Fizika feladatok

2015. december 8.

Ez a feladatgyűjtemény a villamosmérnök hallgatók korábbi jogos igényének megfelelve, nagy hiányt pótol. A kitűzött feladatok az I. féléves fizika tárgyának anyagához illeszkednek. Remélhetőleg érzékelhető segítséget jelent mind a hallgatók, mind a tárgyat oktatók számára, valamint hozzájárul az egységes oktatás megvalósításához. A gyűjteményben a * jelzés a magasabb nehézségi szintű feladatokat jelöli, míg a **-gal jelölt feladatokat a kihívásokat kedvelő megoldóknak ajánljuk. A feladatgyűjtemény folyamatosan bővül új feladatokkal és megoldásokkal. Javaslatokat új feladatokra, valamint megoldásokat és egyéb észrevételeket szívesen látunk. (Szerk.: Márkus Ferenc, Rakyta Péter, Krafcsik Olga, Barócsi Attila, Sólyom András, Gilyén András, Márkus Bence Gábor, Gambár Katalin, Fehér András, Bokor Nándor)

Tartalomjegyzék

1. Feladatok a kinematika tárgyköréből

Tömegpontok mozgása egyenes mentén

1.1. Feladat: Mekkora az átlagsebessége annak pontnak, amely mozgásának első szakaszában v_1 sebességgel s_1 utat, második szakaszában v_2 sebességgel s_2 utat tesz meg?

Megoldás: Az átlagsebességet az összesen megtett útmennyiség és az ehhez szükséges teljes időtartam hányadosaként kapjuk meg: $\overline{v} = \frac{\sum_i s_i}{\sum_i t_i}$. Az eltelt időtartamok: $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$ és $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$. Így

$$\overline{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}. \tag{1.1.1}$$

1.2. Feladat: Két mozdony s_1 távolságból, egymáshoz képest v sebességgel közeledik egymás felé az egyenes vasúti pályán. Az egyik fényjelet ad, amely a szélvédőkről visszaverődik. Mekkora utat tesz meg a fény, amíg s_2 távolságra lesznek egymástól?

Megoldás: Az eltelt idő:

$$t = \frac{s_1 - s_2}{v}, \tag{1.2.1}$$

amely idő alatt a fény

$$s = ct = c\frac{s_1 - s_2}{v} \tag{1.2.2}$$

utat tesz meg.

1.3. Feladat: Egyenes vasúti pályán egy mozdony halad v sebességgel, s közben Δt ideig dudál. Milyen hosszúnak hallja a pálya mellett álló utas a dudaszót, ha a vonat nem halad el mellette?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a mozdony s távolságban van, amikor elkezd dudálni. A hangot

$$t_1 = \frac{s}{c} \tag{1.3.1}$$

idő elteltével hallja meg a megfigyelő. Ezt követően Δt idő múlva már csak $s - v\Delta t$ távolságban lesz a mozdony, amely ekkor befejezi a dudálást. A dudaszó vége

$$t_2 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} \tag{1.3.2}$$

idő elteltével jut a megfigyelőhöz. A dudaszót a megfigyelő tehát

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c - v}{c}\Delta t \tag{1.3.3}$$

hosszúnak hallja. *Megjegyzés:* Távolodó mozdony esetén a dudaszó

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s + v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c + v}{c}\Delta t \tag{1.3.4}$$

időtartamúnak hallatszik.

1.4. Feladat: Egy gépkocsi 54 km/h sebességről 5 m/s^2 lassulással egyenletesen lefékez. Mekkora a teljes fékút?

Megoldás: Legyenek $v_0 = 54$ km/h $= 15$ m/s és $a = 5$ m/s^2. A sebesség az idő függvényében a

$$v(t) = v_0 - at, \tag{1.4.1}$$

összefüggéssel adható meg. Ennek segítségével a gépkocsi megállásáig eltelt idő

$$t = \frac{a}{v_0} = 3 \text{ s}. \tag{1.4.2}$$

A teljes fékút pedig

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 22,5 \text{ m}. \tag{1.4.3}$$

1.5. Feladat: Egy tömegpont az x tengely mentén mozog –4 m/s^2 állandó gyorsulással. Az $x = 0$ helyen a sebessége 20 m/s, az időt ekkor kezdjük el mérni. Mikor lesz a test először az $x = 18$ m helyen?

Megoldás: Legyenek $v_0 = 20$ m/s, $a = –4$ m/s^2. A tömegpont helye, mint az idő függvénye az

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.5.1}$$

összefüggéssel adható meg. Oldjuk meg az egyenletet a t változóra az $x = 18$ m helyettesítés mellett:

$$18 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.5.2}$$

Az egyenlet gyökei: $t_1 = 1$ s és $t_2 = 9$ s. A tömegpont először a t_1 időpillanatban éri el az $x = 18$ m helyet.

1.6. Feladat: (HN 2B-18) Egy futó a 100 m-es vágtaszámot $10,3$ s-os eredménnyel nyerte meg. Egy másik futó $10,8$ s-os idővel futott be. Feltéve, hogy az atléták az egész távon egyenletesen futottak, határozzuk meg, hogy milyen távol volt a második futó a céltól, amikor a győztes átszakította a célszalagot!

Megoldás: Az adatokat jelöljük az alábbi módon: $s = 100$ m; $t_1 = 10,3$ s; $t_2 = 10,8$ s. A másodikként célba érkező futó sebessége

$$v = \frac{s}{t_2} = 9,26 \text{ m/s} \tag{1.6.1}$$

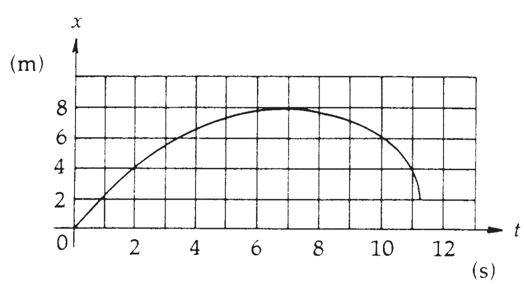
volt. Mivel a hátránya $t = t_2 - t_1 = 0,5$ s volt, így $d = vt = 4,63$ m-re volt a célvonaltól.

1.7. Feladat: (HN 2B-19) Az 1. ábra egy egyenesvonalú pályán mozgó részecske út-idő grafikonját mutatja.

(a) Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a $t_1 = 2$ s és $t_2 = 5$ s időintervallumra!

(b) Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége?

(c) Mekkora a $t = 10$ s időpontban a pillanatnyi sebessége?



1. ábra.

Megoldás:

(a) A grafikonról leolvasható, hogy a $t_1 = 2$ s időpillanatban $x_1 = 4$ m a helykoordináta, valamint a $t_2 = 5$ s időpillanatban $x_2 = 7$ m. Az átlagsebességet a teljesen megtett út és hozzá tartozó idő hányadosaként kapjuk meg:

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1 \text{ m/s}. \tag{1.7.1}$$

(b) A mozgás sebessége ott zérus, ahol a görbéhez húzott érintő meredeksége zérus. Ez jó közelítéssel láthatóan a

$$t' = 7 \text{ s} \tag{1.7.2}$$

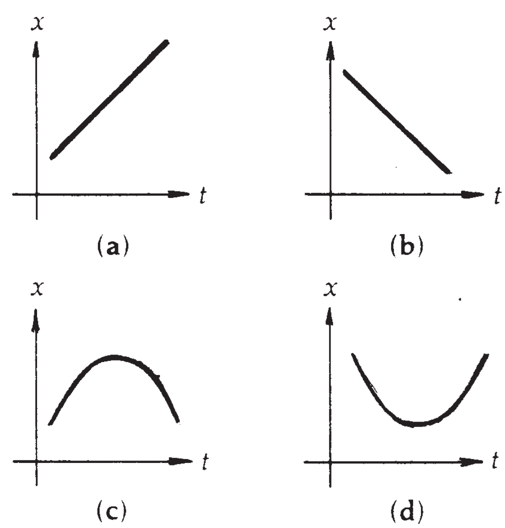
időpillanatban áll fenn.

(c) A $t = 10$ s-beli sebesség meghatározása a pontbeli érintő kiszámolását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a ponthoz nagyon közeli értékeket kellene leolvasni. Mivel elég nagy a leolvasási pontatlanság – a megértés lényegét pedig nem érinti – az érintő meghatározását úgy végezzük el, hogy tekintjük a $t_9 = 9$ s-hoz és $t_{11} = 11$ s-hoz tartozó $x_9 = 7$ m és $x_{11} = 4$ m helykoordinátákat, és kiszámoljuk a

$$v_{10} = \frac{x_{11} - x_9}{t_{11} - t_9} \sim -1{,}5 \text{ m/s}. \tag{1.7.3}$$

meredekséget. A negatív előjel arra utal, hogy a pont az origó felé mozog. A mozgás irányának megváltozása a $t' = 7$ s időpillanatban történt.

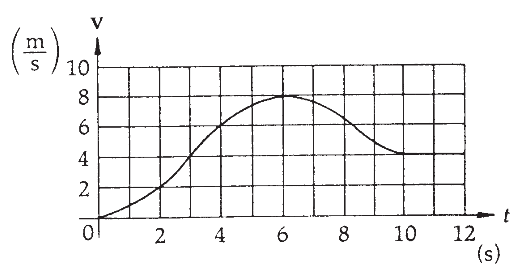
1.8. Feladat: (HN 2B-22) A 2. ábra négy különböző mozgás hely-idő függvényábráját mutatja. Állapítsuk meg minden esetben, hogy a gyorsulás pozitív, negatív vagy zérus!



2. ábra.

Megoldás: A 2. (a) és (b) ábráinak grafinkonjai lineáris összefüggést írnak le a megetett út és az eltelt idő között. A lineáris grafikonok egyenletes sebességű mozgást írnak le, következés képpen a mozgások alatt a gyorsulás zérus. A gyorsulás mellett a tömegpont sebességének iránya is megállapítható a grafikonok meredekségéből: a 2. (a) ábrán pozitív meredeksége van a grafikonnak, tehát a tömegpont pozitív irányba mozog és sebessége pozitív, míg a 2. (b) ábra negatív meredekségű egyenest mutat, mely negatív irányba mozgó tömegpontot ír le negatív sebességgel. A 2. (c) ábra grafinkonja olyan mozgást ír le, mely során a tömegpont először pozitív irányba mozog, majd egy adott pillanatban visszafordul. A grafikon meredekségét elemezve az egyes t időpillanatokban megállapítható, hogy kezdetben pozitív irányba mozgott a tömegpont, majd pedig visszafordult, a debessége negatív lett. A tömegpont gyorsulása ezért negatív volt a mozgás során. Végül a 2. (d) ábra az előző meggondolások alapján egy pozitív irányba gyorsuló tömegpont mozgását írja le.

1.9. Feladat: (HN 2B-24) A 3. ábra egy egyenes úton nyugalomból induló motorkerékpáros sebesség-idő grafikonját mutatja.
(a) Mekkora a motorkerékpáros átlagos gyorsulása a $t_0 = 0$ s és $t = 6$ s időtartamban?
(b) Állapítsuk meg (közelítőleg), hogy mikor éri el a gyorsulás maximális értékét és mekkora a gyorsulás ebben a pillanatban?
(c) Mikor zérus a gyorsulás?
(d) Mikor veszi fel a gyorsulás legnagyobb negatív értékét és mekkora ez az érték?



3. ábra.

Megoldás:
(a) A $[t_0, t]$ s időintervallumban a teljes sebességváltozás $\Delta v = 8$ m/s. Az átlag gyorsulás ezért

$$a = \frac{\Delta v}{t - t_0} . \tag{1.9.1}$$

A számértékek behelyettesítése után $a = 1.3$ m/s^2.
(b) A legnagyobb gyorsulást akkor éri el a motorkerékpáros, amikor a sebesség-idő grafikonban legnagyobb a mindenkori érintő meredeksége. a 3. ábra alapján ez $t \approx 3$ s pillanatban következik be. Ekkor a motorkerékpáros gyorsulásának közelítő értékét az ábráról leolvasható értékek segítségével határozhatjuk meg. Az ábráról leolvasható adatok pontosságát a felrajzolt négyzetrács határozza meg. A gyorsulás meghatározásához szükséges sebességek értékét a szomszédos $t_1 = 2$ s és $t_2 = 4$ s időpillanatokban olvashatjuk le. A sebességek értékét a $t \approx 3$ s pillanatban húzott érintő segítségével határozhatjuk meg: $v_1 = 2$ m/s és $v_2 = 6$ m/s. A maximális gyorsulás tehát:

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} . \tag{1.9.2}$$

Behelyettesítés az értékeket $\overline{a} = 2$ m/s^2 adódik.
(c) Mivel a motorkerékpáros gyorsulását a sebesség-idő grafikon pontjaiban húzott érintők meredeksége jelzi, a vízszintes érintőjű pontok a zérus gyorsulású pillanatoknak felelnek meg. A 3. ábra egyetlen olyan pontja melyben az érintő vízszintes, a $t = 6$ s pillanathoz tartozik.
(d) A motorkerékpáros a legnagyobb negatív értékű gyorsulását a $t = 8$ s pillanatban éri el, mivel ebben a pillanatban a legmeredekebb a grafikon érintője. Megszerkesztve a grafikon érintőjét a (b) feladatrészhez hasonlóan megállapítható gyorsulás közelítő értéke, mely $\overline{a}_n - \approx 2$ m/s^2-nak adódik.

1.10. Feladat: (HN 2B-26) Egy gépkocsi sebessége 9 s alatt 4 m/s-ról egyenletesen 7 m/s-ra növekszik.
(a) Mekkora a kocsi gyorsulása?
(b) Ezután az autó 12 s alatt egyenletesen lassulva megáll. Mekkora a gyorsulás ezen a szakaszon?
(c) Összesen mekkora utat tett meg a 21 s alatt az autó?
(d) Mekkora az átlagsebessége?

Megoldás: Legyenek $t_1 = 9$ s, $v_1 = 4$ m/s, $v_2 = 7$ m/s és $t_2 = 12$ s.
(a) A mozgás első szakaszát leíró gyorsulás

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_1} = \frac{1}{3}\ \text{m/s}^2. \tag{1.10.1}$$

(b) A sebesség időbeli változása

$$v(t) = v_2 + a_2 t_2, \tag{1.10.2}$$

amellyel a megállás tényét is figyelembe véve a

$$0 = 7 + 12 a_2 \tag{1.10.3}$$

egyenlet írható fel. A második szakasz gyorsulása tehát

$$a_2 = -\frac{7}{12}\ \text{m/s}^2. \tag{1.10.4}$$

(c) A megtett út az első szakaszra

$$x_1 = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 39,5\ \text{m}, \tag{1.10.5}$$

a másodikra

$$x_2 = v_2 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 42 \text{ m}, \tag{1.10.6}$$

így az összesen megtett út $81,5$ m.

(d) Az átlagsebesség

$$\overline{v} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = 3,88 \text{ m/s}. \tag{1.10.7}$$

1.11. Feladat: (HN 2A-32) Függőlegesen felfelé hajítunk egy labdát 12 m/s sebességgel. Hol van, mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik

(a) 1 s és

(b) 2 s időpontban az elhajítás után?

Megoldás: A függőleges felfelé hajításra vonatkozó sebesség-idő és hely-idő összefüggések:

$$v(t) = v_0 - gt \tag{1.11.1}$$

és

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.11.2}$$

Behelyettesítés után:

(a) $v(1 \text{ s}) = 2$ m/s felfelé (a pozitív előjel ezt mutatja); $y(1 \text{ s}) = 7$ m;

(b) $v(1 \text{ s}) = -8$ m/s lefelé (a negatív előjel ezt mutatja); $y(1 \text{ s}) = 4$ m.

1.12. Feladat: (HN 2B-33) 50 m mély kútba követ ejtünk. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva halljuk a kő csobbanását! A hang terjedési sebessége 330 m/s.

Megoldás: A h mélységű kút aljára

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1.12.1}$$

idő alatt ér le a kő. A h utat a hang

$$t_2 = \frac{h}{c} \tag{1.12.2}$$

idő alatt teszi meg. Így összesen

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c} = 3,31 \text{ s} \tag{1.12.3}$$

idő múlva hallható a csobbanás.

1.13. Feladat: (HN 2B-35) Feldobunk egy érmét 4 m/s sebességgel. Mennyi idő alatt ér fel 0,5 m magasra. Miért kapunk két eredményt?

Megoldás: Az emelkedés út-idő függvénye:

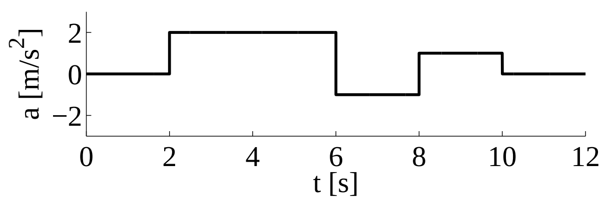
$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.13.1}$$

Az adatokat behelyettesítve a

$$0 = 5t^2 - 4t + 0,5 \tag{1.13.2}$$

másodfokú egyenlet adódik, amelynek megoldásai a $t_1 = 0,155$ s és a $t_2 = 0,644$ s. Azért van két megoldás mert az első időpont után még tovább emelkedik, s a lefele esésnél a második időpontban ugyancsak $0,5$ m magasan lesz.

1.14. Feladat: (HN 2C-54) Egy, az origóból induló test a 4. ábra szerinti gyorsulással egyenesvonalú mozgást végez. Rajzoljuk meg a mozgás sebesség-idő és hely-idő függvényvényeket!



4. ábra.

