

Bevezetés a modern fizika fejezeteibe

2. (b)

Elektromágneses hullámok

Utolsó módosítás: 2016. szeptember 28.

Dipólsugárzás (1)

Anyagi közeg jelenléte esetén a \mathbf{D} vektor a polarizáció jelensége miatt módosul

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

\mathbf{P} : polarizáció vektora

Feltételezve, hogy a \mathbf{j} („külső”) áramsűrűség a közegben zérus ($\mathbf{j}=0$), az (1) Maxwell-egyenlet alakja:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}$$

Itt a $\dot{\mathbf{P}}$ a polarizáció jelensége során megjelenő („lokális”) áramsűrűségnek felel meg.

$$\mathbf{j}_p = \dot{\mathbf{P}}$$

Dipólsugárzás (2)

Matematikailag a $\dot{\mathbf{j}}_p$

hasonlóan beírható
(2.a fejezet 33. oldal)

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathbf{A}} = -\mu_0 \dot{\mathbf{j}}$$

(*) egyenletbe, mintha az „ottani” \mathbf{j} lenne, így

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathbf{A}} = -\mu_0 \dot{\mathbf{P}}$$

egyenlethez jutunk.

Dipólsugárzás (3)

Mivel „kívülről jött” töltések nincsenek, így

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

Ekkor

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}$$

Összefüggés a polarizáció során megjelenő töltéssűrűséget mutatja meg. Ezért a 2.a fejezet 34. oldal

$$\Delta\varphi - \varepsilon_0\mu_0\ddot{\varphi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

eredményét alkalmazva kapjuk:

$$\Delta\varphi - \varepsilon_0\mu_0\ddot{\varphi} = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}$$

Dipólsugárzás (4)

Az \mathbf{A} vektorpotenciál a 2-a fejezet 36. oldal kifejtése szerint:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{P}(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{\partial t} d\xi d\eta d\zeta$$

A további számolások elvégzése céljából (!) érdemes bevezetni a \mathbf{Z} Hertz-vektort az alábbi definícióval:

$$\mathbf{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{Z}} \quad \text{és} \quad \varphi = -\operatorname{div} \mathbf{Z}$$

Ellenőrzés a Lorenz-feltételen keresztül.

Dipólsugárzás (5)

Ekkor a Hertz-vektor:

$$\mathbf{Z}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

A \mathbf{P} polarizáció ismeretében a \mathbf{Z} Hertz-vektor integrálással közvetlenül megkapható, majd belőle az \mathbf{A} vektor- és φ skalárpotenciál deriválásokkal kiszámolható. A következő lépésben pedig ezekből a mérhető \mathbf{E} és \mathbf{B} térmennyiségek adhatók meg. A vázolt módszernek – a segédmennyiségek bevezetésének és a számolásban való alkalmazásának – ez a lényege és tanulsága!

Dipólsugárzás (6)

Tekintsük egyetlen \mathbf{r}_0 pontbeli dipól terét. Ekkor a \mathbf{P} dipólsűrűség:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Itt $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ a Dirac-(delta-)függvény. (Ez mutatja, hogy tényleg csak az \mathbf{r}_0 helyen van egyetlen $\mathbf{p}(t)$ dipól.)

Dipólsugárzás (7)

Az előző összefüggéseket felhasználva az \mathbf{E} elektromos térerősség:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{A}} - \mathit{grad} \varphi \\ &= -\varepsilon_0\mu_0\ddot{\mathbf{Z}} + \mathit{grad} \mathit{div} \mathbf{Z} \\ &= \Delta\mathbf{Z} - \varepsilon_0\mu_0\ddot{\mathbf{Z}} + \mathit{rot} \mathit{rot} \mathbf{Z}\end{aligned}$$

A (*) egyenletet (vagy e fejezet 2. oldalát) és a Hertz-vektor definícióját felhasználva az első két tagra fenn áll:

$$\Delta\mathbf{Z} - \varepsilon_0\mu_0\ddot{\mathbf{Z}} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}$$

Dipólsugárzás (8)

De, mivel az r_0 ponton kívül máshol nincs dipól, így a szabad térben:

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{0}$$

Ezt figyelembe véve az \mathbf{E} elektromos térerősség:

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{Z}$$

A részletes számolást mellőzve \rightarrow

Dipólsugárzás (9)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \text{rot rot } \mathbf{Z} \\
 &= \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \\
 &+ \frac{1}{c} \left(\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}')}{r^4} - \frac{\mathbf{p}'}{r^2} \right) \\
 &+ \frac{1}{c^2} \left(\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}'')}{r^3} - \frac{\mathbf{p}''}{r} \right)
 \end{aligned}$$

Itt a ' a $t-r/c$ argumentum szerinti deriváltat jelöli.

Dipólsugárzás (10)

A \mathbf{B} mágneses térerősség:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \text{rot } \dot{\mathbf{Z}} = \\ &= - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}'}{r^3} - \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}''}{r^2} \end{aligned}$$

Dipólsugárzás (11)

Az E nagyságrendje a $\mathbf{p}(t) = p_0 e^{i\omega t}$

harmonikus dipólrezgés esetén

a sztatikus zónában: $\left| \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right| = \frac{p_0}{r^3}$

a középső zónában: $\left| \frac{\mathbf{p}'}{c r^2} \right| = \frac{\omega p_0}{c r^2}$

a hullám zónában: $\left| \frac{\mathbf{p}''}{c^2 r} \right| = \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r}$

Dipólsugárzás (12)

