az autokorrelációs fgv. segítségével

Vegyünk két kiterjedt spektrummal rendelkező hullámot („a” és „b”), melyek jelen esetben *nem harmonikusak* (tehát nincs komplex jelölésmód!), és vizsgáljuk ezek interferenciáját. Időbeli vizsgálatot végzünk, a tér adott pontjában, tehát a helyfüggést most nem jelöljük. A tetszőleges T időre átlagolt intenzitás ekkor (1) alapján a következő:

$$I(T) = v \cdot \varepsilon \cdot \langle (E_a(t) + E_b(t))^2 \rangle = v \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (E_a(t) + E_b(t))^2 \cdot dt . \quad (30)$$

Tegyük fel továbbá, hogy az időátlag független az átlagolás T időtartamától, magyarul

$$I(T) = I(T \rightarrow \infty) = I = \text{const.}, \quad (31)$$

és hogy ez igaz E_a és E_b átlagolásakor is. Az ilyen nyalábokat *statisztikusan stacionáriusnak* nevezzük. A két fénynyaláb ne legyen független, hanem E_b -t úgy állítsuk elő, hogy E_a -t τ idővel késleltetjük:

$$E_b(t) \equiv E_a(t - \tau) \quad (32)$$

A négyzetre emelést kibontva az eredő intenzitás:

$$\begin{aligned} I(\tau) &= v \cdot \varepsilon \cdot \langle (E_a(t) + E_a(t - \tau)) \cdot (E_a(t) + E_a(t - \tau)) \rangle = \\ &= v \cdot \varepsilon \cdot [\langle E_a(t) \cdot E_a(t) \rangle + \langle E_a(t - \tau) \cdot E_a(t - \tau) \rangle + 2 \langle E_a(t) \cdot E_a(t - \tau) \rangle] \end{aligned} \quad (33)$$

Mivel a nyalábok statisztikusan stacionáriusak, az időátlag képzés független a τ -nyi eltolástól:

$$I(\tau) = 2 \cdot I_a + v \cdot \varepsilon \cdot 2 \langle E_a(t) \cdot E_a(t - \tau) \rangle = 2 \left[1 + \frac{\langle E_a(t) \cdot E_a(t - \tau) \rangle}{\langle E_a(t)^2 \rangle} \right], \quad (34)$$

ahol I_a az E_a nyaláb intenzitása $T \rightarrow \infty$ esetén. Tegyük most fel, hogy E_a egy olyan ω körfrekvenciájú rezgés, amelynek $A(t)$ amplitudója helyfüggetlen, és a periódusidőhöz képest lassan változik az időben, tehát a rezgés kvázimonokromatikus:

$$E_a(t) = A(t) \cdot \cos(\omega t), \quad (35)$$

Mivel a két hullámot azonos forrásból indítottuk, a kezdőfázis a későbbi számolások során ki fog esni, ezért fel sem tüntettük. A rezgés átlagintenzitása $T \rightarrow \infty$ esetére a következő:

$$I_a = v \cdot \varepsilon \cdot \langle A(t)^2 \cdot \cos^2(\omega t) \rangle \approx v \cdot \varepsilon \cdot \langle A(t)^2 \rangle \cdot \langle \cos^2(\omega t) \rangle . \quad (36)$$

A közelítés azért jogos, mert $A(t)$ lassan változik $\cos(\omega t)$ -hez képest. Ezzel az intenzitás:

$$I_a = v \cdot \varepsilon \cdot \langle A(t)^2 \rangle \cdot \frac{1}{2}, \quad (37)$$

amire később lesz szükségünk. A kvázimonokromatikus E_a térerősséget beírva (34)-be:

$$I(\tau) = 2 \cdot I_a + v \cdot \varepsilon \cdot 2 \langle A(t) \cdot A(t - \tau) \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \omega \tau) \rangle \quad (38)$$