Tüntessük fel a $t = 2,\ 6,\ 8$ és 10 s időpontokhoz tartozó sebesség és helykoordináták értékét.

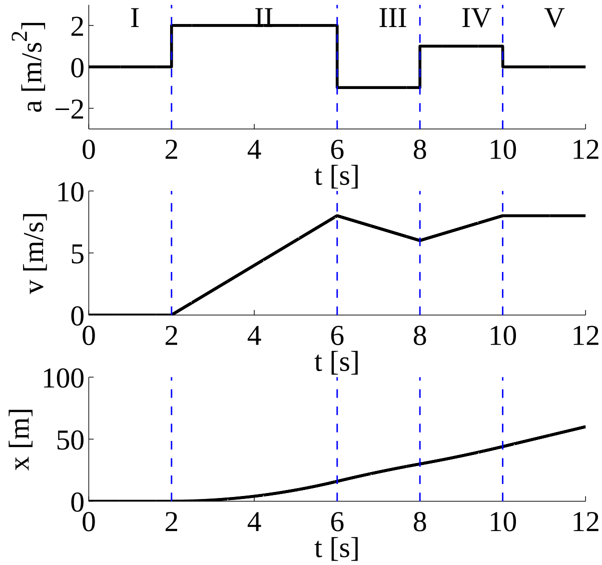
Megoldás: Egyenletesen gyorsuló mozgás esetében a gyorsulás, a sebesség és a megtett út az alábbi egyenletekkel adható meg:

$$a(t) \equiv a_0, \tag{1.14.1}$$

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0), \tag{1.14.2}$$

$$x(t) = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0\,(t - t_0)^2, \tag{1.14.3}$$

ahol a_0 a gyorsulás nagysága (a pozitív iránnyal ellentétesen gyorsuló mozgás esetében negatív), t_0 a mozgás kezdeti időpontja, v_0 a kezdősebesség, x_0 pedig a tömegpont kezdeti koordinátája. A tömegpont mozgását bontsuk fel az 5. ábra alapján I,II,III,IV és V szakaszokra. Az egyes szakaszokban a v_0 kezdősebesség, x_0 koordináta és t_0 időpont az előző szakasz végpontjában



5. ábra.

felvett értékekből határozhatóak meg. (A soron következő összefüggésekben a $\{\xi\}$ jelölés a ξ fizikai mennyiség számértékét jelöli SI mértékegységekben.)

I. szakasz: $\boxed{0<t<2s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 0$ m/s^2, $v_0 = 0$ m/s, $x_0 = 0$ m, $t_0 = 0$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $v(t) = 0$ m/s és $x(t) = 0$ m adódik.
A $t = 2$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(2\text{s}) = 0$ m/s és $x(2\text{s}) = 0$ m.

II. szakasz: $\boxed{2s<t<6s}$. A kezdeti értékek: $a_2 = 0$ m/s^2, $v_0 = 0$ m/s, $x_0 = 0$ m, $t_0 = 2$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 2(\{t\}-2)$ és $\{x(t)\} = (\{t\}-2)^2$ adódik.
A $t = 6$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(6\text{s}) = 8$ m/s és $x(6\text{s}) = 16$ m.

III. szakasz: $\boxed{6s<t<8s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = -1$ m/s^2, $v_0 = 8$ m/s, $x_0 = 16$ m, $t_0 = 6$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 8 - (\{t\} - 6)$ és $\{x(t)\} = 16+8(\{t\}-6)-\frac{1}{2}(\{t\}-6)^2$ adódik.
A $t = 8$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(8\text{s}) = 6$ m/s és $x(8\text{s}) = 30$ m.

IV. szakasz: $\boxed{8s<t<10s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 1$ m/s^2, $v_0 = 6$ m/s, $x_0 = 30$ m, $t_0 = 8$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 6 + (\{t\} - 8)$ és $\{x(t)\} = 30+6(\{t\}-8)+\frac{1}{2}(\{t\}-8)^2$ adódik.
A $t = 10$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(10\text{s}) = 8$ m/s és $x(10\text{s}) = 44$ m.

V. szakasz: $\boxed{10s<t<12s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 0$ m/s^2, $v_0 = 8$ m/s, $x_0 = 44$ m, $t_0 = 10$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 8$ és $\{x(t)\} = 44+8(\{t\}-10)$ adódik.

A $t = 12$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(12\text{s}) = 8$ m/s és $x(12\text{s}) = 60$ m.

1.15. Feladat: (HN 2C-66) Egy leejtett kődarab útjának a talajra érkezés előtti utolsó harmadát $1,0$ s alatt teszi meg. Milyen magasról esett le a kő?

Megoldás: Jelölje h az ejtés magasságát, t a teljes esési időt és $t_0 = 1$ s az utolsó harmadhoz tartozó időt. A szabadon eső tömegpont kinematikai összefüggései alapján:

$$h = \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.15.1}$$

Az út 2/3-át pedig $t - t_0$ idő alatt teszi meg a kődarab:

$$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t-t_0)^2. \tag{1.15.2}$$

A h változó eliminálásával t-re az alábbi másodfokú egyenlet adódik

$$0 = \frac{1}{6}gt^2 - gtt_0 + \frac{1}{2}gt_0^2. \tag{1.15.3}$$

A másodfokú egyenlet két megoldása $t_1 = 5,45$ s, valamint $t_2 = 0,55$ s. A második megoldás fizikailag nem értelmes, mivel $t_2 < t_0$. A t_1 megoldáshoz tartozó magasság:

$$h = 148,51 \text{ m}. \tag{1.15.4}$$

1.16. Feladat: * (HN 2B-40) Az x tengelyen mozgó részecske sebesség-idő függvényét a $v(t) = 4 + 2t - 3t^2$ függvény adja meg. A $t = 0$ időpillanatban a részecske az $x = 8$ m helyen van.

(a) Mi az egyes együtthatók mértékegysége?

(b) Határozzuk meg a mozgás gyorsulás-idő függvényét!

(c) Határozzuk meg a mozgás hely-idő függvényét!

(d) Mekkora a részecske legnagyobb $+x$ irányú sebessége?

Megoldás:

(a) $A = 4$ m/s, $B = 2$ m/s^2, $C = 3$ m/s^3: $v(t) = A + Bt - Ct^2$.

(b) A gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, azaz

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = B - 2Ct = 2 - 6t. \tag{1.16.1}$$

(c) A kezdeti $t = 0$ s időpillanatban a részecske koordinátája $x = 8$ m. A hely-idő függvény a sebesség idő szerinti integrálásával kapható meg a kezdeti feltételek illesztése mellett. Ezt a

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t \tag{1.16.2}$$

összefüggésbol kiindulva a

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^{t} (A + Bt - Ct^2)\mathrm{d}t \tag{1.16.3}$$

határozott integrál kiszámolásával kaphatjuk. Ennek eredménye

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^{t} (A + Bt - Ct^2)\mathrm{d}t = \left[At + \frac{1}{2}Bt^2 - \frac{1}{3}Ct^3\right]_{t_0=0}^{t}, \tag{1.16.4}$$

ahonnan a hely

$$x(t) = x_0 + At + \frac{1}{2}Bt^2 - \frac{1}{3}Ct^3 = 8 + 4t + t^2 - t^3. \tag{1.16.5}$$

(d) A sebesség akkor a legnagyobb, amikor a gyorsulás zérus. Ez a $t = 1/3$ s időpillanatban következik be. A sebesség értéke ekkor $v = 4,33$ m/s.

1.17. Feladat: * (HN 2B-41) Az x tengelyen mozgó részecske helyzetét az $x(t) = a + bt - ct^2$ függvény adja meg. Az együtthatók számértéke SI egységekben: $\{a\} = 2$, $\{b\} = 3$, $\{c\} = 4$,
(a) Adjuk meg az egyes együtthatók dimenzióját!
(b) Határozzuk meg a sebesség-idő függvényt!
(c) Határozzuk meg a gyorsulás-idő függvényt!
(d) Határozzuk meg a részecske maximális x irányú elmozdulását és az ehhez tartozó időpontot is!

Megoldás:
(a) Az egyes együtthatók dimenziója: $[a]$ =m; $[b]$ =m/s; $[c]$ =m/s^2
(b) A sebességet a hely idő szerinti deriváltjaként határozhatjuk meg:

$$\{v(t)\} = \frac{\mathrm{d}\{x\}}{\mathrm{d}t} = 3 - 8t. \tag{1.17.1}$$

(c) A gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltjával egyenlő:

$$\{a(t)\} = \frac{\mathrm{d}\{v\}}{\mathrm{d}t} = -8. \tag{1.17.2}$$

(d) A maximális elmozdulás pillanatában a test sebessége zérus $(\{v(t)\} = 0$, ami a

$$t = \frac{3}{8}\ \mathrm{s}, \tag{1.17.3}$$

pillanatban következik be. A maximális elmozdulás pedig

$$x = \frac{51}{16}\ \mathrm{m}. \tag{1.17.4}$$

Tömegpontok síkbeli mozgása

1.18. Feladat: * Jelölje egy folyó partját az x tengely. A víz a parttal párhuzamosan folyik, az x irányú sebesség a parttól való távolság függvénye, amely a $v_x(y) = ky$ lineáris összefüggéssel adható meg, ahol $0 < k$, y pedig a parttól mért távolság. (A túloldali part sokkal távolabb van, mint a távolság, melyen a sodrási sebességet leíró lineáris összefüggés érvényes.) A parton lévő úszó a parttól d távolságra lévő stéghez szeretne úszni.
(a) Mekkora távolsággal előbb kell a vízbe mennie, ha a folyásirányra merőlegesen állandó u sebességgel fog úszni?
(b) Milyen a lesz a pályagörbe alakja?

Megoldás:
(a) Az úszó a parttól az idő függvényében

$$y(t) = ut \tag{1.18.1}$$

távolságra jut. Közben az x irányú sebessége is folyamatosan változik a

$$v_x(t) = ky = kut \tag{1.18.2}$$

összefüggésnek megfelelően. A mozgás x irányú vetülete lényegében egy állandó gyorsulású mozgással azonosítható, ahol a gyorsulás $a_x = ku$:

$$x = \frac{1}{2} a_x t_s^2. \tag{1.18.3}$$

A sodródás ideje

$$t_s = \frac{d}{u}, \tag{1.18.4}$$

így meghatározható az a távolság is, amellyel az úszónak előrébb kell a vízbe mennie:

$$x = \frac{1}{2} a_x t_s^2 = \frac{1}{2} kut_s^2 = \frac{1}{2}\frac{kd^2}{u}. \tag{1.18.5}$$

(b) A pályagörbe meghatározásához válasszunk olyan koordinátarendszert, hogy a stég a

$$\left[\frac{1}{2}\frac{kd^2}{u};d\right] \tag{1.18.6}$$

koordinátájú pontban legyen. Ekkor az origóból indulva éppen ehhez a ponthoz jut. Az (1.18.1) és (1.18.1) egyenletekből küszöböljük ki a t változót. Ekkor a pályagörbére az

$$y^2(x) - \frac{2ux}{k} = 0 \tag{1.18.7}$$

összefüggést kapjuk, ami egy parabola egyenlete.

1.19. Feladat: Egy repülőgép 360 km/h sebességgel vízszintesen repül. A repülőgépből egy-egy pisztollyal felfelé és lefelé lőnek azonos pontból. Milyen messze van egymástól a két lövedék $t = 0,8$ s múlva? Mindegyik lövedék kezdeti sebessége a repülőgéphez képest $v_0 = 160$ m/s. (A közegellenállás elhanyagolható.)

Megoldás: Vízszintesen mindkét lövedék 360 km/h sebességgel halad, így ez nem befolyásolja a kettejük távolságát. A függőleges irányban mindkettőnek $-g$ gyorsulása van, az egyiknek $+v_0$, a másiknak $-v_0$ a kezdősebessége. Mivel mindkét lövedék ugyanazzal a gyorsulással esik, a távolodásukat a kezdősebességük határozzák meg. A két lövedék közötti távolság tehát

$$d = \left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right) - \left(-v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right) = 2v_0 t = 256 \text{ m}. \tag{1.19.1}$$

1.20. Feladat: (HN: 3B-21) Egy 25 m magas hídról vízszintes irányban hajítunk el egy követ. A kő becsapódási helyét 45°-os irányban látjuk.
(a) Mekkora sebességgel hajítottuk el a követ?
(b) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódott a kő a vízbe?

Megoldás:
(a) A feladat feltétele szerint a kő becsapódási helyét a vízszinteshez képest lefelé 45°-os szög alatt látjuk. Ennek alapján a kő ugyanakkora távolságot tett meg vízszintesen mint függőleges irányban. Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját az eldobás pontjába. Ekkor becsapódás koordinátái: $[x_0, H] = [25; -25]$ m. A v_0 sebességgel elhajított kő mozgását leíró kinematikai egyenletek pedig

$$x(t) = v_0 t \tag{1.20.1}$$

és

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{1.20.2}$$

A becsapódás pillanatában:

$$x_0 = v_0 t \tag{1.20.3}$$

és

$$H = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{1.20.4}$$

Az két egyenletből a hajítás idejére $t = 2,24$ s, az eldobás sebességére pedig $v_0 = 11,18$ m/s adódik.

(b) Az eldobott kő mindenkori sebességének komponensei

$$v_x(t) = v_0 \tag{1.20.5}$$

és

$$v_y(t) = -gt. \tag{1.20.6}$$

A $t = 2,2$ s repülési időt behelyettesítve a sebesség vektora $\mathbf{v} = [11,18;\ 22,36]$ m/s-nak adódik. A becsapódás α szöge a sebességkomponensek segítségével meghatározható a

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = 2 \tag{1.20.7}$$

egyenlet segítségével, amiből $\alpha = 63,44°$ adódik.

1.21. Feladat: Egy $h = 35$m magas torony tetejéről, a vízszinteshez képest $\alpha = 25^0$-os szög alatt ferdén felfelé egy labdát hajítunk el $v_0 = 80$ m/s kezdősebességgel.

(a) Határozzuk meg a földetérésig eltelt időt!

(b) Határozzuk meg a labda földetérési helyének távolságát a toronytól!

(c) Határozzuk meg a labda becsapódási sebességének nagyságát és irányát!

Megoldás:

(a) Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját a torony lábához. A labda x és y koordinátái az idő függvényében ekkor az

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha \tag{1.21.1}$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 + h \tag{1.21.2}$$

összefüggésekkel adhatóak meg. A repülés teljes ideje a

$$0 = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt_0^2 + h \tag{1.21.3}$$

egyenletből határozható meg. A másodfokú egyenlet fizikailag értelmes megoldása

$$t_0 = 7,67\,\text{s}. \tag{1.21.4}$$

(b) A repülési időt behelyettesítve az (1.21.1) egyenletbe megkapjuk a becsapódás távolságát, ami

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos\alpha. \tag{1.21.5}$$

Behelyettesítve az értékeket $d \approx 556,1$ m adódik.

(c) A becsapódás pillanatában sebességvektor komponensei

$$v_x(t_0) = v_0 \cos\alpha \approx 72,5\,\text{m/s} \tag{1.21.6}$$

és

$$v_y(t_0) = v_0 \sin\alpha - g t_0 \approx -42,9\,\text{m/s}. \tag{1.21.7}$$

A sebesség nagysága pedig az egyes komponensek segítségével számolható ki a $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ összefüggéssel. Behelyettesítve a számadatokat $v \approx 84,2$ m/s adódik. A becsapapódás szöge pedig

$$\beta = \text{arctg}\frac{v_y}{v_x} = -30,61^0. \tag{1.21.8}$$

1.22. Feladat: A talajról a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró szögben $v_0 = 50$ m/s nagyságú kezdősebességgel kilövünk egy lövedéket. A lövedék a szemközt lévő függőleges falba csapódik. Milyen magasan van a becsapódás helye, ha a fal $d = 80$ m távolságra van a kilövés helyétől?

Megoldás: A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes és függőleges komponensei a

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha, \tag{1.22.1}$$

és

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{1.22.2}$$

összefüggésekkel adhatóak meg. Helyezzük koordináta-rendszer kezdőpontját a kilövés pontjába. Ekkor a lövedék koordinátái az idő függvényében

$$x(t) = v_0 \cos\alpha t \tag{1.22.3}$$

és

$$y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.22.4}$$

A lövedék repülésének időtartama a

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos\alpha, \tag{1.22.5}$$

egyenlettel határozható meg. Az emelkedési magasság pedig

$$h = y(t_0) = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_0^2. \tag{1.22.6}$$

Az (1.22.5) egyenletből a

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha} \tag{1.22.7}$$

repülési időt kifejezve és behelyettesítve az (1.22.6) egyenletbe $h \approx 29,14$ m emelkedési magasság adódik.

1.23. Feladat: (HN: 3C-29) A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg egy a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt, v_0 kezdősebességgel kilőtt lövedék röppályájának egyenletét és az R lőtávolságot!

Megoldás: Az elhajított test gyorsulásvektora $\mathbf{a} = (0;\ -g)$, a $t = 0$ kezdőpillanathoz tartozó sebesség vektora pedig $\mathbf{v_0} = (v_0 \cos\theta;\ v_0 \sin\theta)$. A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes komponense

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta, \tag{1.23.1}$$

míg a függőleges komponense

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt. \tag{1.23.2}$$

A koordináta-rendszer kezdőpontját a hajítás pontjába választva, az eldobott test $\mathbf{r}(t) = (x(t);\ y(t))$ helyvektorának komponensei

$$x(t) = v_0 t \cos\theta, \tag{1.23.3}$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.23.4}$$

A pálya általános egyenletét megkapjuk, ha a fenti két egyenletből (melyeket a röppálya paraméteres egyenleteinek is nevezhetünk) kiküszöböljük a t paramétert. Ekkor a röppálya általános egyenlete:

$$y(x) = x \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}. \tag{1.23.5}$$

Az 1.23.5 egy száraival lefelé álló parabolát ír le, amely átmegy az origón. A lőtávolságnak megfelelő $x = R$ koordinátában az y emelkedési magasság zérus, vagyis a lőtávolságot az $y(x = R) = 0$ egyenlet megoldásával kaphatjuk meg:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \tag{1.23.6}$$

Megjegyzés: Adott v_0 és g esetén a lőtávolság akkor a legnagyobb, ha $\sin 2\theta = 1$. Ebből a $\theta = 45°$-os szög következik.