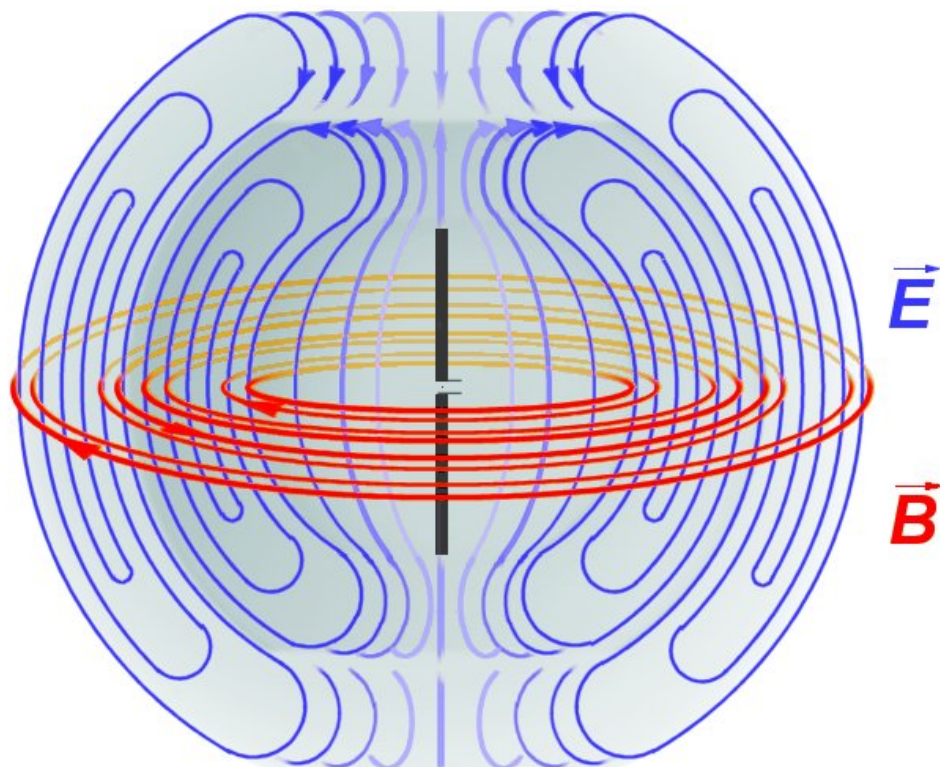
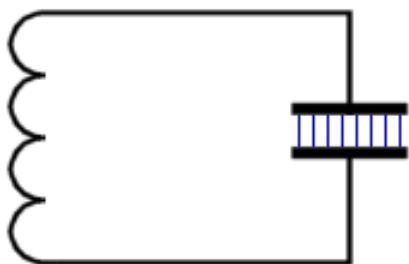
A három zóna térerősségeinek aránya:

$$\frac{p_0}{r^3} : \frac{\omega p_0}{c r^2} : \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} = \frac{1}{r^2} : \frac{\omega}{c r} : \frac{\omega^2}{c^2}$$

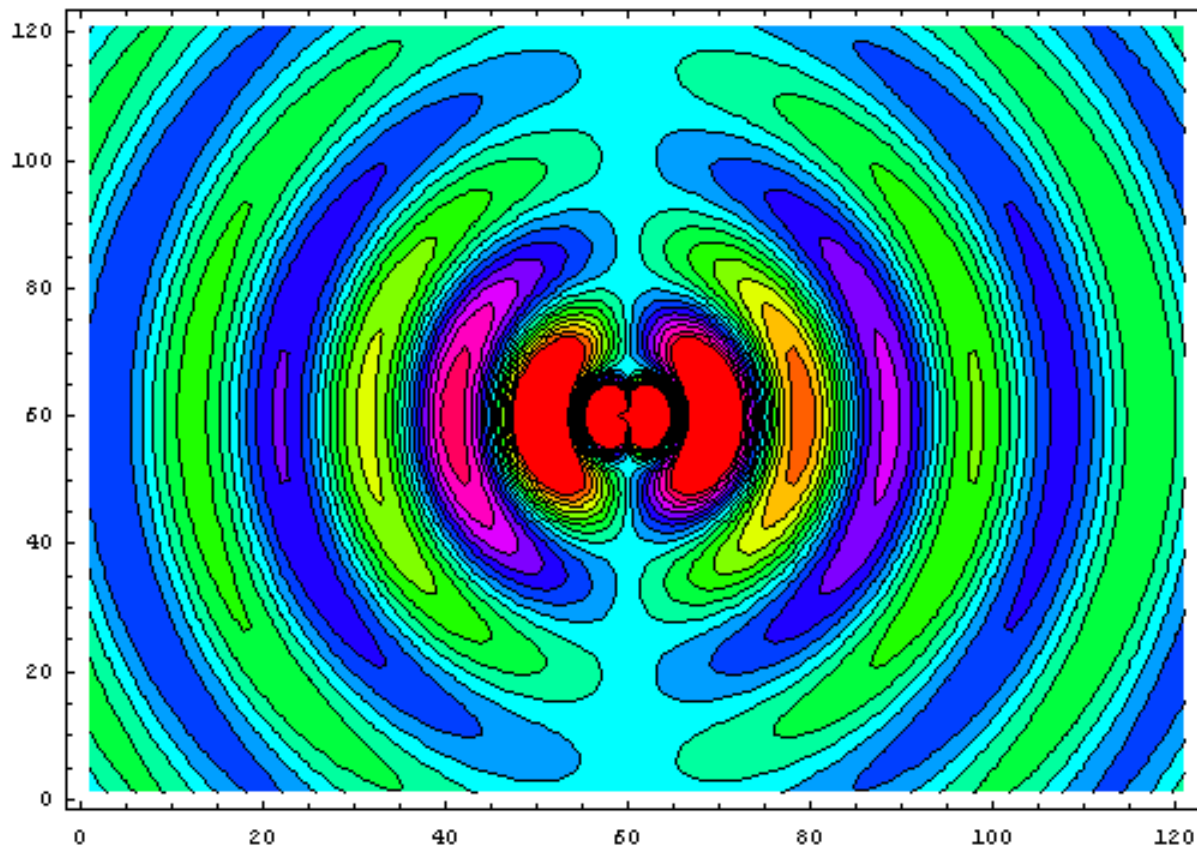
$$= \frac{1}{r^2} : \frac{2\pi}{\lambda r} : \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2}$$

Azaz nagy távolságban már csak a hullámzónára jellemző érték marad meg.

Dipólsugárzás – a sugárzás keltése



1 Hz-es függőlegesen oszcilláló dipól elektromos tere

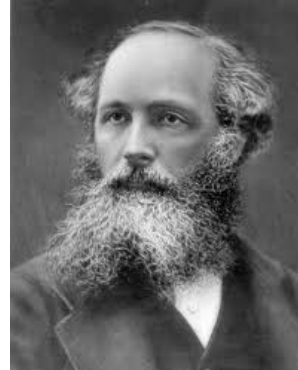




André-Marie Ampère
1775-1836, francia fizikus



Michael Faraday
1791-1867, angol fizikus



James Clerk Maxwell
1831-1879, skót elméleti fizikus



Heinrich Rudolf Hertz
1857-1894, német fizikus

Maxwell 1864-ben írta fel az elektrodinamika négy törvényét egy csatolt egyenletrendszerben. Észrevette, hogy az **Ampere-törvény** módosításra szorul: a változó elektromos tér ugyanúgy létrehoz mágneses teret, mint az áramok. E tag figyelembe vételével az egyenletekből következik a **töltésmegmaradás, ami egy máig alapvetőnek gondolt megmaradási tétel.**

Maxwell megmutatta, hogy az egyenletek szerint létrejöhetnek elektromágneses hullámok, olyan hullámok, melyekben az oszcilláló elektromos és mágneses mező halad vákuumban.