A fenti összefüggés (6) alapján átírható ebbe az alakba:

$$\begin{aligned} I(\tau) &= 2 \cdot I_a + v \cdot \varepsilon \cdot \langle A(t) \cdot A(t - \tau) \cdot (\cos(2\omega t - \omega \tau) + \cos(\omega \tau)) \rangle = \\ &= 2 \cdot I_a + v \cdot \varepsilon \cdot \langle A(t) \cdot A(t - \tau) \cdot \cos(2\omega t - \omega \tau) \rangle + v \cdot \varepsilon \cdot \langle A(t) \cdot A(t - \tau) \cdot \cos(\omega \tau) \rangle \end{aligned} \quad (39)$$

Mivel feltevésünk szerint $A(t)$ lassan változik ω -körfrekvenciájú rezgéshez képest, így csak a 2ω -s tag átlagolódik ki. Az időátlagolásból $\cos(\omega\tau)$ -t kiemelve kapjuk a végeredményt:

$$I(\tau) = 2 \cdot I_a + v \cdot \varepsilon \cdot \langle A(t) \cdot A(t - \tau) \rangle \cdot \cos(\omega\tau) . \quad (40)$$

A fenti képlet tovább alakítható:

$$I(\tau) = 2 \cdot I_a \cdot [1 + g_A(\tau) \cdot \cos(\omega\tau)] \equiv 2 \cdot I_a \cdot [1 + g(\tau)] , \quad (41)$$

ahol

$$g_A(\tau) \equiv \frac{v \cdot \varepsilon \cdot \langle A(t) \cdot A(t - \tau) \rangle}{2I_a} . \quad (42)$$

$g(\tau)$ a *normált koherenciafüggvény*, másnéven *koherenciafok*, amely nem más, mint az $E_a(t)$ normált autokorrelációs függvénye (v.ö. (34)-el):

$$g(\tau) = \frac{\langle E_a(t) \cdot E_a(t - \tau) \rangle}{\langle E_a(t)^2 \rangle} \quad (43)$$

A g_A függvény ennek burkolója, amely maximális értékét $\tau = 0$ -nál veszi fel, ahol a számláló értéke éppen I_a -t adja vissza, ld. (37). Ekkor tehát $g(0) = 1$. Amennyiben $A(t)$ sztohasztikusan változik $g(\tau \rightarrow \infty) = 0$. (41)-et a kéthullámú interferenciánál fölírt

$$I(\delta) = I_a + I_b + 2\sqrt{I_a \cdot I_b} \cdot \cos(\delta) \quad (44)$$

képlettel összevetve olyan interferenciát kaptunk, ahol az eredő intenzitás a késleltetési idővel, τ -val periodikusan változik, a csíkok láthatósága pedig éppen a normált koherencia függvény amplitudójának felel meg:

$$V(\tau) \equiv \frac{I_{\max}(\tau) - I_{\min}(\tau)}{I_{\max}(\tau) + I_{\min}(\tau)} = g_A(\tau) . \quad (45)$$

Tehát $g_A(\tau)$ alapján könnyen meghatározhatjuk a τ_c koherencia időt, azt az időtartamot, ahol az interferencia láthatósága adott értékre (definíció szerint pl. felére, $1/e$ -ed vagy $1/e^2$ -ed részére) esik, csak meg kell oldjunk az alábbi egyenletet:

$$g_A(\tau_c) = 1/2 , 1/e \text{ v. } 1/e^2 \text{ stb.} \quad (46)$$

Megjegyzendő, hogy „ g ”-t sok helyen γ -val jelölik.

Kvázimonokromatikus rezgés koherenciafüggvénye

A (24) definíció alapján $g(\tau)$ így függ a spektrális teljesítménysűrűségtől:

$$g(\tau) \equiv \int_0^{\infty} \frac{S(\nu)}{I_0} \cdot \cos(2\pi\nu\tau) \cdot d\nu . \quad (47)$$

Az integrálási tartomány kiterjeszthető $-\infty$ -ig, mert egy kvázimonokromatikus fényhullám spektruma mindig egy adott frekvenciaintervallumra korlátozódik, amelynek alsó határa igen ritkán tart $\nu = 0$ Hz-ig:

$$\int_0^{\infty} \frac{S(\nu)}{I_0} \cdot \cos(2\pi\nu\tau) \cdot d\nu \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\nu)}{I_0} \cdot \cos(2\pi\nu\tau) \cdot d\nu \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S'(\nu)}{2I_0} \cdot e^{i2\pi\nu\tau} \cdot d\nu . \quad (48)$$