1.24. Feladat: * (HN: 3C-30) A ferde hajítás röppálya egyenletének differenciálásával mutassuk meg, hogy a maximális lőtávolságot $\theta = 45°$ kilövési szög esetén érjük el!

Megoldás: A hajítási távolság mint a θ kilövési szög függvénye az (1.23.6) egyenlettel adott. A függvénynek szélsőértéke van, ha az elsőrendű derivált nulla, azaz

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = 0. \tag{1.24.1}$$

A differenciálás műveletét elvégezve:

$$0 = 2\frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta. \tag{1.24.2}$$

Az egyenletet megoldva, a hajítási szögre $\theta = 45°$ adódik. Egy függvény szélsőértéke azonban a lokális maximum mellett jelenthet lokális minimumot is. Ahhoz, hogy biztosan állíthassuk, hogy egy függvény szélsőértéke lokális maximumnak felel meg, meg kell vizsgálnunk a függvény másodrendű deriváltját is a kérdéses pontban.

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\theta^2} = -4\frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \tag{1.24.3}$$

A másodrendű derivált a $\theta = 45°$ helyettesítési értékben negatív, ezért a talált szélsőérték valóban egy lokális (esetünkben globális) maximumot találtunk.

1.25. Feladat: (HN: 3C-32) Határozzuk meg, hogy milyen θ kilövési szög esetén lesz egy lövedék D lőtávolsága egyenlő a H emelkedési magassággal?

Megoldás: A lövedék $y(x)$ röppályája az (1.23.5) egyenlettel adható meg, a hajítás távolságát pedig az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg egy korábbi feladatban. Az emelkedés H magasságát a $H = y(\frac{D}{2})$ összefüggés adja meg, azaz

$$H = \frac{D}{2}\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{4v_0^2 \cos^2\theta}. \tag{1.25.1}$$

A feladat szövegének megfelelően a $D = H$ feltételből a

$$\cos\theta = \frac{1}{4}\sin\theta \tag{1.25.2}$$

trigonometriai egyenlet adódik. Ennek fizikailag értelmes megoldása:

$$\theta = 76^\circ. \tag{1.25.3}$$

1.26. Feladat: (HN: 3C-38) Egy szöcske vízszintes irányban legfeljebb $R_{max} = 1$ m távolságra tud elugrani. Feltételezve, hogy az elugráshoz szükséges idő elhanyagolható, határozzuk meg, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel halad a szöcske, ha mindig a maximális távolságba ugrik!

Megoldás: A vízszintes hajítás R távolságát egy korábbi feladatban az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg. A hajítási távolság a maximális értékét (a röppálya szimmetria-tulajdonságai miatt) a $\theta = 45^\circ$ hajítási szög mellett veszi fel:

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \tag{1.26.1}$$

Ebből az ugrás sebessége

$$v_0 = \sqrt{R_{max} g}. \tag{1.26.2}$$

A szöcske vízszintes haladási sebességét a v_0 sebesség vízszintes komponense asja meg. Mivel a hajítási szög $\theta = 45^\circ$, így

$$v_x = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{R_{max} g}{2}} \tag{1.26.3}$$

adódik.

1.27. Feladat: (HN 3C-39) Egy lövedéket θ kilövési szöggel lövünk ki. Határozzuk meg, hogy a lövedék röppályájának tetőpontja mekkora φ szög alatt látszik a kilövési pontból!

Megoldás: A korábbi feladatok megoldásaiból tekintsük a hajítási röppálya (1.23.5 egyenletét és az (1.23.6) egyenlettel adott hajítási távolságot. A pálya szimmetria-tulajdonságai miatt a röppálya tetőpontjának x koordinátája

$$x = \frac{D}{2} = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta. \tag{1.27.1}$$

Az ehhez tartozó $y = H$ emelkedési magasság pedig

$$H = y\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\theta. \tag{1.27.2}$$

Az (1.27.1) és (1.27.2) egyenletek segítségével

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta \tag{1.27.3}$$

adódik a keresett szögre.

1.28. Feladat: ** A falhoz támasztott L hosszúságú létra földdel érintkező P pontját v_0 állandó sebességgel mozgatjuk az x tengely mentés, pozitív irányban. Az xy sík merőleges a falra, az x koordináta pedig a faltól mért távolságot méri. A P pont a $t = 0$ időpillanatban legyen az x_0 koordinátájú helyen.

(a) Adjuk meg a létra felső A pontjának sebességét és

(b) gyorsulását az idő függvényében!

Megoldás:

(a) Az alsó pont helye az idő függvényében: $x_P(t) = v_0 t + x_0$. Ha az A pont nem válik el a faltól, az A pont $y_A(t)$ koordinátája és a P pont vízszintes $x_P(t)$ koordinátája között az alábbi összefüggés érvényes:

$$x_P^2(t) + y_A^2(t) = L^2, \tag{1.28.1}$$

ahonnan $y_A(t) = \sqrt{L^2 - x_P^2(t)}$ adja meg a legfelső pont talajtól mért távolságát. Az A pont sebességét az (1.28.1) egyenletet idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$x_P(t)\dot{x}_P(t) + y_A(t)\dot{y}_A(t) = 0 \tag{1.28.2}$$

Az egyenletben az A pont sebessége $v_A(t) = \dot{y}_A(t)$ a P pont sebessége pedig $v_P(t) = \dot{x}_P(t) \equiv v_0$. A felső pont sebessége tehát

$$v_A(t) = \dot{y}_A(t) = -\frac{x_P(t)\dot{x}_P(t)}{y_A(t)} = -\frac{(v_0 t + x_0)v_0}{\sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2}}. \tag{1.28.3}$$

Megjegyzés: Az $y(t)=\sqrt{L^2-x^2(t)}$ függvény explicit idő szerinti deriválásával hasonlóan a fenti végeredményhez juthatunk.
(b) Az A pont gyorsulását az

$$a_P(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_y(t)=-\frac{v_0^2\sqrt{L^2-(v_0t+x_0)^2}+\frac{(v_0t+x_0)^2v_0^2}{\sqrt{L^2-(v_0t+x_0)^2}}}{L^2-(v_0t+x_0)^2} \tag{1.28.4}$$

összefüggéssel számolhatjuk ki.

1.29. Feladat: ** Egy kétágú létra egyik szárának alsó pontját (az origóban) rögzítjük, a másik szár alsó pontját pedig állandó v_0 sebességgel vízszintesen mozgatjuk az x tengely mentén, pozití irányba. Ennek következtében a létra szétnyílik. A mozgó alsó P pont a $t=0$ időpillanatban legyen az x_0 koordinátájú helyen. Mekkora a létra felső A pontjának $\mathbf{v_A}$ sebessége az idő függvényében? A létra szárai L hosszúságúak.

Megoldás: A P pont x koordinátája az idő függvényéban: $x_P(t)=v_0t+x_0$. A létra szimmetriatulajdonságai miatt az A pont mozgásának x irányú vetülete $v_0/2$ sebességű mozgással írható le:

$$x_A(t)=\frac{1}{2}(v_0t+x_0). \tag{1.29.1}$$

MIvel a létra baloldali szára nem nyúlik meg:

$$x_A^2(t)+y_A^2(t)=L^2 \tag{1.29.2}$$

ahol $y(t)=\sqrt{L^2-x_f^2(t)}$ a felső pont talajtól való távolsága. Az (1.29.2) egyenletet idő szerint deriválva kapjuk a

$$x_A(t)\dot{x_A}(t)+y_A(t)\dot{y_A}(t)=0 \tag{1.29.3}$$

egyenletet, ahol az A pont x irányú sebessége $v_x(t)=\dot{x_A}(t)=v_0/2$, valamint az y irányú sebessége

$$v_y(t)=\dot{y_A}(t)=-\frac{x_A(t)\dot{x_A}(t)}{y_A(t)}=-\frac{\frac{1}{4}(v_0t+x_0)v_0}{\sqrt{L^2-\frac{1}{4}(v_0t+x_0)^2}}. \tag{1.29.4}$$

1.30. Feladat: ** Egy $2l$ szélességű folyó az x tengely mentén helyezkedik el úgy, hogy az x tengely a folyó gometriai középvonala. A folyó sebességprofilja a partvonalra merőleges y koordináta függvényében

$$V(y)=v_0\left(1-\frac{y^2}{l^2}\right). \tag{1.30.1}$$

Az koordiná-rendszer origójából (a folyó közepéről) a partra merőleges irányban, állandó u sebességgel kezd el úszni egy ember.

(a) Mekkora távolsággal sodródik le az úszó a folyó mentén?

(b) Milyen az úszó mozgásának pályagörbéje?

Megoldás:

(a) Az úszó y koordinátája az idő függvényében

$$y = ut, \tag{1.30.2}$$

így az x tengely irányú sebesség az idő függvényében

$$v_x(t) = V(y(t)) = v_0 \left(1 - \frac{u^2t^2}{l^2}\right) \tag{1.30.3}$$

összefüggéssel adható meg. A part eléréséhez $t_0 = l/u$ idő szükséges. Az x tengely irányú d elmozdulás az x irányú sebességkomponens integrálásával kapjuk meg:

$$x(t) = \int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t v_0 \left(1 - \frac{u^2t'^2}{l^2}\right) \mathrm{d}t' = \left[v_0 t - \frac{1}{3} v_0 \frac{u^2t'^3}{l^2}\right]_0^t = v_0 t' - \frac{1}{3} v_0 \frac{u^2t'^3}{l^2}. \tag{1.30.4}$$

A partra úszás alatt az úszó $d = x(t_0)$ távolsággal sodródik le a folyó mentén. Rövid számolással

$$d = \frac{2}{3}\frac{lv_0}{u} \tag{1.30.5}$$

adódik.

(b) Az úszó pályájának paraméteres egyenletét az (1.30.2) és (1.30.4) egyenletek adják meg. A pályagörbe általános egyenletét a t paraméter kiküszöbölésével határozhatjuk meg.

$$x(y) = v_0 \frac{y}{u} - \frac{1}{3} v_0 \frac{y^3}{ul^2} \tag{1.30.6}$$

* *Megjegyzés:* Általános esetben egy görbe egyenlete $f(x, y) = 0$ implicit formában adható meg.

1.31. Feladat: Egy kocsi vízszintes pályán $v = 30$ m/s állandó sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A mozgó kocsiról egy lövedéket lőnek ki úgy, hogy miután a kocsi $s = 80$ m-t megtett, a lövedék visszaesik a kocsira.

(a) Mennyi a repülési idő?

(b) A kocsihoz képest mekkora relatív sebességgel és a vízszinteshez képest mekkora szög alatt kellett a lövedéket kilőni?

Megoldás:
(a) A lövedék repülési ideje

$$t_0 = \frac{s}{v}. \tag{1.31.1}$$

Behelyettesítve a számadatokat $t_0 \approx 2,67$ s adódik.
(b) A lövedéknek a kocsihoz képest csak függőleges irányú sebessége lehetett. Mivel t_0 idő múltán ismét a kocsira esett vissza a lövedék, t_0 idő elteltével a lövedék y koordinátája nulla lesz:

$$y(t_0) = 0 = v_y t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2. \tag{1.31.2}$$

Ebből a lövedék sebességének függőleges komponense:

$$v_y = \frac{1}{2} g t. \tag{1.31.3}$$

adódik. Behelyettesítve a számadatokat $v_y = 13,3$ m/s adódik.

1.32. Feladat: Egy lövedéket $v = 330$ m/s vízszintes irányú kezdősebességgel egy $h = 80$ m magas szikla tetejéről lőnek ki.
(a) Mennyi ideig tart, amíg a lövedék a Föld felszínére érkezik?
(b) A szikla aljától mekkora távolságban érkezik a Földre?
(c) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódik a talajba?

Megoldás:
(a) A lövedék függőleges irányban egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A repülés ideje

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{1.32.1}$$

Behelyettesítve a számadatokat $t_0 \approx 4$ s adódik.
(b) A lövedék a szikla aljától

$$x = v t_0 \tag{1.32.2}$$

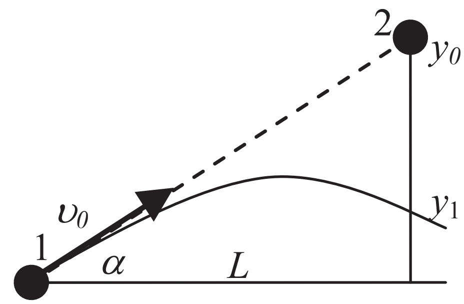
távolságban érkezik a Földre. Behelyettesítve a számadatokat $x \approx 132$ m adódik.
(c) A becsapódás pillanatában a sebességkomponensek $v_x = 330$ m/s, valamint $v_y = g t_0 = 40$ m/s. Így a sebesség nagysága

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 332,4\,\mathrm{m/s}, \tag{1.32.3}$$

míg a becsapódás szöge

$$\alpha = \mathrm{arctg} \frac{v_y}{v_x} \approx 6,9^0. \tag{1.32.4}$$

1.33. Feladat: A 6. ábrán látható két tömegpontot egyszerre indítjuk úgy, hogy miközben a 2. tömegpontot elengedjük, az 1. tömegpontot a 2. tömegpont kezdeti helyzetének a irányába lőjük v_0 kezdeti sebességgel. A két test vízszintes távolsága L. Az (L, α, v_0) adatokkal:



6. ábra.

(a) Fejezzük ki a 2. test kezdeti y_0 magasságát!

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha a két test pályája metszi egymást, akkor a két test **mindig** találkozik a pályák (L, y_1) metszéspontjában!

(c) Fejezzük ki a találkozás t időpontját!

(d) Mekkora az 1. test y_1 magassága a találkozás pillanatában?

Megoldás:

(a) A 2. test y_0 magassága

$$y_0 = L\mathrm{tg}\alpha. \tag{1.33.1}$$

(b) Az 1. test emelkedési magassága az idő függvényében

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2, \tag{1.33.2}$$

míg a 2. test esési magassága

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.33.3}$$

Tekintettel arra, hogy

$$L = v_0 t \cos\alpha, \tag{1.33.4}$$

és ezt (az 1.33.2) egyenletbe helyettesítve a két emelkedési magasság egyenlősége közvetlenül látható.

(c) A találkozásig eltelt idő

$$t = \frac{L}{v_0\cos\alpha}. \tag{1.33.5}$$

(d) A találkozási idő behelyettesítésével a találkozási magasság

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{1.33.6}$$

Tömegpontok térbeli mozgása

1.34. Feladat: ** Egy pontszerűnek tekinthető labda a térben $\mathbf{v} = at^2\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j} + ct^2\mathbf{k}$ m/s sebességgel mozog; $a = -2,5$ m/s^3, $b = 4$ m/s^3, $c = 1$ m/s^3. Mekkora utat tesz meg a labda mozgása első $t = 5$ másodperce alatt?

Megoldás: Az út a pálya ívhossza, azaz

$$s = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{(at^2)^2 + (bt^2)^2 + (ct^2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^t \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3}\left[t^3\right]_0^t = 200,83\mathrm{m}. \tag{1.34.1}$$

2. Feladatok körmozgás tárgyköréből

Kerületi sebesség

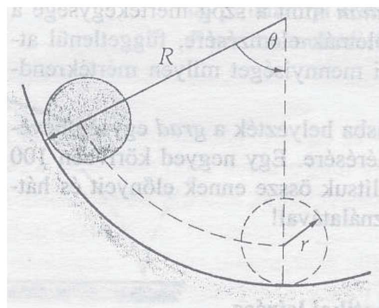
2.1. Feladat: (HN 11C-14) Egy kerék a vízszintes talajon csúszás nélkül $v = 6$ m/s sebességgel gördül. Határozzuk meg a kerületén lévő részecske talajhoz viszonyított pillanatnyi sebességét, mikor a részecske a kerék elülső pontjában van!

Megoldás: A haladó mozgásból eredően a kerék minden egyes pontja rendelkezik $v_x = 6$ m/s vízszintes irányú haladómozgással. Ugyanakkor a kerületi pontok ugyancsak $v_k = 6$ m/s sebességgel mozognak a kerék középpontja körül. Az elülső pont kerületi sebességének iránya lefelé mutat, azaz $v_y = -6$ m/s. A részecske pillanatnyi sebességvektora tehát

$$\mathbf{v} = (v_x; v_y) = (6; -6)\,\mathrm{m/s}. \tag{2.1.1}$$

Megjegyzés: A tiszta gördülés feltétele, hogy a kerék legalsó pontja ne mozogjon a talajhoz képest. A legalsó pont kerületi sebessége épp ellentétes irányú, de azonos nagyságú, mint a kerék haladó mozgásából származó sebessége. A két mozgás „összegének” eredménye, hogy a kerék legalsó pontjának sebessége zérus a talajhoz képest.