Maxwell (1865) ezt írta: *"Ez a sebesség olyan közel esik a fényéhez, hogy erős okunk van feltételezni, hogy a fény maga (beleértve a hősugárzást és a többi sugárzást ha létezik) elektromágneses zavar, mely hullám formájában terjed az elektromágneses térben az elektromágnesesség törvényei szerint."*

Maxwell következtetése helyes volt, de nem érthette meg annak Heinrich **Hertz** által elvégzett 1888-as igazolását. A fény mennyiségi értelmezése elektromágneses hullámként, melyet Maxwell tett meg, a 19. századi fizika egyik nagy diadala.

Valójában Michael **Faraday** hasonló gondolatot fogalmazott meg a fényről 1846-ban, de nem volt képes annak mennyiségi leírását adni, sebességét megjósolni. A maxwelli elektrodinamika felfedezése nagy hatással volt a fizikára, olyan új elméletek csíráztak ki belőle, mint például a speciális relativitáselmélet. Az elektrodinamika kvantált elmélete, a relativisztikus kvantum-elektrodinamika a mai fizikai elméletek legpontosabbika. Az elektromágnesség számos gyakorlati felhasználása gazdagítja mindennapi életünket a mikrohullámú sütőtől a lézerekén át egészen a modern távközlési rendszerekig.

Kitekintés: Mi lehet a vektorpotenciál fizikai jelentése? Az Aharonov-Bohm-effektus (1)

Az indukció jelenségének tanulmányozása során *Faraday* feltételezett olyan állapotot (\rightarrow elektrotonikus állapot) és egy hozzá kapcsolódó fizikai mennyiséget, amely változása kapcsolatba hozható a \mathbf{E} és \mathbf{B} mérhető fizikai mennyiségekkel.

Maxwell az \mathbf{A} vektorpotenciált olyan matematikai mennyiségként értelmezte és definiálta, amelynek változása az \mathbf{E} és \mathbf{B} mérhető fizikai mennyiségeket adja meg.

Kitekintés: Mi lehet a vektorpotenciál fizikai jelentése? Az Aharonov-Bohm-effektus (2)

„Egy kísérletsorozat – amelynek menetét intenzív gondolkodás írta elő, minden matematikai számítás nélkül – vezette Faraday-t ahhoz, hogy felismerje valaminek a létezését, amelyről mi tudjuk, hogy az egy matematikai mennyiség, amelyet azonban az elektromágneses elmélet alapmennyiségének lehet tekinteni. De minthogy ő ehhez a fogalomhoz tisztán empirikus úton jutott, fizikai létet tulajdonított neki. ... Az *elektrotonikus* állapot Faraday-féle elképzelésének az a tudományos értéke, hogy arra ösztökéli az elmét, olyan mennyiséget ragadjon meg, amelynek változásától függenek a tényleges mennyiségek.”

J. C. Maxwell

Forrás: J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Clarendon, Oxford, 1873). /Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete* (Gondolat, Budapest, 1986)./

Kitekintés: Mi lehet a vektorpotenciál fizikai jelentése? Az Aharonov-Bohm-effektus (3)

Konklúzió: A klasszikus elektrodinamikában a vektorpotenciál matematikai mennyiség.

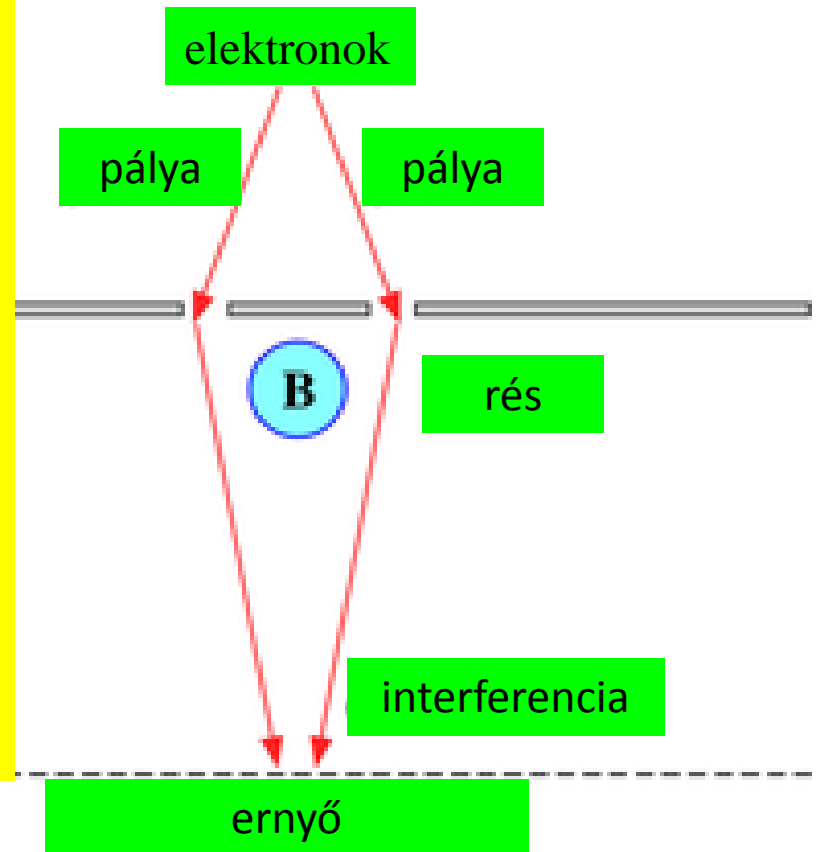
Viszont →

A ma **Aharonov-Bohm-effektus**nak nevezett jelenséget először W. Ehrenberg és R. E. Siday jósolta meg 1949-ben. Később, tőlük függetlenül, Y. Aharonov és D. Bohm hasonló feltételezésekhez jutottak 1959-ben. →

A vektorpotenciálnak a kvantumelektrodinamikában van fizikai realizációja!

Kitekintés: Mi lehet a vektorpotenciál fizikai jelentése? Az Aharonov-Bohm-effektus (4)

Az elektronok a réseken áthaladva interferencia képet hoznak létre, amely az ernyőn látható. A \mathbf{B} mágneses tér egy tekercsbe van zárva, tehát az elektronokra közvetlen hatása (pl. Lorentz-effektuson keresztül) nincs. A mágneses tér ki- és bekapcsolásával azonban az interferenciacsíkok az előző helyzethez képest elmozdulnak! Ez azt jelenti, hogy az elektronokhoz rendelhető hullámfüggvények fázisa meg kell változzon! Ha a mágneses tér árnyékolt, akkor mi változtatja meg a fázisokat? \rightarrow Az \mathbf{A} vektorpotenciál a tekercsen kívül is jelen van!!!