Annak érdekében, hogy az integrál alakja pontosan olyan legyen mint az inverz Fourier-transzformáció képlete, bevezettük az S' segédfüggvényt:

$$S'(\nu) \equiv S(\nu) + S(-\nu) . \quad (49)$$

Mivel S' páros, a (48) integrál képzetes része nulla. Ennek a segédfüggvénynek az inverz Fourier-transzformáltja tehát a normált koherencia függvény, ami viszont azt jelenti, hogy S'/I_0 a $g(\tau)$ függvény Fourier-transzformáltja:

$$\boxed{g(\tau) \approx \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{S'(\nu)}{2I_0}\right\}} \Rightarrow \boxed{\frac{S'(\nu)}{2I_0} = \mathcal{F}\{g(\tau)\}}, \quad (50)$$

Mivel $g(\tau)$ autokorrelációs függvény, ami eredendően páros, S' értéke a Fourier-transzformáció tulajdonságai alapján mindig valós lesz:

$$\frac{S'(\nu)}{2I_0} = \mathcal{F}\{g(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot e^{-i2\pi\nu\tau} \cdot d\tau = 2 \int_0^{\infty} g(\tau) \cdot \cos(2\pi\nu\tau) \cdot d\tau, \quad (51)$$

Tehát a normalizált koherencia függvényből a spektrális teljesítménysűrűség Fourier-transzformációval előállítható, és vice versa. Erre jött rá Michelson is, és ez az alapja a mai korszerű interferencia spektroszkópiának (FTIR). (50) összefüggést általános matematikai formában a Wiener-Khinchin-tétel fogalmazza meg.

Amennyiben ν_0 középfrekvenciájú, $2\Delta\nu$ sávzélességű kvázimonokromatikus hullámot vizsgálunk ($\Delta\nu \ll \nu_0$), gyakran jó közelítés, ha a teljesítményspektrumot Gauss-eloszlásúnak tekintjük:

$$S(\nu) \equiv \frac{I_0 \sqrt{2}}{\Delta\nu \sqrt{\pi}} e^{-2\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}\right)^2}. \quad (52)$$

A függvény normáló tényezőjét úgy választottuk meg, hogy az összintenzitás (21)-nek megfelelően I_0 legyen. (50) alapján a normált koherenciafüggvény:

$$g(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\Delta\nu \sqrt{\pi}} \left(e^{-2\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}\right)^2} + e^{-2\left(\frac{-\nu-\nu_0}{\Delta\nu}\right)^2} \right)\right\} \quad (53)$$

A Gauss-függvény inverz Fourier-transzformáltja a következő alakú:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}\right)^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \Delta\nu \cdot e^{-\frac{1}{2}(\pi\Delta\nu\tau)^2} \cdot e^{-i2\pi\nu_0\tau}. \quad (54)$$

Ennek segítségével (53) analitikusan kiértékelhető, s így megkapjuk a koherenciafüggvényt:

$$\boxed{g(\tau) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{(\pi\Delta\nu\tau)^2}{2}} \cdot (e^{-i2\pi\nu_0\tau} + e^{i2\pi\nu_0\tau}) = e^{-\frac{(\pi\Delta\nu\tau)^2}{2}} \cdot \cos(2\pi\nu_0\tau)}, \quad (55)$$

ami teljes összhangban van (41)-el. Ebből a koherenciaidő (ha $g_A(\tau_c) = e^{-2}$):

$$\tau_c = \frac{2}{\pi \cdot \Delta\nu}. \quad (56)$$

Köszönetnyilvánítás

Szeretném hálás köszönetemet kifejezni dr. Füzessy Zoltánnak e jegyzet gondos áttanulmányozásáért, értékes megjegyzéseire és az építő jellegű kritikáért.