2.2. Feladat: (HN 11C-15) Egy r sugarú henger csúszás nélkül gördül egy függőleges síkban lévő R sugarú körpályáján a 7. ábra szerint. Mutassuk meg, hogy a henger saját tengelye körüli δ elfordulási szöge és a henger tengelyének θ szögelmozdulása között fennáll, hogy $\delta = (R-r)\theta/r$!



7. ábra.

Megoldás: Az r sugarú henger középponja által súrolt s ív hosszúságát kétféle módon határozhatjuk meg. Egyrészt a θ szöget felhasználva

$$s = (R-r)\theta, \tag{2.2.1}$$

adódik, másrészt a δ szög- segítségével

$$s = r\delta. \tag{2.2.2}$$

A két egyenletből

$$\delta = \frac{(R-r)\theta}{r}, \tag{2.2.3}$$

adódik, ami éppen a feladat állítása.

Szöggyorsulás

2.3. Feladat: Egy $R = 30$ cm sugarú kerékre szíjat csévéltünk. Míg a kerék $f = 2{,}0$ 1/s-os fordulatszámról egyenletesen lassulva leáll, $s = 25$ m szíj tekeredik le róla.

(a) A folyamat alatt hány fordulatot tesz meg a kerék?

(b) Mekkora a kerék szöggyorsulása?

Megoldás: A kezdeti szögsebesség $\omega_0 = 2\pi f \approx 12,56$ rad/s.

(a) A fordulatok N száma az

$$N = \frac{s}{2R\pi} \tag{2.3.1}$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat $N \approx 13,26$ adódik.

(b) Az N fordulat megtétele alatt a kerék

$$\varphi_0 = 83,33\,\mathrm{rad} \tag{2.3.2}$$

szöget fordul el. A forgásra vonatkozó kinematikai egyenletek segítségével felírhatjuk a mindenkori

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \tag{2.3.3}$$

szögsebességet és az elfordulás

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \tag{2.3.4}$$

szögét. A megállás pillanatában $\omega(t) = 0$, ekkor $\varphi(t) = \varphi_0$ rad. A

$$0 = \omega_0 + \beta t \tag{2.3.5}$$

és a

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \tag{2.3.6}$$

egyenletrendszert megoldva a β és t ismeretlenekre, megkaphatjuk a szöggyorsulás értékét:

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\varphi} \approx -0,95\,\mathrm{rad/s^2}. \tag{2.3.7}$$

2.4. Feladat: Egy autó egyenletesen gyorsulva álló helyzetből 15 m/s-os sebességre tesz szert 20 s alatt.

(a) Mekkora a kerék szöggyorsulása, ha egy kerekének sugara $1/3$ m és tisztán gördül a gyorsulás alatt?

(b) Hány fordulatot tett meg a kerék a folyamat alatt?

Megoldás:

(a) Az autó gyorsulása

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0,75\,\mathrm{m/s^2}. \tag{2.4.1}$$

Mivel $a = R\beta$ (a kerék tisztán gördül), a szöggyorsulás értéke

$$\beta = 2,25\,\mathrm{rad/s^2}. \tag{2.4.2}$$

(b) A szögelfordulás nagysága pedig

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2 = 450 \text{ rad}, \tag{2.4.3}$$

amelyből a megett fordulatok száma

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = 71,6. \tag{2.4.4}$$

Centripetális és tangenciális gyorsulások

2.5. Feladat: (HN: 4C-25) Egy versenyautó $v_0 = 210$ km/h sebességgel mozog a $s = 2$ km kerületű körpályán, majd egy teljes kört megtéve egyenletesen lassítva megáll.
(a) Mekkora az autó tangenciális gyorsulása?
(b) Mekkora a cenctripetális gyorsulás $d = 1$ km-rel a megállás előtt?
(c) Mekkora ebben a pillanatban az eredő gyorsulás?

Megoldás:
(a) Az egyenletes kerületi (a_t tangenciális) gyorsulás hatására a versenyautó

$$t_0 = \frac{v_0}{|a_t|} \tag{2.5.1}$$

idő alatt áll meg. Ez alatt az idő alatt a versenyautó

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2}|a_t|t_0^2 = \frac{v_0^2}{2|a_t|}, \tag{2.5.2}$$

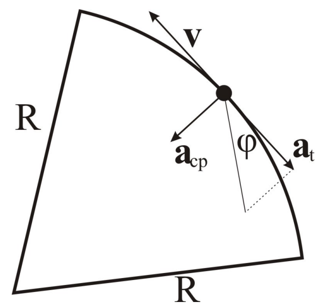
utat tesz meg. A mozgás során az autó gyorsulása ezért:

$$|a_t| = \frac{v_0^2}{2s} \approx 0,85 \text{m/s}^2. \tag{2.5.3}$$

Mivel az autó sebessége 0-ra csökken a mozgás során, a megszokott konvenciókkal $a_t \approx -0,85$ m/s^2.
(b) Abban a pillanatban, amikor az autónak még d távolságot kell megtennie a megállásig, a hátralévő út megtételéhez még további

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d}{|a_t|}} \tag{2.5.4}$$

idő szükséges. A megálláshoz szükséges időt úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbb módon, ha a lassulás folyamatát időben visszafelé tekintjük. Ekkor egy álló helyzetből, $-a_t$ gyorsulással



8. ábra.

mozgó autó mozgását követjük nyomon. A d távolság megtételéig éppen t_0 idő szükséges. A versenyautó sebességét is hasonló gondolatmenettel számolhatjuk ki ebben a pillanatban:

$$v = |a_t|t_0 \approx 41,3 \text{ m/s}. \tag{2.5.5}$$

Ebben a pillanatban a centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{2\pi v^2}{d} \approx 5,36 \text{m/s}^2. \tag{2.5.6}$$

(c) Az eredő gyorsulás pedig

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} \approx 5,43 \text{m/s}^2. \tag{2.5.7}$$

2.6. Feladat: (HN: 4C-26) Egy $R = 300$ m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó $a_t = -1,2$ m/s^2 gyorsulással fékezni kezd. Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége $v = 15$ m/s. Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére!

Megoldás: A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \approx 0,75 \text{ m/s}^2. \tag{2.6.1}$$

Az autó a_t gyorsulása a tangenciális gyorsulás, iránya pedig a v sebességgel ellentétes. A tangenciális és centripetális gyorsulás egymásra merőlegesek. Az eredő gyorsulás érintő irányával bezárt φ szögére érvényes (lásd a 8. ábrát), hogy

$$\text{tg}\,\varphi = \left|\frac{a_{cp}}{a_t}\right| = 0,625. \tag{2.6.2}$$

Így az eredő gyorsulás $\varphi = 32^0$ szöget zár be az érintővel, nagysága pedig $|a| = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} \approx 1,4$ m/s^2.

2.7. Feladat: (HN: 4C-27) A fonálra kötött labdát $R = 0,3$ m sugarú, a talaj felett $h = 1,2$ m magasban levő, vízszintes síkú körpályán állandó sebességgel pörgetünk. A fonal hirtelen elszakad és a labda attól a ponttól $s = 2$ m távolságban ér talajt, amelyet úgy kapunk, hogy az elszakadás pillantában elfoglalt helyzetét függolegesen a talajra vetítjük. Mekkora volt a labda centripetális gyorsulása, amíg körmozgást végzett?

Megoldás: A kötél elszakadásának pillanátában a labda vízszintes irányú sebessége $v = R\omega$, ahol ω a körmozgás körfrekvenciája. A fonál elszakadása után a labda s m utat tesz meg

$$t_0 = \frac{s}{R\omega} \tag{2.7.1}$$

idő alatt. Másrészt a labda függőleges irányban h m magasságból szabadon esik, ezért

$$h = \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{g s^2}{2\omega^2 R^2}. \tag{2.7.2}$$

A fonál elszakadásáig körmozgás körfrekvenciája tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{g s^2}{2 h R^2}} \tag{2.7.3}$$

volt. Ebből a centripetális gyorsulás könnyen meghatározható:

$$a_{cp} = R\omega^2 = \frac{g s^2}{2hR} \approx 55,6\,\mathrm{m/s^2}. \tag{2.7.4}$$

2.8. Feladat: (HN 4C-28) Egy lövedéket a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt v_0 sebességgel lövünk ki. Fejezzük ki a röppálya tetőpontjához tartozó R görbületi sugarat a v_0, θ és g függvényében!

Megoldás: A pálya tetőpontján a pályát érintő sebességkomponens $v_x = v_0 \cos\theta$. A lövedék centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = \frac{v_x^2}{R}. \tag{2.8.1}$$

A cetripetális gyorsulást a nehézségi gyorsulás biztosítja, ezért $a_{cp} = g$. A két összefüggésből a görbületi sugár kifejezhető:

$$R = \frac{v_x^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g}. \tag{2.8.2}$$

3. Feladatok a dinamika tárgyköréből

Newton három törvénye

3.1. Feladat: Három azonos m tömegű gyöngyszemet fonálra fűzünk, egymástól kis távolságokban a fonálhoz rögzítünk, és az elhanyagolható tömegű fonál végét ujjunkkal fogva függőlegesen lógatunk a g homogén nehézségi erőtérben. Majd a t_0 időpillanattól kezdve a gyorsulással emeljük a fonál végét. Mekkora erő ébred az egyes fonalszakaszokban?

Megoldás: Számozzuk meg a gyöngyszemeket. A legalsó legyen az 1-es, a középső a 2-es, a felső a 3-as. A koordinátarendszer y tengelye mutasson felfele. Mindhárom gyöngyszem a gyorsulással mozog felfele, így a koordinátarendszerben pozitív értékű. A nehézségi gyorsulás lefele mutat, így negatív: $-g$.
Az 1-es testre a K_1 kötélerő (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) hat felfele;
a 2-es testre hat a $-K_1$ kötélerő lefele (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) és a K_2 kötélerő felfele (a 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon);
a 3-as testre hat a $-K_2$ kötélerő lefele (az 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon) és az F kötélerő felfele (ezt mi fejtjük ki).
A mozgásegyenletek rendre (1-2-3 testre):

$$ma = K_1 - mg, \tag{3.1.1}$$

$$ma = K_2 - K_1 - mg, \tag{3.1.2}$$

$$ma = F - K_2 - mg. \tag{3.1.3}$$

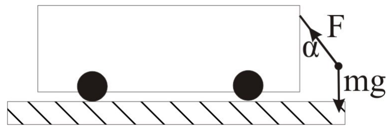
Az egyenletrendszerből a keresett kötélerők:

$$K_1 = m(a+g), \tag{3.1.4}$$

$$K_2 = ma + K_1 + mg = 2m(a+g), \tag{3.1.5}$$

$$F = ma + K_2 + mg = 3m(a+g). \tag{3.1.6}$$

Megjegyzés: Gyakorlásként általánosítsa a feladatot különböző számú és tömegű gyöngyszemekre!



9. ábra.

3.2. Feladat: Egy mozgó kocsin rögzített fonál végén egy $m = 2$ kg tömegű test lóg. A fonal szakítási szilárdsága $F_{max} = 30$ N. Mekkora egyenletes gyorsulással mozoghat a kocsi, hogy a fonal még éppen el ne szakadjon?

Megoldás: Jelölje α azt a szöget, amelyet a gyorsítás alatt a kötél bezár a függőlegessel (lásd a 9. ábrát). Ekkor az F kötélerő vízszintes komponense gyorsítja a testet

$$ma = F \sin\alpha, \tag{3.2.1}$$

míg a függőleges komponens a súlyerővel tart egyensúlyt

$$mg = F \cos\alpha. \tag{3.2.2}$$

A két egyenletből a gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = \sqrt{\frac{F_{max}^2}{m^2} - g^2}. \tag{3.2.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a_{max} \approx 11,18$ m/s^2 adódik.

3.3. Feladat: (HN 5B-19) Nyugalomból induló test súrlódásmentesen csúszik le a vízszintessel $\alpha = 30^0$-os szöget bezáró lejtőn.
(a) Határozzuk meg azt a t_0 időpillanatot amikor a test eléri a $v_0 = 50$ m/s-os sebességet?
(b) Mekkora s távolságba jut el ezalatt a test?

Megoldás:
(a) Az m tömegű test mozgásegyenlete

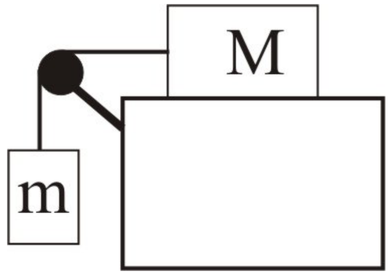
$$ma = mg \sin\alpha, \tag{3.3.1}$$

amiből a test gyorsulása

$$a = g \sin\alpha. \tag{3.3.2}$$

A test sebessége az idő függvényében

$$v(t) = g \sin\alpha t. \tag{3.3.3}$$



10. ábra.

A t_0 időpillanatban a test eléri a v_0 sebességet, azaz $v(t_0) = v_0$. A sebesség eléréséhez szükséges idő pedig $t_0 = v_0/(g \sin\alpha)$. Behelyettesítve a számadatokat $t_0 = 10$ s adódik.
(b) A t_0 idő alatt megtett út

$$s = \frac{1}{2} g t_0^2 \sin\alpha. \tag{3.3.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $s = 250$ m adódik.

3.4. Feladat: (HN: 5B-33) Az m és $M = 8$ kg tömegű hasábokat az 10. ábrán látható elrendezésben fonallal kötünk össze. A csiga tengelysúrlódása és az érintkező felületek közötti súrlódás elhanyagolható.
(a) Mekkora az alsó test m tömege, ha a testek gyorsulása $a = 2$ m/s^2?
(b) Mekkora K erő feszíti a fonalat?

Megoldás:
(a) Mivel a hasábokat összekötő kötél nem nyúlik meg, mindkét hasáb gyorsulása ugyanakkora (lásd a 11. ábrát.) Az egyes hasábok mozgásegyenletei

$$ma = mg - K \tag{3.4.1}$$

és

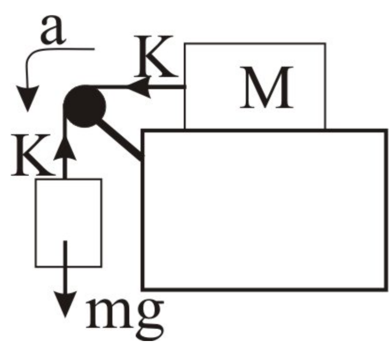
$$Ma = K. \tag{3.4.2}$$

E két egyenletből

$$m = \frac{Ma}{g-a} = 2\,\mathrm{kg} \tag{3.4.3}$$

adódik.
(b) A kötelet feszítő erő pedig

$$K = \frac{mM}{m+M} g = 16\,\mathrm{N}. \tag{3.4.4}$$



11. ábra.

Centripetális erő

3.5. Feladat: Egy $m = 70$ kg tömegű pilóta repülőgépével $R = 1$ km sugarú függőleges síkú pályán $v = 1080$ km/h egyenletes sebességgel köröz. A repülőnek állandóan a teteje néz a körpálya középpontja felé. Mekkora erővel nyomja a pilóta az ülést a körpálya legfelső pontján?

Megoldás: A körpálya legfelső pontjában a pilóta körmozgását az mg súlyerő és a kör közepe felé mutató N támaszerő biztoítja:

$$m\frac{v^2}{R} = mg + N \tag{3.5.1}$$

Ebből az egyenletből az N támaszerő könnyen kifejezhető:

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg = 5600\,\mathrm{N}. \tag{3.5.2}$$

A pilóta az ülést ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú erővel nyomja. (A nyomóerő a pilóta súlyának nyolcszorosa.)

3.6. Feladat: (HN 5B-20) Egy gépkocsi $R = 18$ m sugarú, függőleges síkú, kör alakú domboldalon mozog felfelé. A domb tetején a vezető azt tapasztalja, hogy éppen csak érinti az ülést. Mekkora sebességgel haladt a gépkocsi?

Megoldás: A domb tetején két erő hat a vezetőre, melyek biztosítják a vezető körpályán történő mozgását. A kör közepe felé mutató mg súlyerő, valamint az ülés által kifejtett, ellentétes irányú N támaszerő határozzák meg a vezető gyorsulását, mely (feltéve, hogy az autó nem válik el az úttesttől) a centripetális gyorsulással egyenlő:

$$m\frac{v^2}{R} = mg - N. \tag{3.6.1}$$

Határesetben, amikor a vezető éppen csak érinti az ülést, $N \to 0$. A határesethez tartozó sebesség:

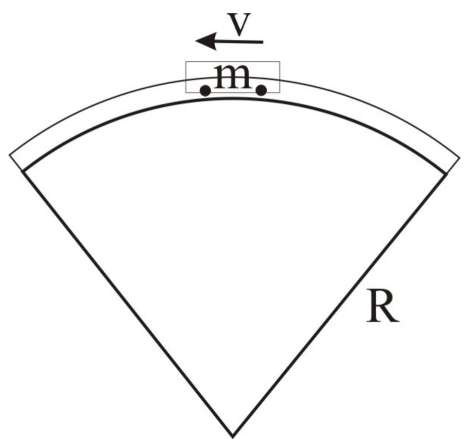
$$v = \sqrt{Rg} \approx 13,41 \text{ m/s}. \tag{3.6.2}$$

3.7. Feladat: (HN 5B-21) A hullámvasút kocsija állandó $v = 6$ m/s-os sebességgel halad át a pálya $R = 6$ m sugarú, függőleges síkú részének tetőpontján a 12. ábrán látható módon. A kocsi és az utasok együttes tömege $m = 1350$ kg.

(a) Mekkora és milyen irányú a kocsi gyorsulása a tetőponton?

(b) Mekkora eredő erő hat ebben a pillanatban a kocsira és az utasokra összesen?