Hullámoptika - Monokromatikus síkhullámok (1)

A hullámegyenlet megoldásaként előálló a „+” irányba terjedő síkhullámok általános alakja:

$$f\left(t - \frac{n r}{c}\right)$$

Mivel az argumentum tetszőleges számmal szorozható, így szokás ezt a $-\omega$ értékkel tenni, azaz

$$t - \frac{n r}{c} \rightarrow -\omega \left(t - \frac{n r}{c}\right) = \frac{\omega}{c} n r - \omega t$$

Korábbról emlékszünk, hogy a hullámszám

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$$

Monokromatikus síkhullámok (2)

Most azonban $\frac{\omega}{c}$ jelent meg, amely 2π -szerese a $\frac{v}{c}$ -nek.

Bevezetjük ugyanazzal a k jelöléssel a **cirkuláris hullámszám** fogalmát, amely tehát így

$$k = \frac{\omega}{c}$$

A terjedési irányt is figyelembe vevő cirkuláris hullámszám vektor:

$$\mathbf{k} = kn$$

Monokromatikus síkhullámok (3)

Ezzel az argumentum a $kr - \omega t$ alakra hozható.

Harmonikus hullámok vizsgálatára szorítkozva a térerősségek alakja:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(kr - \omega t)}$$

$$H(\mathbf{r}, t) = H_0 e^{i(kr - \omega t)}$$

- A 0 index az amplitúdó konstans értékére utal.
- A hullám szinuszos/koszinuszos jellege a **komplex írásmódban** benne van. A számolás ebben az alakban egyszerűbb. Ugyanakkor a térerősségek értékei – mind az amplitúdók, mind a teret megadó értékek – komplexek, amelynek valós részei adják a fizikai mennyiségek tényleges értékeit.
- A monokromatikusságot az egyetlen ω körfrekvencia jelenléte testesíti meg.

Monokromatikus síkhullámok (4)

A térmennyiségek idő és hely szerinti deriváltjait célszerű előre kiszámolni:

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)} \quad \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -i\omega \mathbf{H}_0 e^{i(kr - \omega t)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = ik \mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)} \quad \operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = ik \mathbf{H}_0 e^{i(kr - \omega t)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = ik \times \mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = ik \times \mathbf{H}_0 e^{i(kr - \omega t)}$$

Monokromatikus síkhullámok (5)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

egyszerűsítések után az alábbiakat kapjuk:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega \varepsilon \mathbf{E}_0$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mu \mathbf{H}_0$$

$$\varepsilon \mathbf{k} \mathbf{E}_0 = 0$$

$$\mu \mathbf{k} \mathbf{H}_0 = 0$$

Ezt követően szokás elhagyni a $_0$ indexet, nem feledve, hogy a további formulák már csak az amplitúdókat tartalmazzák!

Monokromatikus síkhullámok (6)

A szabad tér egyenletei:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}$$

$$\varepsilon \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$$

A hullámok **transzverzális** tulajdonsága és a **jobbkez-szabály** itt is látható!

Monokromatikus síkhullámok (7)

Tekintsük a $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H}$ egyenletet.

Balról vektoriálisan megszorozva \mathbf{k} -val kapjuk:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega\mu\mathbf{k} \times \mathbf{H}$$

Felhasználva, hogy

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E}$$

Mivel \mathbf{k} merőleges \mathbf{E} -re, ezért a jobb oldal első tagja eltűnik.

Monokromatikus síkhullámok (8)

Így $-k^2 \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{k} \times \mathbf{H}$

és felhasználva, hogy $\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E}$

kapjuk:

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$$

Ebből

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Hullámok polárossága (1)

Síkban poláros hullám

Az \mathbf{E}_0 és \mathbf{H}_0 vektorok komplex értékű vektorok, így ezek minden komponense is az. Az \mathbf{E}_0 komplex vektor – hasonlóan \mathbf{H}_0 is – felírható

$$\mathbf{E}_0 = \sum_j \mathbf{E}_{0j} e^{i\delta_j}$$

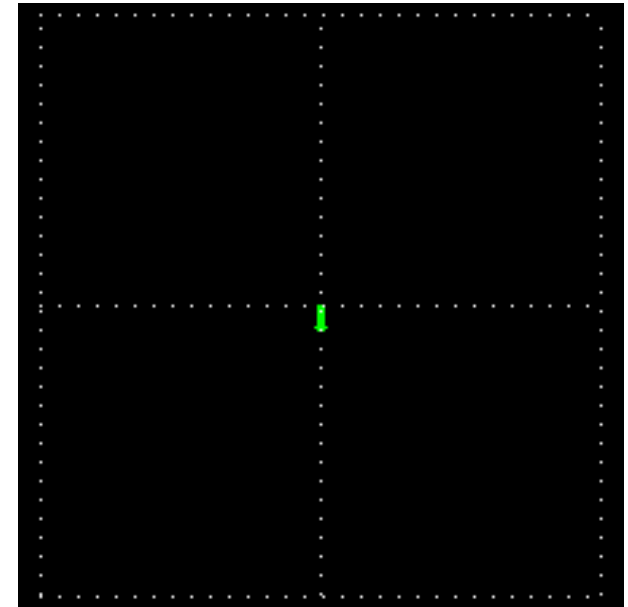
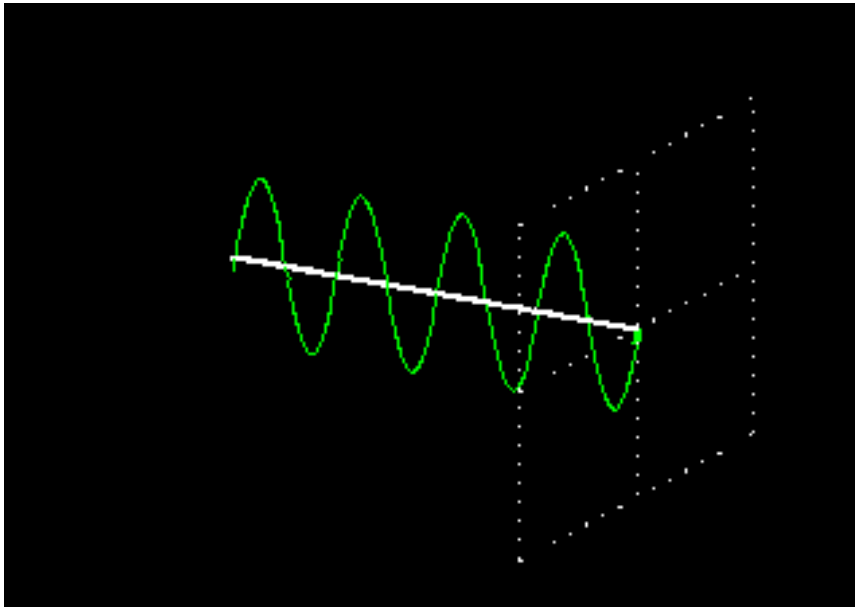
alakban, ahol az \mathbf{E}_{0j} valós értékű vektor, a komplex tulajdonságot az e-ados kifejezés adja a δ_j kezdőfázisokon keresztül ($j=x,y,z$). Pl. az x tengely irányába terjedő hullám esetére a térerősség y és z komponensei:

$$E_y = E_{0y} e^{i\delta_y} e^{i(kr - \omega t)} \quad E_z = E_{0z} e^{i\delta_z} e^{i(kr - \omega t)}$$