(c) Mekkora erővel nyomja a pálya a kocsit a tetőponton?



12. ábra.

Megoldás:

(a) A kocsi gyorsulása a kör közepe felé (azaz lefelé) mutató centripetális gyorsulással egyenlő, melynek nagysága

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 6\,\text{m/s}^2. \tag{3.7.1}$$

(b) A kocsira ható erők eredőjét a kocsi gyorsulása határozza meg:

$$F = ma_{cp} = 8100\,\text{N}. \tag{3.7.2}$$

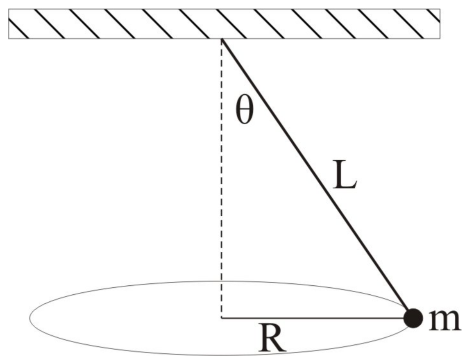
(c) A kocsira ható erők eredője a hullámvasút N támaszerejének és a kocsira ható súlyerőnek a különbsége:

$$F = mg - N. \tag{3.7.3}$$

Felhasználva a centripetális gyorsulás a (3.7.1) kifejezését, valamint a (3.7.2) egyenletet:

$$N = mg - ma_{cp} = 5400\,\mathrm{N}. \tag{3.7.4}$$

3.8. Feladat: (HN 5B-31) Egy L hosszúságú fonállal a mennyezethez erősített testet a 13. ábrán látható módon úgy hozunk mozgásba, hogy a test vízszintes síkú, R sugarú körpályán mozog, miközben a fonál a függőlegessel θ szöget zár be. Fejezzük ki egy fordulat idejét az L és θ paraméterek függvényében!

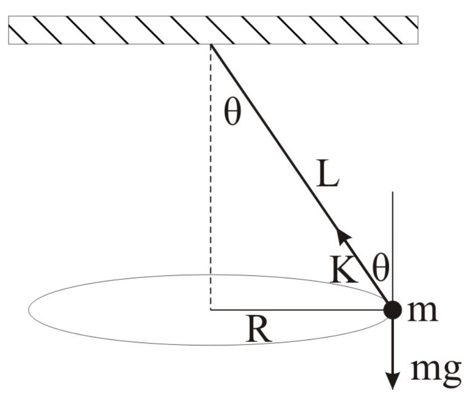


13. ábra.

Megoldás: Jelölje K az m tömegű testre ható kötélerő nagyságát (lásd a 14. ábrát). Mivel a tömegpont nem mozdul el függőlegesen, a súlyerő egyensúlyt tart a kötélerő függőleges komponensével:

$$K \cos\theta = mg, \tag{3.8.1}$$

míg a vízszintes komponens a körpályán történő mozgáshoz biztosítja a szükséges centripetális



14. ábra.

gyorsulást:

$$K\sin\theta = m\frac{v^2}{R}. \tag{3.8.2}$$

A két egyenletből a tömegpont sebessége (felhasználva, hogy $R = L\sin\theta$)

$$v = \sqrt{gL\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}. \tag{3.8.3}$$

Egy fordulat ideje

$$T = \frac{2R\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}. \tag{3.8.4}$$

3.9. Feladat: (HN: 5B-32) Egy $L = 1,4$ m hosszú fonálinga függőleges síkban mozog. Amikor az ingatest sebessége $v = 2,2$ m/s, akkor a fonál $\alpha = 20^0$-os szöget zár be a függőlegessel. Határozzuk meg ebben a pillanatban

(a) az ingatest a_{cp} centripetális gyorsulását,

(b) az ingatest a_t tangenciális gyorsulását,

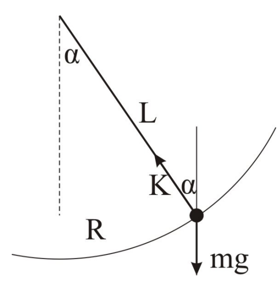
(c) a fonalat feszítő K erőt, ha az ingatest tömege $m = 600$ g!

Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás nagysága:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{L} \approx 3,45\mathrm{m/s}^2. \tag{3.9.1}$$

(b) A tangenciális gyorsulást a súlyerő tangenciális komponense határozza meg (a kötélerő merőleges a körpálya érintőjére, ahogy azt a 15. ábra mutatja):



15. ábra.

$$a_t = g\sin\alpha \approx 3,40\mathrm{m/s}^2. \tag{3.9.2}$$

A körmozgást a K kötélerő és a súlyerő fonálirányú komponense — $mg\cos\alpha$ — különbsége biztosítja. A mozgásegyenlet a radiális komponensekre

$$m\frac{v^2}{L} = K - mg\cos\alpha. \tag{3.9.3}$$

Az egyenletből kifejezhető a K kötélerő:

$$K = m\frac{v^2}{L} + mg\cos\alpha \approx 7,7\mathrm{N}. \tag{3.9.4}$$

Súrlódási erő

3.10. Feladat: Vízszintes asztallapon két tégla fekszik egymáson. Minimálisan mekkora F erővel kell hatni az alsó téglára, hogy az kicsússzon a felső alól? A súrlódási tényező az asztallap és a tégla, valamint a tapadási súrlódási együttható a két tégla között egyaránt $\mu = 0,4$, a két tégla össztömege pedig $m = 5$ kg.

Megoldás: Jelölje a felső test tömegét m_1, az alsó test tömegét pedig m_2. Ekkor $m = m_1 + m_2 = 5$ kg. Mivel a megcsúszás határát keressük, így a két test gyorsulása megegyezik. A felső téglára $F_{s1} = \mu m_1 g$ tapadási erő hat, mellyel a tégla mozgásegyenlete:

$$m_1 a = F_{s1} = \mu m_1 g \tag{3.10.1}$$

Az alsó téglára a felső tégla által kifejtett F_{s1} tapadási erő mellett, az alsó tégla és asztallap között fellépő $F_{s2} = \mu(m_1 + m_2)g$ csúszási súrlódási erő is hat, melyek fékezni próbálják az alsó tégla mozgását. Az alsó tégla mozgásegyenlete:

$$m_2 a = F - \mu m_1 g - \mu(m_1 + m_2)g = F - \mu m_1 g - \mu m g. \tag{3.10.2}$$

Az első egyenletből kifejezve az a gyorsulást

$$a = \mu g \tag{3.10.3}$$

adódik. Ez az m_1 test maximális gyorsulását jelenti. A fenti egyenletből az F erő a minimális értéke

$$F = (m_1 + m_2)a + \mu(m_1 + m_2)g = ma + \mu m g = 2\mu m g = 40\,\mathrm{N}. \tag{3.10.4}$$

Megjegyzés: A feladatmegoldásból látszik, hogy a kérdés megválaszolásához csak az össztömegre volt szükség. Kisebb vagy nagyobb erő alkalmazásakor az egyenletekből levont következtetések módosulhatnak! Ezeknek diszkussziója gyakorló feladat.

3.11. Feladat: Egy autó az országúton nagy sebességgel halad. Az autógumi és az úttest felülete között a tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,9$. Az $R = 100$ m sugarú, vízszinten kanyarban mekkora lehet a jármű maximális sebessége, hogy ne sodródjon ki?

Megoldás: A kanyarban az F tapadási súrlódási erő biztosítja az autónak a körmozgáshoz szükséges centripetális gyorsulást:

$$m\frac{v^2}{R} = F. \tag{3.11.1}$$

A maximális tapadási erő $F_{max} = \mu mg$ felső határt szab az autó maximális sebességének is, mely az alábbi egyenlőtlenséggel fejezhető ki:

$$m\frac{v^2}{R} \leq F_{max} = \mu mg. \tag{3.11.2}$$

Maximális sebesség esetén egyenlőség áll fenn az egyenlet két oldala között, ezért a maximális sebesség nagysága:

$$v_{max} = \sqrt{\mu gR}. \tag{3.11.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $v_{max} = 30$ m/s adódik.

3.12. Feladat: (HN 5B-43) Egy gyerek a parttól $s = 12$ m-re áll a befagyott tavacska jegén. Csizmája és a jég közötti tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,05$. Határozzuk meg azt a minimális időt, amely alatt kisétálhat a partra, ha megcsúszás nélkül lépked?

Megoldás: A gyerek $F = mg$ erővel nyomja a jeget, ezért csúszás nélkül legfeljebb $a = \mu g$ gyorsulásra képes. Az s út megtételéhez ezért legkevesebb

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{\mu g}} = 6,93\,\mathrm{s} \tag{3.12.1}$$

idő szükséges.

3.13. Feladat: (HN 5B-44) Egy rakodórámpán láda nyugszik. Ha a rámpa szöge $\alpha_1 = 30^0$-os, akkor a láda megcsúszik. Amennyiben a csúszó láda alatt a lejtő hajlásszöge $\alpha_2 = 20^0$-ra csökken, akkor a láda mozgása egyenletessé válik. Határozzuk meg a lejtő és a láda közötti csúszási és tapadási súrlódási együttható értékét!

Megoldás: A feladatban jelölje μ_t a tapadási és μ_{cs} a csúszási súrlódási együtthatót. Nyugalmi helyzetben a tapadási súrlódási erő egyensúlyt tart a súlyerő lejtővel párhuzamos komponensével, ezért

$$ma = 0 = mg\sin\alpha_1 - \mu_t mg\cos\alpha_1. \tag{3.13.1}$$

Az egyenletből

$$\mu_t = \operatorname{tg}\alpha_1 \approx 0,577 \tag{3.13.2}$$

tapadási súrlódási együttható adódik. Egyenletes gyorsulás esetén a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense a csúszási súrlódási együtthatóval tart egyensúlyt:

$$ma = 0 = mg\sin\alpha_2 - \mu_{cs} mg\cos\alpha_2. \tag{3.13.3}$$

Az egyenletből

$$\mu_{cs} = \operatorname{tg}\alpha_2 \approx 0,364. \tag{3.13.4}$$

csúszási súrlódási együttható adódik.

3.14. Feladat: (HN 5B-46) Az $m = 5$ kg-os tömegű test lecsúszik a vízszintessel $\alpha = 41^0$ szöget bezáró lejtőn. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0,3$.

(a) Határozzuk meg a súrlódási erő nagyságát!

(b) Mekkora gyorsulással csúszik le a test?

Megoldás:

(a) A lejtőn lecsúszó testre ható N támaszerő (kényszererő) egyensúlyt tart a súlyerő lejtőre merőleges komponensével, ezért $N = mg\cos\alpha$. A csúszási súrlódási erő pedig

$$F_s = \mu N = \mu mg\cos\alpha \approx 11,32\ \mathrm{N}. \tag{3.14.1}$$

(b) A test lejtővel párhuzamos mozgását a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense és a súrlódási erő határozzák meg:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{3.14.2}$$

ahonnan a test gyorsulása

$$a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha \approx 4,3\ \mathrm{m/s^2}. \tag{3.14.3}$$

3.15. Feladat: (HN 5B-47) A vízszintessel $\alpha = 60^0$-os szöget bezáró lejtőn egy test $a = g/2$ gyorsulással csúszik le. Mekkora a csúszó súrlódási együttható?

Megoldás: A lejtővel párhuzamos mozgást leíró dinamikai egyenlet:

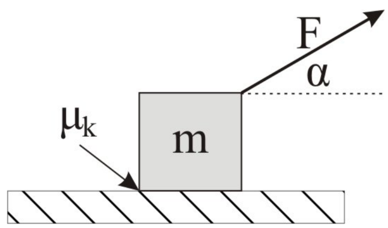
$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha. \tag{3.15.1}$$

Behelyettesítve a gyorsulás értékét a súrlódási együttható az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\mu = \frac{\sin\alpha - \frac{1}{2}}{\cos\alpha}. \tag{3.15.2}$$

Behelyettesítve a számadatokat $\mu \approx 0,732$ adódik a súrlódási együttható értékére.

3.16. Feladat: (HN 5B-52) Egy $m = 4$ kg tömegű testet a 16. ábrának megfelelően $F = 20$ N erővel húzunk ($\alpha = 30^0$). Mekkora a test gyorsulása, ha a test és talaj közötti csúszási súrlódási együttható $\mu_k = 0,2$?



16. ábra.

Megoldás: Mivel a test nem emelkedik fel a talajról a függőleges gyorsulása zérus. Ezért

$$0 = N + F\sin\alpha - mg, \tag{3.16.1}$$

ahol N a testre ható támaszerő. Írjuk fel a mozgás vízszintes vetületére vonatkozó mozgásegyenletet!

$$ma = F\cos\alpha - F_s, \tag{3.16.2}$$

ahol F_s a testre ható súrlódási erő, melyet az N támaszerő segítségével határozhatunk meg:

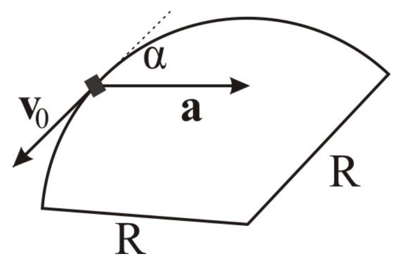
$$F_s = \mu_k N. \tag{3.16.3}$$

Az egyenletrendszer megoldásából a test gyorsulása meghatározható:

$$a = \frac{F(\cos\alpha + \mu_k\sin\alpha)}{m} - \mu_k g. \tag{3.16.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 2,83$ m/s^2 adódik.

3.17. Feladat: (HN 5B-58) Egy gépkocsi $R = 80$ m sugarú vízszintes körpályán mozog. A 17. ábra azt a pillanatot mutatja, amikor az autó sebessége éppen $v_0 = 10$ m/s és a gyorsulása **a**, mely a körpálya érintőjével $\alpha = 35^0$-os szöget zár be.
(a) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása?
(b) Mekkora a tangenciális gyorsulás?
(c) Mekkora utat tesz meg a gépkocsi a megállásig, ha az érintő menti gyorsulása állandó?
(d) Az úttest vízszintes, azaz a kanyarban nem túlemelt pálya. Mekkora minimális nyugalmi súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy az ábrán mutatott pillantban a gépkocsi ne csússzon meg?



17. ábra.

Megoldás:
(a) A centripetális gyorsulás az autó sebességének és a kanyar görbületi sugarának segítségével határozható meg:

$$a_{cp} = \frac{v_0^2}{R}. \tag{3.17.1}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a_{cp} = 1,25$ m/s^2 adódik.
(b) Az ábra segítségével meghatározhatjuk az **a** gyorsulásvektor nagyságát is. Felhasználva, hogy az **a** vektor sugár irányú vetülete éppen a centripetális gyorsulás, az eredő gyorsulás nagysága

$$a = |\mathbf{a}| = \frac{a_{cp}}{\sin\alpha}. \tag{3.17.2}$$

A tangenciális gyorsulás pedig az

$$a_t = a\cos\alpha = \frac{a_{cp}}{\mathrm{tg}\,\alpha} \tag{3.17.3}$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat $a_t \approx 1,79$ m/s^2 adódik.
(c) Amennyiben a kocsi lassul, de a tangenciális gyorsulása állandó, a kocsi megállásáig megtett út meghatározható az alábbi összefüggésből:

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2} a_t t_0^2, \tag{3.17.4}$$

ahol $t_0 = v_0/a_t$ a megállásig eltelt idő. Behelyettesítve a számadatokat $s \approx 27{,}9$ m adódik a megállásig megtett út hosszára.

(d) A dinamika alapegyenlete szerint

$$ma = F_s = \mu mg, \tag{3.17.5}$$

amelyből a minimális súrlódási együttható, mely mellett a kocsi még épp nem csúszik meg, $\mu \approx 0{,}218$.

3.18. Feladat: * A vízszintes asztalon m tömegű test nyugszik. A test és az asztallap közötti súrlódási együttható μ. (A tapadási és csúszási súrlódási együttható legyen azonos.) A testre a $t = 0$ időpillanattól kezdve $F(t) = f_0 t$ erővel hatunk.

(a) Mi az f_0 együttható mértékegysége?

(b) Mikor indul el a test?

(c) Mekkora lesz a test sebessége a t időpillanatban?

Megoldás:

(a) Az f_0 együttható mértékegysége N/s, mivel idő dimenziójú mennyiséggel megszorozva erő dimenziójú mennyiséget kell, hogy kapjunk.

(b) A test abban a t_0 pillanatban indul el, amikor a rá ható erő eléri a tapadási erő maximumát, azaz $F(t_0) = f_0 t_0 = \mu mg$, ahonnan

$$t_0 = \frac{\mu mg}{f_0}. \tag{3.18.1}$$

(c) A test mozgásegyenlete a megmozdulás pillanatát követő $t \geq t_0$ időintervallumban:

$$ma = f_0 t - \mu mg \tag{3.18.2}$$

Az egyenletből kifejezhetjük a gyorsulást az idő függvényében:

$$a(t) = \frac{f_0}{m} t - \mu g. \tag{3.18.3}$$

A sebességet a gyorsulás idő szerinti integrálásával határozhatjuk meg:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t')\,\mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t} \left(\frac{f_0}{m} t' - \mu g \right) \mathrm{d}t' = \frac{1}{2} \frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 m g^2}{f_0}. \tag{3.18.4}$$

Tehát a test sebessége:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha: } t \leq t_0 \\ \frac{1}{2} \frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 m g^2}{f_0} & \text{ha: } t > t_0 \end{cases}. \tag{3.18.5}$$

3.19. Feladat: Egy függőleges tengelyű korong ω_0 szögsebességgel forog. A korong középétől R távolságban m tömegű test helyezkedik el. A korong és a test között μ tapadási súrlódási együttható van. A korong egyenletes lassulásba kezd β szöggyorsulással. Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, hogy a test ne csússzon meg?