Hullámok polárossága (2)

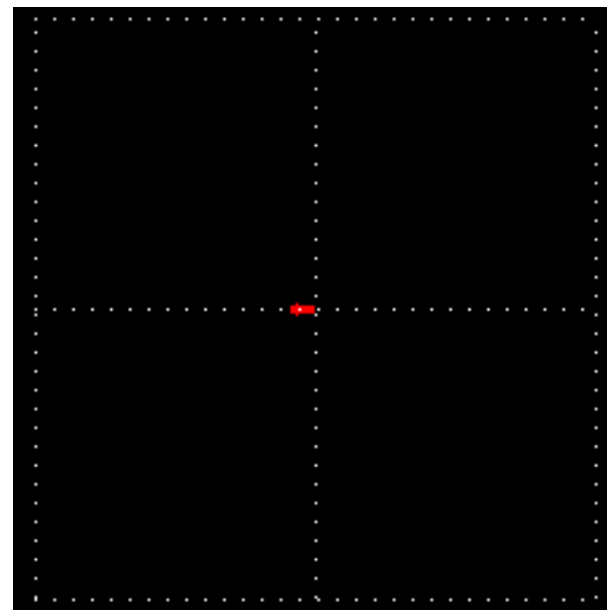
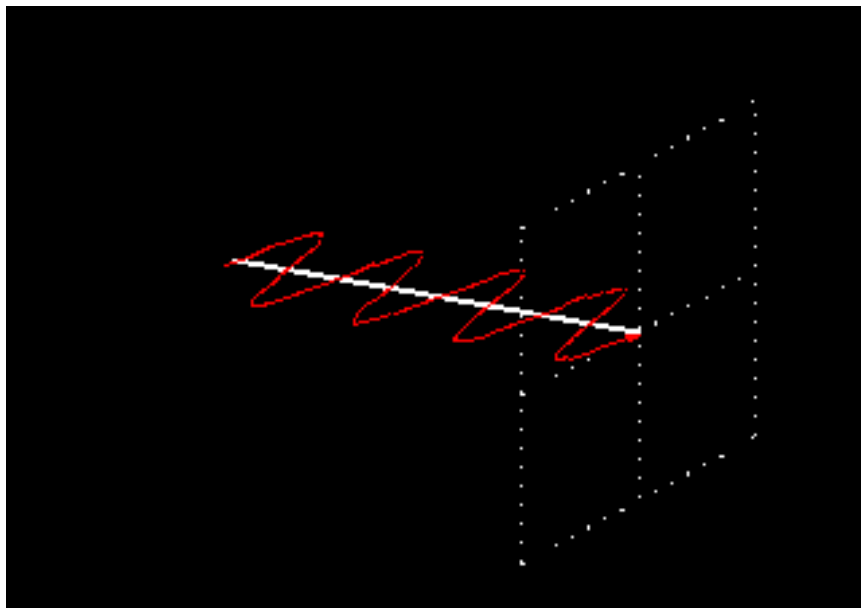
Síkban poláros hullám

Ha komponensek $\delta = \delta_y = \delta_z$ fázisa megegyezik, akkor a rezgés egy síkban történik (lásd a következő sorozatokon):



A z-komponens rezgése

Hullámok polárossága (3) Síkban poláros hullám

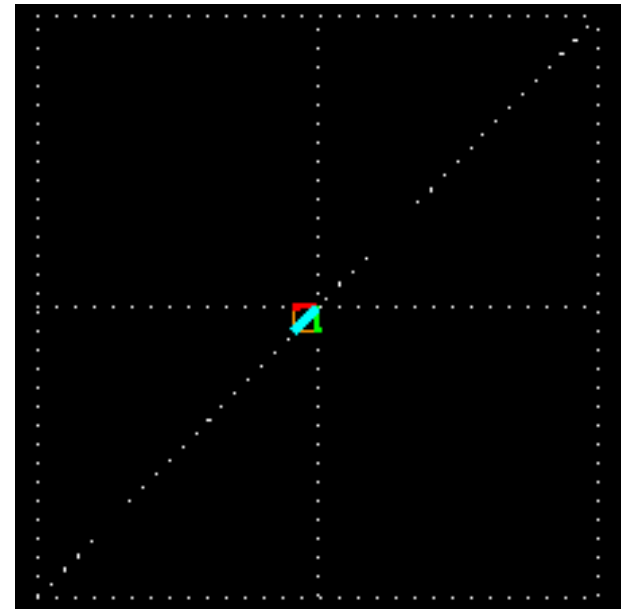
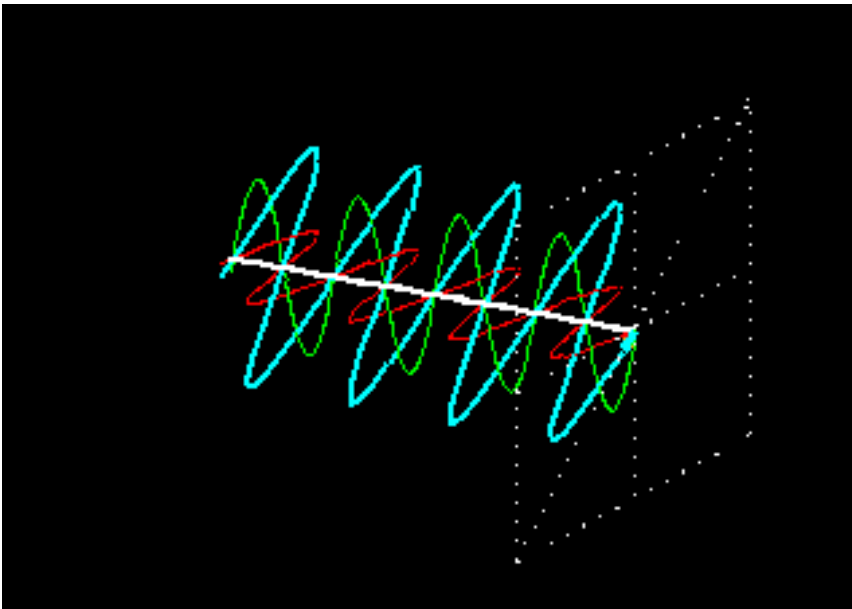


Az y-komponens rezgése

Hullámok polárossága (4)

Síkban poláros hullám

Az eredményezett hullám **síkban poláros**:

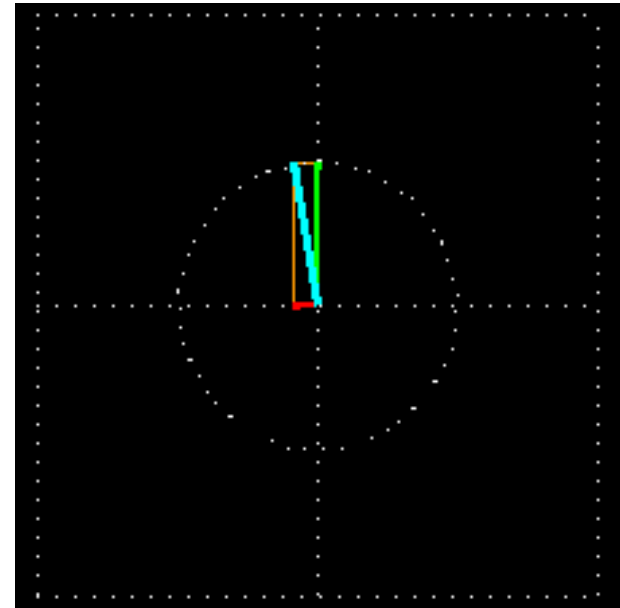
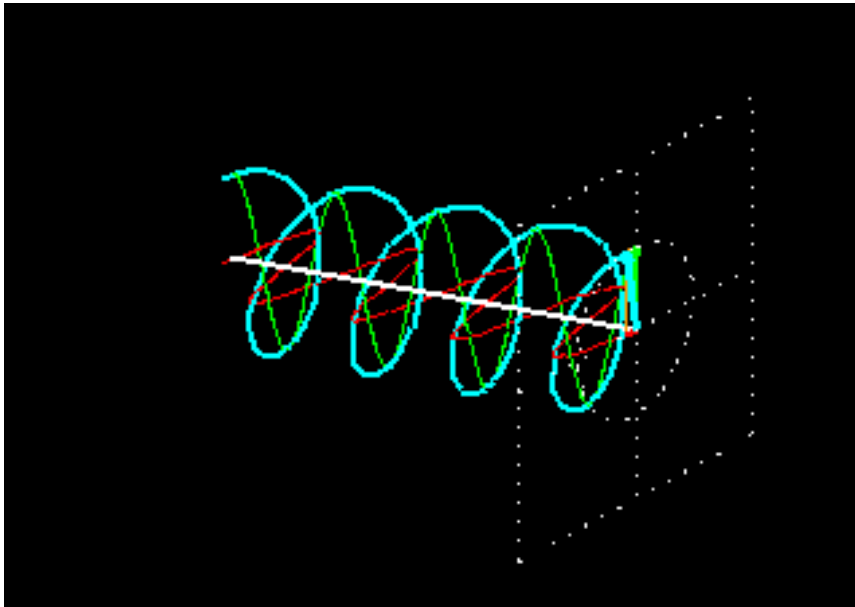


Ha olyan koordináta rendszert választunk, hogy pl. $E_y=0$ legyen, akkor az (x,y) sík a **polarizáció síkja**, míg az (x,z) sík a **rezgési sík**.

Hullámok polárossága (5)

Cirkulárisan poláros hullám

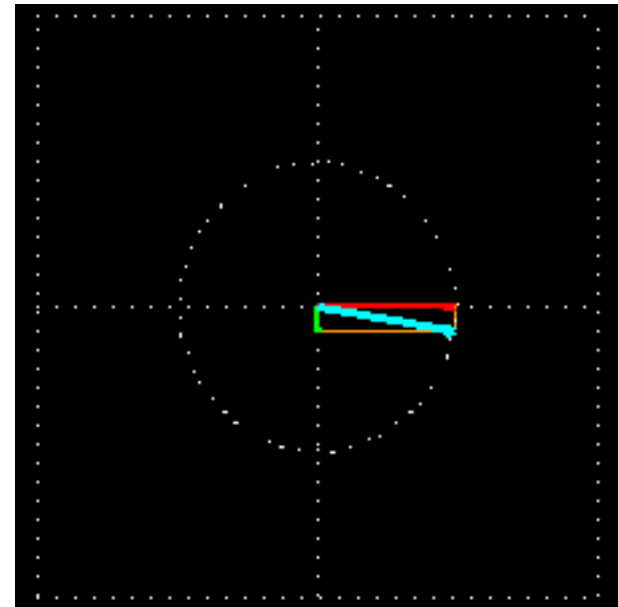
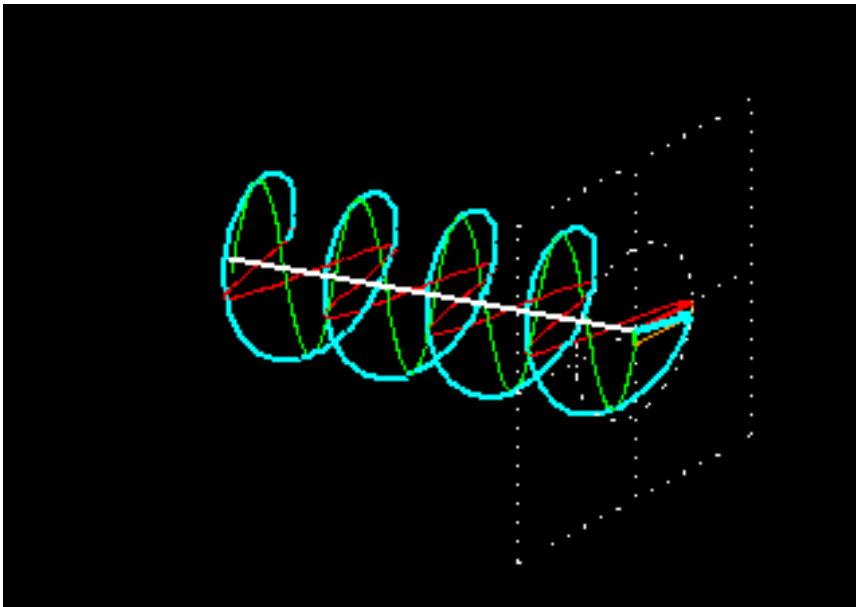
Amennyiben az amplitúdók megegyeznek, azaz $E_{0y} = E_{0z}$, valamint a fázisokra fenn áll, hogy $\delta_z = \delta_y - \frac{\pi}{2}$, akkor az eredményezett hullám **jobbra cirkulárisan poláros**:



Hullámok polárossága (6)

Cirkulárisan poláros hullám

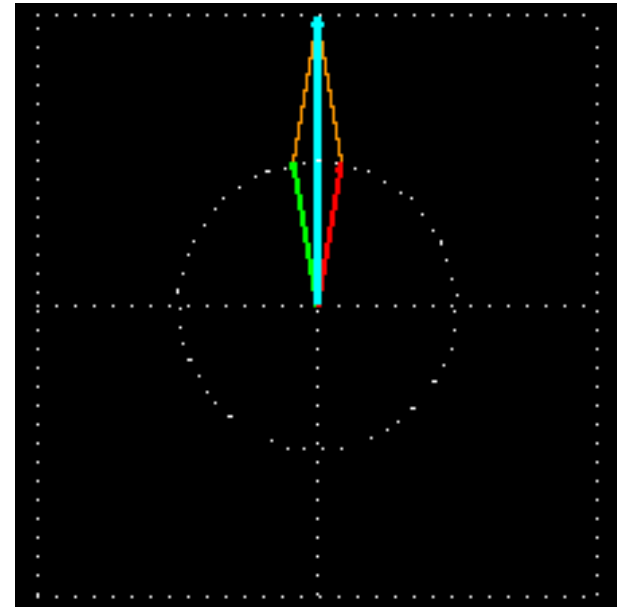
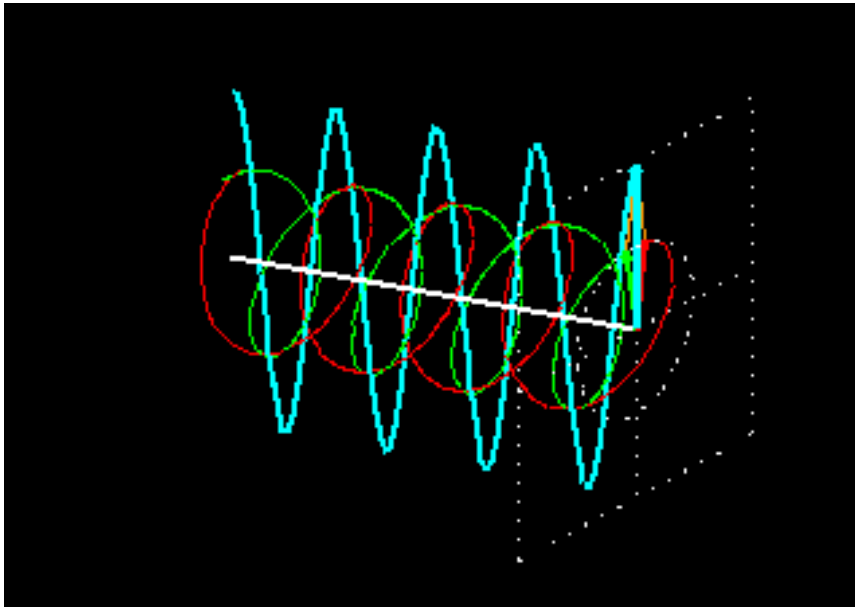
Amennyiben az amplitúdók megegyeznek, azaz $E_{0y} = E_{0z}$, valamint a fázisokra fenn áll, hogy $\delta_z = \delta_y + \frac{\pi}{2}$, akkor az eredményezett hullám **balra cirkulárisan poláros**:



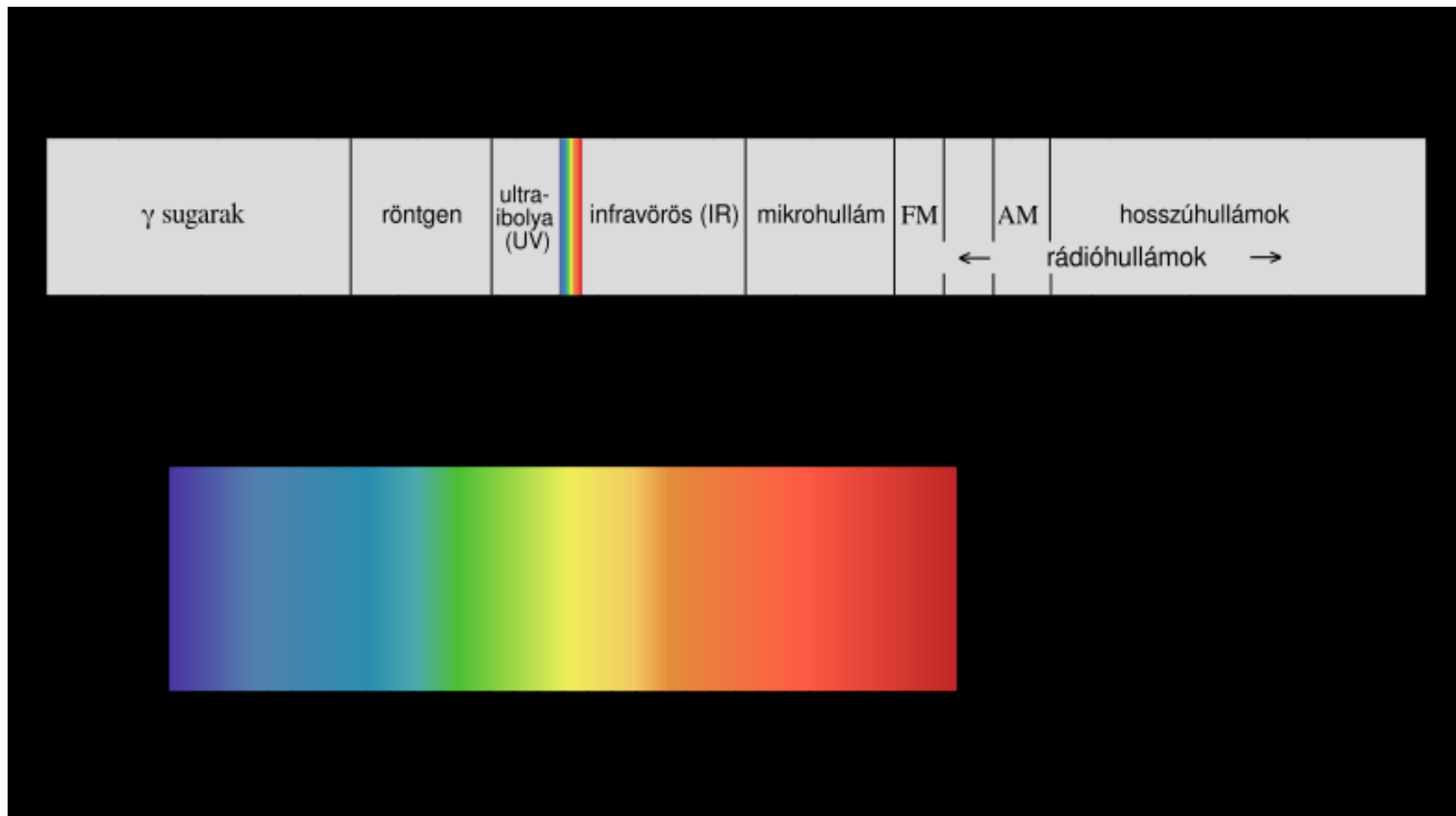
Hullámok polárossága (7)