Megoldás: A korong szögsebessége az

$$\omega(t) = \omega_0 - \beta t \tag{3.19.1}$$

függvény szerint változik. Ezért a korongon lévő test centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = R\omega(t)^2 = R(\omega_0 - \beta t)^2. \tag{3.19.2}$$

A test tangenciális gyorsulása pedig

$$a_t = R\beta. \tag{3.19.3}$$

A test eredő gyorsulása

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}, \tag{3.19.4}$$

melyet a tapadási erő biztosít a test számára. A tapadás feltétele, hogy

$$\mu m g \geq m a = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}. \tag{3.19.5}$$

A tapadási súrlódási együttható ezért:

$$\mu \geq \frac{\sqrt{R^2(\omega_0 - \beta t)^4 + (R\beta)^2}}{g}. \tag{3.19.6}$$

A legnagyobb tapadás a lassulás kezdeti pillanatában szükséges, ezért a minimális tapadási együttható

$$\mu_{min} = R\frac{\sqrt{\omega_0^4 + \beta^2}}{g}. \tag{3.19.7}$$

3.20. Feladat: Egy $\omega_0 = 6$ 1/s szögsebességű, $R = 0,2$ m sugarú függőleges tengelyű korong peremén van egy m tömegű test. A korong $\beta = 2$ 1/s^2 szöggyorsulással lassul, majd megáll.
(a) Mennyi idő alatt állt meg?
(b) Mennyi volt a korong szögelfordulása?
(c) Mennyi utat tett meg az m tömegű test?
(d) Legalább mekkora μ súrlódási együttható kell, hogy legyen a korong és az m tömegű test között, hogy a test ne csússzon le a korongról?

Megoldás:
(a) Az

$$\omega_0 = \beta t \tag{3.20.1}$$

összefüggésből következik, hogy a megállás ideje $t = 3$ s.
(b) Ezalatt a φ szögelfordulás

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2}\beta t^2 = 9\,\mathrm{rad}. \tag{3.20.2}$$

(c) A megtett út

$$s = R\varphi = 1,8\,\mathrm{m}. \tag{3.20.3}$$

(d) A test gyorsulása az $a_t = R\beta$ tangenciális és az $a_{cp} = R\omega^2$ centripetális gyorsulásból áll. Ez utóbbi a kezdeti idopontban a legnagyobb, így a maximális súrlódási együttható kiszámolásásnál ezzel az értékkel kell számolni. Az eredő gyorsulás nagysága:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{R^2\beta^2 + R^2\omega^4}. \tag{3.20.4}$$

A testet a súrlódási erő mozgatja, így

$$ma = \mu mg, \tag{3.20.5}$$

amelybe behelyettesítve kapjuk:

$$\mu = \frac{1}{g}\sqrt{R^2\beta^2 + R^2\omega^4} = 0,72. \tag{3.20.6}$$

3.21. Feladat: Tuskót helyezünk állóhelyzetből felgyorsuló vízszintes forgóasztalra tengelyétől 10 cm távolságban. A forgóasztal 2/3 s alatt éri el a 2 rad/s szögsebességet és ekkor a tuskó csúszni kezd. Mekkora a tapadási súrlódási erő a tuskó és az asztal között?

Megoldás: A tuskó szöggyorsulása

$$\beta = \frac{\omega}{t} = 3\,\mathrm{rad/s^2}, \tag{3.21.1}$$

a kerületi sebessége

$$v = R\omega = 0,2\,\mathrm{m/s}. \tag{3.21.2}$$

A test eredő gyorsulása a centripetális és tangenciális gyorsulásokból tevődik össze:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2}. \tag{3.21.3}$$

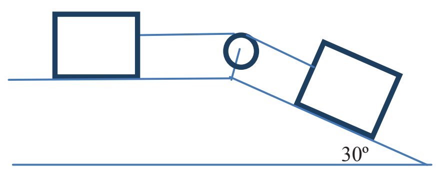
Ezt a gyorsulást a μmg tapadási súródási erő biztosítja:

$$\mu mg = ma = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = m\sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2}. \tag{3.21.4}$$

Innen a tapadási súrlódási együttható:

$$\mu = \frac{1}{g}\sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2} = 0,05. \tag{3.21.5}$$

3.22. Feladat: A 18. ábrán két, egyenként $m = 40$ kg tömegű test van összekapcsolva. A súrlódási együttható mindkét testre $\mu = 0,15$. Határozzuk meg a testek gyorsulását és a fonálban ébredő K kötélerőt!



18. ábra.

Megoldás: Jelölje a a testek gyorsulását. (Mivel a kötél nem nyúlik meg, mindkét test azonos gyorsulással mozog) A balodali test mozgásegyenlete

$$ma = K - \mu mg, \tag{3.22.1}$$

míg a lejtőn fekvő test mozgásegyenlete

$$ma = mg\sin\alpha - K - \mu mg\cos\alpha \tag{3.22.2}$$

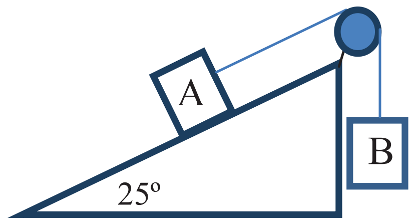
A két egyenletből meghatározható a testek gyorsulása:

$$a = \frac{1}{2}(g\sin\alpha - \mu g - \mu g\cos\alpha). \tag{3.22.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 1,1$ m/s^2 adódik. A kötélerőt a (3.22.1) egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$K = ma + \mu mg = \frac{\sin\alpha + \mu - \mu\cos\alpha}{2}mg. \tag{3.22.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $K \approx 104$ N adódik.



19. ábra.

3.23. Feladat: A vízszintessel $\alpha = 25^0$-os szöget bezáró lejtőn nyugalmi helyzetből indulva $m_A = 30$ kg tömegű testet a 19. ábrán látható módon $m_B = 20$ kg tömegű test húz felfelé. A súrlódási együttható $\mu = 0,2$.

(a) Számoljuk ki a testek gyorsulását!

(b) Számoljuk ki a testek által $t_0 = 2$ s alatt megtett utat!

Megoldás:

(a) Jelölje K a kötélet feszítő erőt és a a testek gyorsulását. A testek mozgásegyenlete:

$$m_A a = K - m_A g \sin\alpha - \mu m_A g \cos\alpha \tag{3.23.1}$$

és

$$m_B a = m_B g - K. \tag{3.23.2}$$

E két egyenletből a gyorsulás kifejezhető:

$$a = \frac{m_B - m_A \sin\alpha - \mu m_A \cos\alpha}{m_A + m_B} g. \tag{3.23.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 0,376$ m/s^2 adódik.

(b) A testek által megtett út t_0 idő alatt, amennyiben a testek nyugalmi helyzetből indulnak:

$$s = \frac{1}{2} a t_0^2. \tag{3.23.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $s \approx 75,3$ cm adódik.

3.24. Feladat: Az α hajlásszögű lejtőn a gyorsulással lefele csúszik a k direkcióerejű rugóval összekötött m_1 és m_2 tömegű testekből álló rendszer, mégpedig úgy, hogy az m_1 megy elől. A lejtő és a testek közötti súrlódási tényező rendre μ_1 és μ_2.

(a) Fejezzük ki a rendszer gyorsulását.

(b) Mekkora a rugó megnyúlása?

Megoldás: Jelölje F_r az ebredő rugóerőt. Legyen a koordinátarendszer x tengelye lejtőirányú.
(a) E koordinátarendszer irányítás mellett két test mozgásegyenlete sorban

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha - F_r \tag{3.24.1}$$

és

$$m_2 a = m_2 g \sin\alpha - \mu_2 m_2 g \cos\alpha + F_r. \tag{3.24.2}$$

A két egyenletből a

$$a = \frac{(m_1 + m_2) g \sin\alpha - (\mu_1 m_1 g \cos\alpha + \mu_2 m_2 g \cos\alpha)}{m_1 + m_2}. \tag{3.24.3}$$

gyorsulás adódik.
(b) A gyorsulás visszahelyettesítésével a kapott rugóerő

$$F_r = (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos\alpha. \tag{3.24.4}$$

Ezzel a rugó megnyúlása

$$\Delta l = \frac{F_r}{k} = \frac{1}{k} (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos\alpha. \tag{3.24.5}$$

Látható, hogy ha $\mu_2 > \mu_1$, akkor a rugó megnyúlik, mert $\Delta l > 0$; ellenkező esetben összenyomódik. Ha a kettő egyenlő egymással, akkor a megnyúlás zérus.

Közegellenállási erők

3.25. Feladat: Az R sugarú vasgolyó vízben süllyed. Ismeretes, hogy hosszabb idő elteltével közegben a testek állandó sebességgel esnek. Sebességgel arányos közegellenállást feltételezve mekkora lesz a vasgolyó v végsebessége? Az arányossági tényező legyen: $c = 6\pi\eta R$ (Stokes-féle ellenállás; kis sebességek eseteire), ahol η a közeg viszkozitása, R a közegben mozgó golyó sugara.

Megoldás: Jelölje ϱ_{Fe} a vas, míg ϱ_{H_2O} a víz sűrűségét. A koordinátatengely mutasson lefele! (Ez a pozitív irány.) A testre három erő hat. Az

$$mg = \varrho_{Fe} \frac{4R^3\pi}{3} g$$

nehézségi erő, amely most pozitív; a pillanatnyi sebességgel ellentétes közegellenállás, amely – mivel a test süllyed, tehát v pozitív –, azért a közegellenállási erő negatív:

$$-cv = -6\pi\eta R v;$$

valamint a felhajtó erő, amely felfele mutat

$$-\varrho_{H_2O}\frac{4R^3\pi}{3}g,$$

így most negatív. Mivel azt az esetet vizsgáljuk, amikor a test már állandó sebességgel süllyed, így tudjuk, hogy a testre ható erők eredője zérus. Felírhatjuk tehát a következő egyenletet

$$0 = \varrho_{Fe}\frac{4R^3\pi}{3}g - 6\pi\eta Rv - \varrho_{H_2O}\frac{4R^3\pi}{3}g, \tag{3.25.1}$$

amelyből a kérdezett v sebesség

$$v = (\varrho_{Fe} - \varrho_{H_2O})\frac{2R^2}{9\eta}g. \tag{3.25.2}$$

Megjegyzés: Ez a számolás az alapja annak a módszernek, amellyel a folyadékok viszkozitását meg lehet határozni.

3.26. Feladat: Az m tömegű golyó levegőben esik a homogén nehézségi erőtérben. A golyóra a sebesség négyzetével arányos közegellenállás hat. (Az arányossági tényezőt jelöljük c'-vel.) Mekkora a golyó végsebessége? (A felhajtóerőtől tekintsünk el.)

Megoldás: Amikor a test eléri végsebességét, akkor a ráható erők eredője zérus, így — lefele mutató koordinátatengely irányítást véve — a

$$0 = mg - c'v^2 \tag{3.26.1}$$

összefüggés írható fel. Ebből a végsebesség

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c'}}. \tag{3.26.2}$$

3.27. Feladat: ** Az m tömegű testet a koordinátarendszer origójából v_0 sebességgel a vízszinteshez képest α szöggel elhajítunk a homogén nehézségi erőtérben. A testre az $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$ sebességgel arányos közegellenállás is hat, ahol c konstans arányossági tényező.)

(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!

(b) Határozzuk meg a sebességkomponensek időbeli változását!

(c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!

(d) Határozzuk meg a pálya alakját!

Megoldás: Amennyiben az y tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás vektora a $\mathbf{g} = (0, -g)$ alakban adható meg. A gyorsulás és sebesség vektorok pedig rendre $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ és $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ alakúak. A $t_0 = 0$ időpillanatban a kezdeti sebességkoponensek $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ valamint $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Mivel a koordináta-rendszer origóját a hajítás helyére tesszük, a kezdeti pozíció koordinátáit jelöljék $x_0 = 0$ és $y_0 = 0$.

(a) Az elhajított testre két erő hat, az $m\mathbf{g}$ súlyerő valamint a $-c\mathbf{v}$ közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - c\mathbf{v}. \tag{3.27.1}$$

Írjuk fel az $\mathbf{a}$ vektor x és y komponenseire vonatkozó skaláregyenleteket. Felhasználva, hogy $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ és $a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$, az

$$ma_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -cv_x \tag{3.27.2}$$

és

$$ma_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -mg - cv_y \tag{3.27.3}$$

egyenleteket kapjuk.

(b) A (3.27.2) és (3.27.3) egyenletek egymástól függetlenek (azaz nem csatolt differenciálegyenlet-rendszert írnak le), aminek köszönhetően szeparált egyenleteket kapunk a mozgás x és y vetületére. A (3.27.2) egyenletben szeparálva a változókat és idő szerint integrálva az egyenletet:

$$\int\limits_{v_{0x}}^{v_x} \frac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\frac{c}{m} \int\limits_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'. \tag{3.27.4}$$

Az integrálások elvégzése után

$$\ln\frac{v_x(t)}{v_{0x}} = -\frac{c}{m}t \tag{3.27.5}$$

adódik, ahonnan a sebesség x komponense

$$v_x(t) = v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t}. \tag{3.27.6}$$

Hasonló módon a (3.27.3) egyenletben is szeparáljuk az integrálási változókat:

$$m\int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{\mathrm{d}v_y}{mg + cv_y} = -\int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'. \tag{3.27.7}$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c}\ln\frac{mg + cv_y(t)}{mg + cv_{0y}} = -t, \tag{3.27.8}$$

összefüggéshez jutunk, melyből az y irányú sebességkomponens

$$v_y(t) = \frac{mg + cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \tag{3.27.9}$$

Megjegyzés: Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes $v_x(t) = v_{0x}$ illetve $v_y(t) = v_{0y} - gt$ megoldásokba tartanak. Ennek igazolását az olvasóra bízzuk.
(c) A test helykoordánátáit a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$x(t) = \int\limits_{t_0=0}^{t} v_{0x} e^{-\frac{c}{m}t'} \mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c} v_{0x} e^{-\frac{c}{m}t'} \right]_{t_0=0}^{t} = \frac{m}{c} v_{0x} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) \tag{3.27.10}$$

és

$$y(t) = \int\limits_{t_0=0}^{t} \left(\frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} \right) \mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c} \frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} t \right]_{t_0=0}^{t}$$

$$= \frac{m}{c} \frac{mg + cv_{0y}}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c} t \right). \tag{3.27.11}$$

Megjegyzés: Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes $x(t) = v_{0x}t$ illetve $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ megoldásokhoz tartanak. Ezeknek igazolását az olvasóra bízzuk.
(d) A pályagörbe alakját megkapjuk, ha a (3.27.10) egyenletből kiküszöböljük a t időváltozót:

$$t = -\frac{m}{c} \ln \left(1 - \frac{cx}{mv_{0x}} \right). \tag{3.27.12}$$

Ezt behelyettesítve a (3.27.11) egyenletbe

$$y(x) = \frac{mg + cv_{0y}}{cv_{0x}} x + \frac{m^2 g}{c^2} \ln \left(1 - \frac{cx}{mv_{0x}} \right) \tag{3.27.13}$$

adódik. Ezt a pályáját ballisztikus pályának nevezik. *Megjegyzés:* Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldás egy parabola pálya. Másfelől a logaritmus függvény argumentumát megvizsgálva látható, hogy a

$$1 > \frac{cx}{mv_{0x}} \tag{3.27.14}$$

relációnak fenn kell állnia. Innen következik, hogy

$$x < \frac{mv_{0x}}{c}, \tag{3.27.15}$$

azaz ennél az x távolságnál soha nem megy messzebb a test.

3.28. Feladat: ** Az m tömegű testet h magasságban elejtjük. A testre az $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$ sebességgel arányos közegellenállás is hat. (A c konstans arányossági tényező.)
(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!
(b) Határozzuk meg a sebességének időbeli változását!

(c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!

Megoldás: Amennyiben a függőleges tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás a negatív irányba gyorsítja az elejtett testet, melyre két erő hat, az $m\mathbf{g}$ súlyerő valamint a $-c\mathbf{v}$ közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$ma = -mg - cv. \tag{3.28.1}$$

Felhasználva, hogy $a = \frac{dv}{dt}$, az

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -mg - cv \tag{3.28.2}$$

egyenletet kapjuk.

(a) Szeparáljuk a (3.28.2) egyenletben az integrálási változókat, majd végezzük el az integrálás műveletét:

$$m\int_0^v \frac{dv}{mg+cv} = -\int_{t_0=0}^t dt'. \tag{3.28.3}$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c}\ln\frac{mg+cv(t)}{mg} = -t, \tag{3.28.4}$$

összefüggéshez jutunk, melyből a sebesség kifejezhető:

$$v(t) = \frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \tag{3.28.5}$$

(b) A test helykoordinátáját a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$z(t) = \int\limits_{t_0=0}^{t} \left(\frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}\right) dt' = \left[-\frac{m}{c}\frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}t\right]_{t_0=0}^{t}$$

$$= \frac{m}{c}\frac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) - \frac{mg}{c}t. \tag{3.28.6}$$

4. Feladatok munkavégzés és konzervatív erőterek tárgyköréből. Munkatétel

Munkavégzés, teljesítmény

4.1. Feladat: (HN 6B-8) Egy rugót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

Megoldás: Két megnyúlás van. Az első $\Delta l = l_1 - l_0 = 10$ cm, amelyre felírható, hogy

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \tag{4.1.1}$$

Innen a k rugóállandó értéke kifejezhető

$$k = \frac{2W}{(\Delta l)^2} = 800\,\mathrm{N/m}. \tag{4.1.2}$$

A további $l_2 = 10$ cm nyújtáshoz szükséges munkavégzés

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(l_2 + \Delta l)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 12\,\mathrm{J}. \tag{4.1.3}$$

4.2. Feladat: * (HN 6B-10) Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az $F = -kx^3$ törvény szerint változik, ahol $k = 200$ N/m^3. Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

Megoldás: A rugó végét $F'(x) = kx^3$ erővel kell húznunk, így a munka definíciója alapján az általunk végzett munka:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx = \int_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} kx^3\,dx = \left[\frac{1}{4}kx^4\right]_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} = 0,4\mathrm{J} \tag{4.2.1}$$

integrállal számolható ki.