Hullámok szuperpozíciója

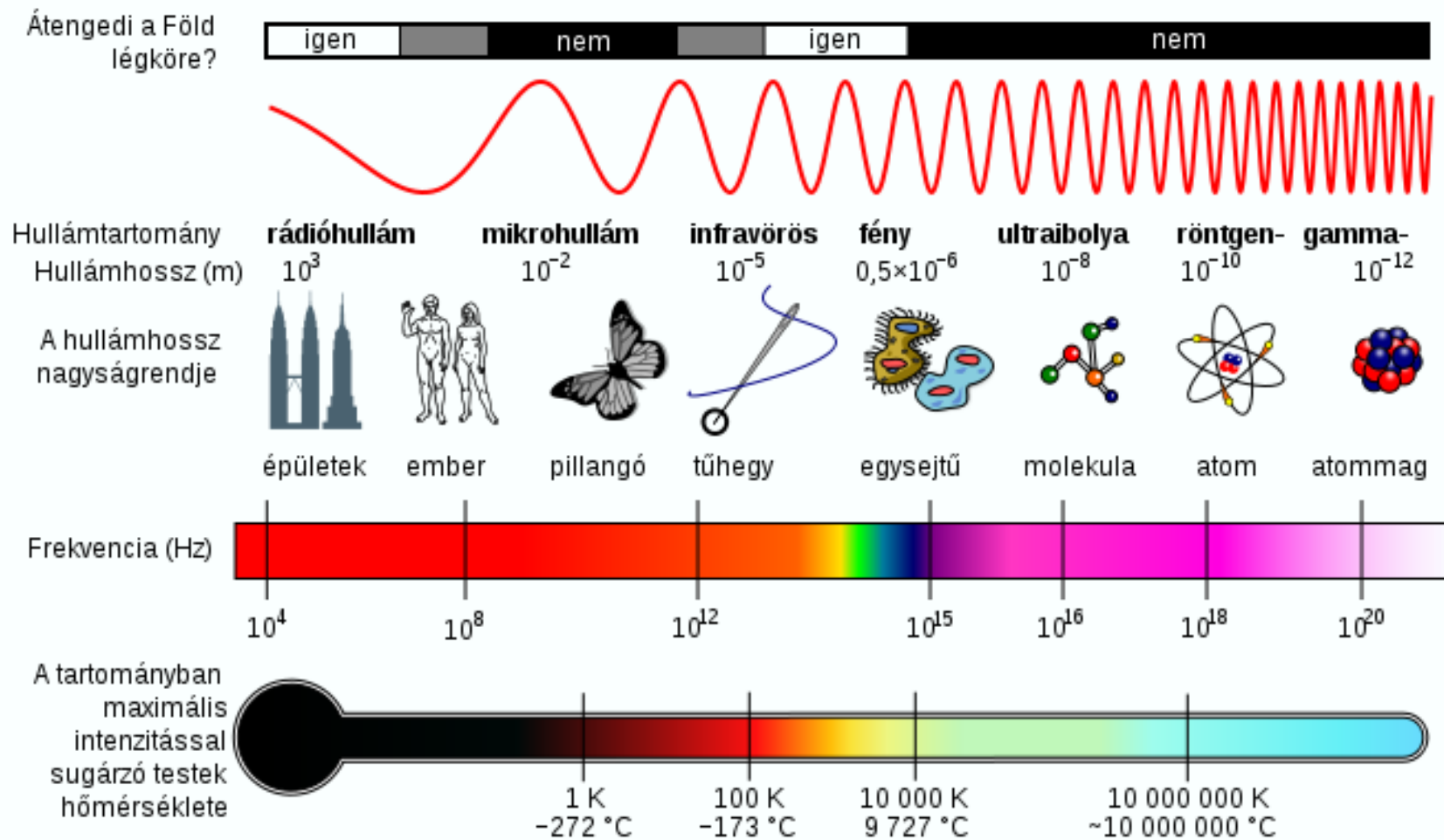
Két azonos amplitúdójú, egy **balra** és egy **jobbra cirkulárisan poláros** hullám síkban poláros hullámot eredményez:



Az elektromágneses spektrum – a fény elektromágneses hullám (1)



Az elektromágneses spektrum – a fény elektromágneses hullám (2)



Kérdések (1)

Miben áll a polarizáció jelensége? Miként írható le az $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{P})$ térmennyiségekkel?

A polarizációt milyen módon vezetjük be a Maxwell-egyenletekbe?

Mi a polarizációs töltéssűrűség és a polarizációs áram?

Milyen kapcsolat van a polarizáció vektora és a potenciálok között?

Hogyan célszerű bevezetni a Hertz-vektort?

Milyen matematikai alakokkal lehet megadni egy pontbeli dipólt?

A dipólsugárzás tere milyen zónákra osztható?

Milyen a térmennyiségek időbeli és térbeli fejlődése? *(A fizikai fejlődés és vázlatos grafikus megjelenítés kell, nem a 17. és 18. fólián kifejtett matematikai végeredmény!)*

Mi a vektorpotenciálok fizikai jelentésével kapcsolatos klasszikus elektrodinamikabeli és a **modern, kvantumozott tulajdonságot tartalmazó felfogás?** / \rightarrow Faraday, Maxwell, **Aharonov-Bohm**/

Kérdések (2)

Milyen matematikai alakkal írhatók le a síkhullámok?

Mi a cirkuláris hullámszám?

Mit jelent az, hogy monokromatikus egy síkhullám, és milyen matematikai alakkal írható le?

Milyen alakra írhatók át a Maxwell-egyenletek monokromatikus síkhullámok esetén?

Hogyan jelenik meg a polárosság fogalma? Milyen eseteket ismer?

Mi az elektromágneses spektrum? Hol helyezkedik el benne a látható fény?

(folyt. köv.)

(A ilyen színnel írt kérdések a mélyebben érdeklődők részére vannak.)