4.3. Feladat: * (HN 6B-27) A 200 N súlyú gyerek nyugalmi helyzetben lévő, 3 m-es kötelű hintán ül. A gyerek barátja húzza oldalra, hogy a hinta kötele 36^0-os szöget alkosson a függőlegessel. Határozzuk meg mekkora munkára volt ehhez szükség! A feladatot a munka definíciójának felhasználásával oldja meg!

Megoldás: Jelölje K a kötélerőt, α a kötél függőlegessel bezárt szögét, m a gyerek tömegét. Első lépésként azt a szögfüggő erőt kell meghatározni, amellyel a barátja F erővel vízszintes irányban húzza. Mivel egyensúlyi állapotokon keresztüli mozgásról van szó az erőkre felírhatjuk, hogy a függőleges komponensekre

$$K\cos\alpha = mg, \tag{4.3.1}$$

a vízszintes komponensekre

$$K\sin\alpha = F. \tag{4.3.2}$$

Innen az F erő:

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{4.3.3}$$

A vízszintes irányú elmozdulás két szöghöz $\alpha+\mathrm{d}\alpha$ és az α szögekhez tartozó tartozó x koordináták különbsége, azaz

$$\mathrm{d}x = l\sin(\alpha+\mathrm{d}\alpha) - l\sin\alpha = l\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha, \tag{4.3.4}$$

ahol felhasználtuk, hogy kis szögekre érvényesek a

$$\cos(\mathrm{d}\alpha) = 1, \tag{4.3.5}$$

$$\sin(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}\alpha \tag{4.3.6}$$

közelítések. Az elemi munka kifejezése

$$\mathrm{d}W = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot l\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = mgl\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha. \tag{4.3.7}$$

amellyel a teljes végzett munka:

$$W = \int_0^\alpha mgl\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = mgl(1-\cos\alpha). \tag{4.3.8}$$

4.4. Feladat: (HN 6B-39) Egy 48 km/h sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

Megoldás: A teljesítmény

$$P = \frac{dW}{dt}, \tag{4.4.1}$$

ahol a dW elemi munka

$$dW = \mathbf{F}\,d\mathbf{r}. \tag{4.4.2}$$

Ezt behelyettesítve a teljesítmény

$$P = \mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = 12000\,\mathrm{W}. \tag{4.4.3}$$

4.5. Feladat: (HN 6C-57) Egy testet a koordinátarendszer origójából egyenes vonalban állandó $\mathbf{F} = f_1\hat{\mathbf{x}} + f_2\hat{\mathbf{y}}$ (f_1 = 2N; f_2 = 4N) erővel az $\mathbf{r} = s_1\hat{\mathbf{x}} + s_2\hat{\mathbf{y}}$ (s_1 = 1m; s_2 = 5m) helyre viszünk. (Az egyenesvonalú egyenletes mozgás fenntartásához természetesen egyéb kényszererők is fellépnek.) Határozzuk meg az $\mathbf{F}$ erő munkáját

(a) közvetlenül az $\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$ skaláris szorzattal,

(b) az $|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$ szorzattal!

Megoldás:
(a) A munkát a skaláris szorzattal számolva

$$W = f_1 s_1 + f_2 s_2 = 22\,\mathrm{J} \tag{4.5.1}$$

adódik.
(b) Az erő nagysága $|\mathbf{F}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{20}$ N, míg az elmozdulás nagysága $|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{26}$ m. A két vektor által bezárt szög

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}}{|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|} = \frac{22}{\sqrt{20}\sqrt{26}}. \tag{4.5.2}$$

A kiszámolt értékeket összeszorozva $W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta = 22$ J.

4.6. Feladat: * (HN 6C-58) Egy fiú a $m_0 = 3$ kg tömegű, $l_0 = 2$ m hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy a másik vége éppen a leér a földre.
(a) Határozzuk meg, hogy miként változik a gyerek által kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel s távolsággal lejjebb ereszti!
(b) A $W = \sum_i \mathbf{F}_i \Delta\mathbf{s}_i$ összegzés vagy a $W = \int \mathbf{F} d\mathbf{s}$ integrál felhasználásával számítsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez, míg a teljes láncot a földre ereszti!

Megoldás:
(a) Jelölje $\lambda = \frac{m_0}{l_0}$ a hosszegységenkénti tömeget. Az s távolsággal lejjebb eresztett lánc azon részének tömege, amelyet még tartani kell:

$$m(s) = m_0 - \lambda s = m_0 - \frac{m_0}{l_0} s. \tag{4.6.1}$$

Az ehhez szükséges erő:

$$F(s) = \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g, \tag{4.6.2}$$

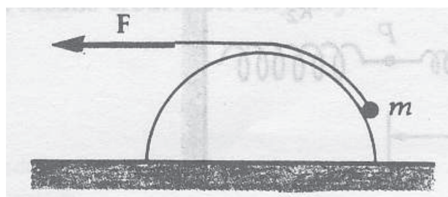
amely felfele mutat.
(b) (α) A gyerek által végzett munka a görbe alatti terület kiszámolásával. Mivel az $F(s)$ erő az s távolság lineáris függvénye, így az $F(s)$ egyenes, valamint az x és az y tengely által határolt derékszögű háromszög területét kell kiszámolni. A háromszög alapja l_0, a magassága $F(s=0) = m_0 g$, így a terület $\frac{1}{2} m_0 g l_0$. Figyelembe véve, hogy az elmozdulás a ható erővel ellentétes előjelű a végzett munka:

$$W = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \tag{4.6.3}$$

(β) A gyerek által végzett munka integrállal:

$$W = -\int_0^{l_0} F(s)\,ds = -\int_0^{l_0} \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0}s\right) g ds = -\frac{1}{2}m_0 g l_0. \tag{4.6.4}$$

4.7. Feladat: * (HN 6C-59) A 20. ábrán látható súrlódásmentes félhenger aljáról a tetejére húzunk fel egy m tömegű testet a henger tetején átvetett kötél segítségével.
(a) Határozzuk meg a kötélerőt a hely függvényében!
(b) Az $\int \mathbf{F} d\mathbf{s}$ integrál segítségével határozzuk meg azt a munkát, ami a testnek a henger aljáról a tetejéig való egyenletes sebességű felhúzásához szükséges! A henger sugara R.



20. ábra.

Megoldás:
(a) Jelölje φ a tömegponthoz húzott sugár és az x tengely által bezárt szöget. Az mg súlyerő mindig y irányú, az ébredő N támaszerő kifele mutató radiális irányú, a K kötélerő érintő irányú. Így v sebességű mozgatás esetén a radiális komponensekre az

$$ma_{cp} = m\frac{v^2}{R} = mg\sin\varphi - N, \tag{4.7.1}$$

míg az erintő irányú komponensekre az

$$ma_t = K - mg\cos\varphi \tag{4.7.2}$$

összefüggések állnak fenn.
(α) Amennyiben a v sebesség állandó, azaz az a_t tangenciális gyorsulás zérus, így az utóbbi egyenletből a kötélerő:

$$K(\varphi) = mg\cos\varphi. \tag{4.7.3}$$

(β) Ha a tangenciális gyorsulás nem zérus $a = \frac{dv}{dt} \neq 0$, úgy a kötélerő

$$K(\varphi) = mg\cos\varphi + ma_t = mg\cos\varphi + m\frac{dv}{dt} \tag{4.7.4}$$

(b) Az elmozdulás a henger felületén (a keresztmetszetet tekintve a kör kerületén) lehetséges, amely kis dφ szög esetén

$$ds = R\mathrm{d}\varphi. \tag{4.7.5}$$

A végzett munkát a $W = \int F_s \mathrm{d}s$ definíció alapján számoljuk.
(α) Abban az esetben amikor egyenletes mozgást feltételünk a

$$W = \int_0^{90^0} K(\varphi) R\mathrm{d}\varphi = \int_0^{90^0} mgR\cos\varphi \mathrm{d}\varphi = mgR, \tag{4.7.6}$$

integrál adja. Ez az eredmény várható volt, hiszen ez a helyzeti energia megváltozását adja.
(β) Ha figyelembe vesszük, hogy a sebesség nem feltétlenül állandó, akkor a végzett munka a (4.7.4) második tagjának integráltjával

$$W' = \int m\frac{dv}{dt}\mathrm{d}s \tag{4.7.7}$$

több. Mivel d$s = v$dt, így

$$W' = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt} v\mathrm{d}t = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \tag{4.7.8}$$

ahol t_1 a kezdeti, t_2 a végső időpont, míg v_1 a kezdő-, v_2 a végsebesség. Így az összes végzett munka a nem egyenletes sebességű esetben

$$W = mgR + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{4.7.9}$$

4.8. Feladat: * (HN 6C-73) A 4 kg tömegű, nyugalomban lévő testet a rá ható változó erő az $x = 2t - 3t^2 + t^3$ függvény szerint mozgat. (Az x-et méterben, a t-t másodpercben mérjük.) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez ez az erő a mozgás első három másodpercében!

Megoldás: A test sebessége, mint az idő függvénye:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2 - 6t + 3t^2. \tag{4.8.1}$$

A 3. másodpercben a sebesség $v(3\mathrm{s}) = 11$ m/s. A végzett munka – figyelembe véve, hogy a test nyugalomból indult –

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = 242\,\mathrm{J}. \tag{4.8.2}$$

4.9. Feladat: (HN 6C-75) Az m tömegű test a nehézségi erő hatására szabadon esik. Mutassuk meg, hogy h távolság megtétele alatt a nehézségi erő átlagos teljesítménye: $P_{\text{átl}} = m\sqrt{g^3h/2}$!

Megoldás: Az eső test sebessége $v = gt$, kinetikus energiája

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2. \tag{4.9.1}$$

A h magasságból történő eséshez tartozó idő $t = \sqrt{2h/g}$. A teljesítmény – a behelyettesítések elvégzése után –

$$P = \frac{E}{t} = m\sqrt{\frac{g^3h}{2}}. \tag{4.9.2}$$

Ez igazolja a feladat állítását.

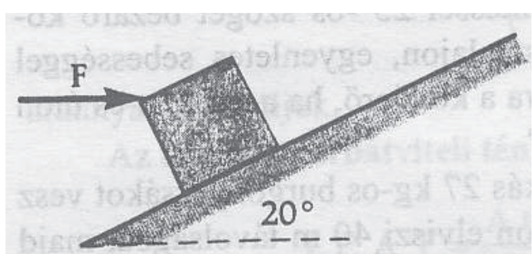
Munkatétel

4.10. Feladat: (HN 6B-23) A 21. ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes 27 N nagyságú erővel tolunk fel egy 20^0-os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180.

(a) Mekkora a test gyorsulása?

(b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé!

(c) Válaszoljunk a (b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!



21. ábra.

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $F = 27$ N; $\alpha 20^0$ és $\mu = 0,180$.

(a) A mozgásegyenletek felírásához bontsuk fel az F erőt lejtőirányú, felfele mutató ($F\cos\alpha$) és lejtőre merőlegesen lefele mutató ($F\sin\alpha$) komponensekre. A felfele mozdulást pozitív előjelűnek tekintve a lejtő irányú mozgásegyenlet

$$ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N. \tag{4.10.1}$$

A N támaszerő a

$$0 = N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha \tag{4.10.2}$$

egyenletből fejezhető ki. A két egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{m} - g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 6,74\,\mathrm{m/s^2}. \tag{4.10.3}$$

(b) Az s út megtétele utáni sebesség

$$v = \sqrt{2sa} = 6,36\,\mathrm{m/s}. \tag{4.10.4}$$

(c) A testre ható lejtőirányú (felfele mutató) eredő erő

$$F' = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{4.10.5}$$

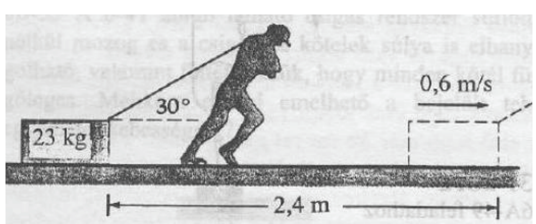
amelynek munkája változtatja meg a test mozgási energiáját

$$\frac{1}{2}mv^2 = F's = (F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)\,s. \tag{4.10.6}$$

Innen a v sebesség

$$v = 6,36\,\mathrm{m/s}. \tag{4.10.7}$$

4.11. Feladat: (HN 6B-28) A 22. ábrán látható ember nyugalmi helyzetből indulva 2,4 m távolságra húz el egy 23 kg-os ládát az érdes ($\mu = 0,5$) padlón. A láda végsebessége 0,6 m/s. A munkatétel alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt fejtett ki az ember?



22. ábra.

Megoldás: A testre ható erő – ez végzi a gyorsítást – vízszintes komponense:

$$F\cos\alpha - \mu N, \tag{4.11.1}$$

ahol N az asztaltól a testre ható támaszerő:

$$N = mg - F\sin\alpha. \tag{4.11.2}$$

A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W, \tag{4.11.3}$$

ahol W a testen végzett munka, v_1 a kezdeti, v_2 végsebesség. A munka kifejezése most

$$W = (F\cos\alpha - \mu N)s, \tag{4.11.4}$$

ahol az $s = 2,4$ m a megtett út. Figyelembe véve, hogy $v_1 = 0$, a fenti kifejezésekből a hatóerőre

$$F = \frac{\mu mgs + \frac{1}{2}mv_2^2}{s(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = 104,6\mathrm{N} \tag{4.11.5}$$

adódik.

4.12. Feladat: (HN 8B-29) Egy 5 g tömegű 700 m/s sebességű golyó behatol egy rögzített fakockába és megáll benne. Tegyük fel, hogy a fakocka $8\cdot10^3$ N nagyságú állandó erőt fejt ki a golyóra, míg az meg nem áll. Határozzuk meg

(a) mennyi idő alatt áll meg a golyó?

(b) milyen mélyen hatol be a fába?

(c) mennyi munkát végez a fakocka, amíg a golyó meg nem áll?

(d) mennyivel változik meg a golyó mozgási energiája?

Megoldás: A koordinátarendszer tengelye mutasson balról jobbra. Jelöljük az adatokat: $m = 5$ g; $v_0 = 700$ m/s (tételezzük fel, hogy a golyó balról jobbra halad) és így $F = -8\cdot10^3$ N.

(a) Először a golyó gyorsulását számoljuk, amely

$$a = \frac{F}{m} = -1,6\cdot10^6\,\mathrm{m/s^2}. \tag{4.12.1}$$

A megállásig eltelt idő a $v(t) = 0 = at + v_0$ összefüggésből

$$t = \frac{v_0}{-a} = 4,375\cdot10^{-4}\,\mathrm{s}. \tag{4.12.2}$$

(b) A kiszámolt adatok felhasználásával a megtett út

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0,153\,\mathrm{m}. \tag{4.12.3}$$

(c) A fakocka által végzett munka

$$W = F \cdot s = -1225\,\mathrm{J}. \tag{4.12.4}$$

(d) A golyó kinetikus energiájának megváltozása

$$\Delta E_k = W = -1225\,\mathrm{J}. \tag{4.12.5}$$

4.13. Feladat: A d vastagságú deszkába m tömegű v_0 sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék v sebessége, ha
(a) a deszkában állandó a ható F erő,
(b) a deszkában a behatolási mélységtől függő $F(x) = Dx$ erő fékezi? (A D konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W, \tag{4.13.1}$$

ahol W a testen végzett munka. Ami az a, esetben:

$$W = -Fd, \tag{4.13.2}$$

és a b, esetben az egyenes alatti területtel:

$$W = -\frac{1}{2}Dx^2. \tag{4.13.3}$$

Ezekkel a sebességek: a,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - Fd\right)}, \tag{4.13.4}$$

és b,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}Dd^2\right)}. \tag{4.13.5}$$

4.14. Feladat: * A d vastagságú deszkába m tömegű v_0 sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék v sebessége, ha a deszkában a behatolási mélységtől függő $F(x) = cx^2$ erő fékezi? (A c konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W, \tag{4.14.1}$$

ahol W a testen végzett munka, ami

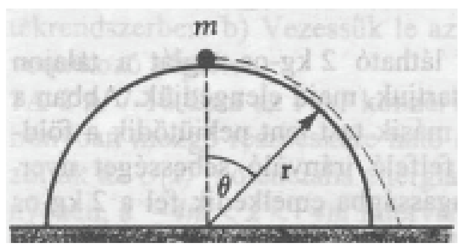
$$W = -\int_0^d cx^2 dx = -\frac{1}{3}cd^3. \tag{4.14.2}$$

Ezzel a sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{3}cd^3\right)}. \tag{4.14.3}$$

Munkavégzés konzervatív erőtérben. Potenciális energia

4.15. Feladat: (HN 7B-18) Egy kicsiny, m tömegű test a sima, r sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetéből kissé kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. Mekkora



23. ábra.

a függőlegessel bezárt szög , amikor a test elhagyja a gömb felszínét?

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen a félgömb alján. Így a helyzeti energia mozgás kezdetén $E_{p_1} = mgr$, a kinetikus energia $E_{k_1} = 0$ mivel a test áll. A felülettől történő elválás pillanatában: $E_{p_2} = mgr\cos\theta$, a mozgási energia $E_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2$. A mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, így a mechanikai energia megmaradó mennyiség, azaz írhatjuk:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \tag{4.15.1}$$

Behelyettesítés után:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta. \tag{4.15.2}$$

A körmozgás feltétele:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\theta - N, \tag{4.15.3}$$

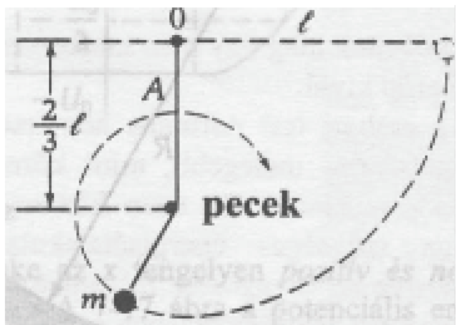
ahol a jobboldal első tagja a súlyerő radiális komponense, az N a támaszerő. Az elválás pillanatában:

$$N = 0. \tag{4.15.4}$$

Az egyenletek megoldása:

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \theta = 48^0. \tag{4.15.5}$$

4.16. Feladat: (HN 7B-21) Egy m tömegű testet l hosszúságú kötélre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. Az O felfüggesztési ponttól $2/3l$ távolságban kicsiny pöckot helyeztünk el, melybe a kötél lengése során beakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy $1/3l$ sugarú függőleges körpályára tér át. Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az A pontban,



24. ábra.

ami a pöcök elérése utáni legmagasabb helye a testnek!

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen az A pont magasságában. Így a mechanikai energia megmaradás tétele miatt egyszerűen

$$mg\frac{1}{3}l = \frac{1}{2}mv^2. \tag{4.16.1}$$

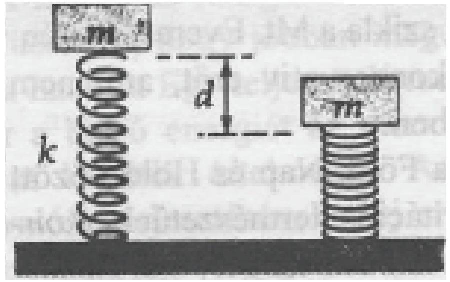
Másrészt a pecek körüli körmozgásra az A pontban az

$$m\frac{v^2}{\frac{1}{3}l} = K + mg \tag{4.16.2}$$

összefüggés írható, ahol K a kötélerő. A két egyenletből

$$K = mg. \tag{4.16.3}$$

4.17. Feladat: (HN 7A-10) Egy m tömegű tégla úgy van felerősítve, hogy a k rugóállandójú rugót éppen csak érinti. A téglát ekkor elengedjük nyugalmi helyzetéből. Határozzuk meg, hogy milyen d távolságra jut el a tégla az elengedés után!



25. ábra.

Megoldás: Mivel a mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, a mechanikai energia megmarad. Azaz a kezdeti kinetikus energia E_{k_1} és potenciális energia E_{p_1} összege egyenlő a tekintett mozgás végi kinetikus E_{k_2} és potenciális energia E_{p_2} összegével:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \tag{4.17.1}$$

Mivel a test kezdetben és az alsó helyzetben is áll, így $E_{k_1} = 0$ és $E_{k_2} = 0$. A helyzeti energia zérus pontját a talajra helyezve $E_{p_1} = mgh$, ahol h a tégla talajtól való távolsága. Az E_{p_2} a tégla alsó helyzethez tartozó helyzeti energiájából és a rugalmas energiából áll, azaz $E_{p_2} = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2$. A fenti egyenletbe helyettesítve:

$$mgh = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2. \tag{4.17.2}$$

Ebből a d összenyomódás mértéke:

$$d = \frac{2mg}{k}. \tag{4.17.3}$$

(*Megjegyzés:* Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha pl. a felső helyzetet választjuk a potenciális energia zérus pontjának.)

4.18. Feladat: A völgy fölött h magasságban átvezető viaduktról gumiköteleken ugrálnak alá (bungee jumping). Milyen L hosszúságúnak válassza az m tömegű ugró a k direkció erejű gumikötelet, hogy a talajt éppen érintse? (Az ugró kiterjedése legyen pontszerű.)

Megoldás: Az ugró a mozgás elején és a talaj érintése pillanatában áll, így mozgási energiája mindkét esetben zérus. Így a kezdeti mgh helyzeti energia – a völgy alját zérus szintnek véve – a gumikötélben tárolódó rugalmas energiává alakul, azaz:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-L)^2. \tag{4.18.1}$$

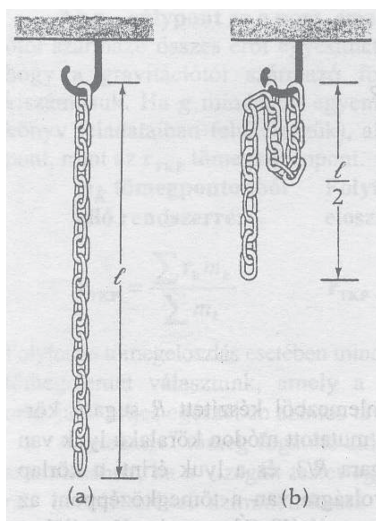
Itt a $h-L$ a gumikötél megnyúlása. Az egyenlet megoldása:

$$L = h \pm \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \tag{4.18.2}$$

Innen a fizikailag értelmes megoldás, így a kezdeti (beállítandó) hossz:

$$L = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \tag{4.18.3}$$

4.19. Feladat: (HN 10B-11) Az m tömegű, l hosszúságú lánc kampón lóg a 26. ábra szerint. Számítsuk ki azt a munkát, amely a lánc középső láncszemének a kampóra történő felakasztáshoz szükséges!



26. ábra.

Megoldás: Legyen a potenciális energia zérus pontja a teljesen leengedett lánc legalsó pontja (26a ábra). Ennek megfelelően az m tömegű lánc tömegközéppontja $\frac{1}{2}l$ magasságban van, így E_1 helyzeti energiája

$$E_1 = mg\frac{1}{2}l. \tag{4.19.1}$$

A felakasztott lánc egyes darabjainak energiái összege a 26.b ábrán balról jobbra haladva

$$E_2 = \frac{1}{2}mg\frac{3}{4}l + \frac{1}{4}mg\frac{7}{8}l + \frac{1}{4}mg\frac{7}{8}l = \frac{13}{16}mgl. \tag{4.19.2}$$

A szükséges munka a két potenciális energia különbsége

$$W = E_2 - E_1 = \frac{5}{16}mgl. \tag{4.19.3}$$

4.20. Feladat: * Az m_0 tömegű l_0 hosszúságú lánc a földön hever. A végét elkezdjük állandó v_0 sebességgel emelni. a, Mekkora erőt kell ehhez kifejteni? b, Mekkora a végzett összes munka, amikor a kötél vége éppen elhagyja a talajt?

Megoldás: a, Tekintsük a közbenső t időpontot, amikor már $v_0 t$ hossz felemelkedett és v_0 sebességű. E pillanatban az m tömegű darabnak a helyzeti energiája:

$$E_p(t) = \frac{1}{2} mgh = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_0}{l_0} v_0 t}_{m} \, g \underbrace{v_0 t}_{h} \tag{4.20.1}$$

tömegű darabra. Másrészt ennek az m tömegű darabnak a kinetikus energiája:

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0 t v_0^2. \tag{4.20.2}$$

A teljes energia:

$$E(t) = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t^2 g + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^3 t, \tag{4.20.3}$$

amelyből a $P(t)$ teljesítmény:

$$P(t) = \frac{dE}{dt} = \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t g + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^3. \tag{4.20.4}$$

A $P(t) = F\,v$ összefüggésből a láncra

$$F(t) = \frac{P(t)}{v_0} = \frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 \tag{4.20.5}$$

erővel kell hatni. b, A végzett munka egyszerűen kiszámolható úgy, hogy a lánc tömegközéppontja $\frac{l_0}{2}$ magasságra emelkedett, másrészt a lánc sebessége v_0. A helyzeti energiája $\frac{m_0 g l_0}{2}$, a mozgási energiája $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$, azaz

$$W = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \tag{4.20.6}$$

Megjegyzés: E munka a következőképpen is kiszámolható. A felemeléshez szükséges idő: $t_f = \frac{l_0}{v_0}$. A munka $W = \int F\,dx = \int F\,v\,dt$ alapján:

$$W = \int_0^{\frac{l_0}{v_0}} \left(\frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 \right) v_0 dt = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \tag{4.20.7}$$

Energiatétel

4.21. Feladat: Egy 60 kg-os láda 4 m magasról lecsúszik egy a vízszintessel 30^0-os szöget bezáró lejtőn. Mekkora a súrlódási erő munkája ezalatt, ha a láda 5 m/s sebességet ér el?

Megoldás: Jelölések: $m = 60$ kg, $h = 4$ m, $\alpha = 30^0$ és $v = 5$ m/s. A mechanikai energia megmaradást "elrontó" disszipatív erő munkáját a következőképpen tudjuk figyelembe venni:

$$U_{p_2} + E_{k_2} = U_{p_1} + E_{k_1} + W, \tag{4.21.1}$$

ahol végső potenciális és kinetikus energiát összegét (mechanikai energia) úgy kapjuk, hogy a kezdeti potenciális és kinetikus energiához hozzáadjuk a súrlódási végzett munkát. Mivel a kezdeti mechanikai energia nagyobb mint a végső, biztosak lehetünk benne, hogy W negatív. A potenciális energia zérus szintjét a lejtő aljára a jelen esetre a következő egyenlet írható:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + W. \tag{4.21.2}$$

Az adatok behelyettesítése után

$$W = -1650\,\mathrm{J}. \tag{4.21.3}$$

4.22. Feladat: Az α hajlásszögű, μ súrlódási együtthatójú lejtő alján felfelé lökünk v_0 sebességgel egy m tömegű testet. A test a mozgás tetőpontját elérve visszacsúszik. Mekkora lesz a sebessége a lejtő alján? A feladatot oldjuk meg a

(a) dinamikai egyenletek megoldásával és

(b) az energiatétel felhasználásával!

Megoldás:

(a) A felfele mozgásnál legyen a koordinátatengely irányítása pozitív a felfele irányban. Ekkor a test lejtőirányú mozgásegyenlete

$$ma_{fel} = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{4.22.1}$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{fel} = -g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \tag{4.22.2}$$

A felfele mozgás ideje a $0 = v_0 + a_{fel}t$ egyenletből

$$t_{fel} = \frac{v_0}{-a_{fel}}, \tag{4.22.3}$$

amellyel a idő alatt a megtett út

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{4.22.4}$$

A lefele csúszásnál fordítsuk meg a koordinátatengelyt, a pozitív irányítás mutasson lefele. Ekkor a mozgásegyenlet

$$ma_{le} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{4.22.5}$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{le} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \tag{4.22.6}$$

A lefele mozgás ideje a $v = a_{le}t$ egyenletből

$$t_{le} = \frac{v}{a_{le}}, \tag{4.22.7}$$

amely idő alatt a megtett s út

$$s = \frac{1}{2}a_{le}t^2 = \frac{v^2}{2a_{le}}. \tag{4.22.8}$$

E két egyenletből a sebesség a lejtő alján

$$v = \sqrt{2sa_{le}}. \tag{4.22.9}$$

Az s és a_{le} korábban kapott kifejezéseit behelyettesítve a sebességre a

$$v = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \tag{4.22.10}$$

eredmény adódik.

(b) Az energiatétel azt állítja, hogy a végső kinetikus és potenciális energia összege egyenlő a kezdeti kinetikus és potenciális energia összegével plusz a testen végzett munkával, azaz

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W. \tag{4.22.11}$$

A felfele mozgásnál $U_{p1} = 0$; $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2$; $U_{p2} = mgs\sin\alpha$; $E_{k2} = 0$ és $W = -\mu mgs\cos\alpha$. Egy egyenletbe összeírva

$$mgs\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgs\cos\alpha. \tag{4.22.12}$$

Ebből az s út

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{4.22.13}$$

A lefele csúszásnál

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W, \tag{4.22.14}$$

ahol $U_{p1} = mgs\sin\alpha$; $E_{k1} = 0$; $U_{p2} = 0$; $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$ és $W = -\mu mgs\cos\alpha$. Egy egyenletbe írva

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs\sin\alpha - \mu mgs\cos\alpha. \tag{4.22.15}$$

Az s utat a (4.22.13) egyenletből behelyettesítve a sebességre a fentiekkel egyező

$$v = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \tag{4.22.16}$$

eredményt kapjuk.

5. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből

Centrifugális erő

5.1. Feladat: (HN 13B-20) Egy népszerű vidámparki mutatványnál a látogatók egy függőleges tengely körül forgó henger belső falának támaszkodnak a 27. ábrának megfelelően. Ezután a padlót lesüllyesztik, és hagyják, hogy a látogatók a centrifugális erőtől a falhoz "odaszögezve" és a súrlódási erő következtében a lecsúszásztól védve a falon maradjanak. A henger R sugarának, az ω szögsebességnek és a g nehézségi gyorsulásának függvényében határozzuk meg azt a legkisebb μ nyugalmi súrlódási együtthatót, amely a lecsúszást megakadályozza. A feladatot forgó vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!

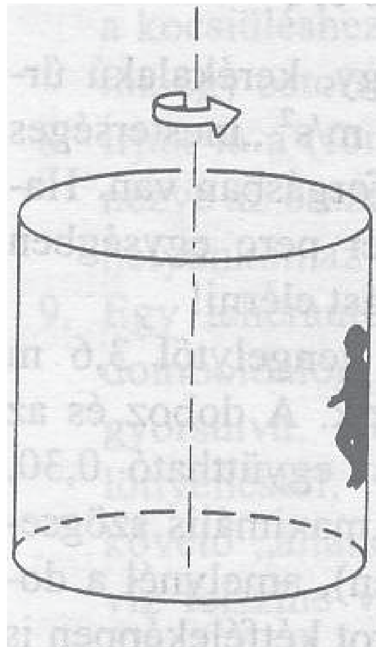
Megoldás: A forgó vonatkoztatási rendszerben a falhoz "odaszögezett" látogatóra négy erő hat. A centrifugális erő (tehetetlenségi erő), amely radiálisan kifelé mutat és nagysága $F_{cf} = mR\omega^2$. A falon radiálisan befelé mutat az N támaszerő, amelynek nagysága pontosan $mR\omega^2$. Függőlegesen lefelé hat az mg súlyerő, ezzel ellentétesen az F_s súrlódási erő, és a kettő egymással egyenlő. Az fentieket matematikalag összefoglalva:

$$mg = F_s = \mu N = \mu mR\omega^2, \tag{5.1.1}$$

ahonnan

$$\mu = \frac{g}{R\omega^2}. \tag{5.1.2}$$

5.2. Feladat: Egy $M = 1,499 \cdot 10^{25}$ kg tömegű, $R = 10000$ km sugarú bolygó északi sarkán $k = 100$ N/m direkciós erejű rugóra $m = 1$ kg tömegű testet lógatunk. A bolygó $\omega = 10^{-4}$ 1/s szögsebességgel forog. (A gravitációs állandó: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.)



27. ábra.

(a) Mekkora a rugó megnyúlása?

(b) Ezt követően a mérést az egyenlítőn megismételjük. Mennyi ekkor a rugó megnyúlása?

Megoldás:

(a) A bolygó északi sarkán végzett mérés során

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = k\Delta x, \tag{5.2.1}$$

ahol Δx a rugó megnyúlása, amely

$$\Delta x = \gamma \frac{mM}{kR^2} = 0,1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{mm}. \tag{5.2.2}$$

(b) Az egyenlítőn figyelembe kell vennünk a centrifugális erőt, amellyel az egyenlet úgy módosul, hogy

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - mR\omega^2 = k\Delta x'. \tag{5.2.3}$$

Innen a $\Delta x'$ megnyúlás

$$\Delta x' = \gamma \frac{mM}{kR^2} - \frac{mR\omega^2}{k} = 0,099\,\mathrm{m} = 99\,\mathrm{mm}, \tag{5.2.4}$$

azaz a rugó megnyúlása 1 mm-rel kevesebb.

5.3. Feladat: (HN 14C-39) Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl középpontjától r távolságra lévő helyen h magasságból egy tárgyat ejtenek a padlóra. A mozgást a ringlispíl vonatkoztatási rendszeréből vizsgálva mutassuk meg, hogy az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság jó közelítéssel $\omega^2 rh/g$. Milyen feltételezésekkel kell élni a feladat megoldása során?

Megoldás: A tárgy

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{5.3.1}$$

idő alatt esik. A forgó vonatkoztatási rendszerben az

$$a_{cf} = r\omega^2 \tag{5.3.2}$$

centrifugális gyorsulása lesz, amely kifele mutató radiális irányú. E gyorsulással az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság

$$\Delta s = \frac{1}{2}a_{cf}(\Delta t)^2 = \frac{\omega^2 rh}{g}. \tag{5.3.3}$$

A forgás közbeni szögelfordulás

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t. \tag{5.3.4}$$

Ha azt tekintjük, hogy a test az álló rendszerből nézve érintő irányban $r\omega$ sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az elejtés után, akkor az ehhez tartozó elmozdulás

$$\Delta x = r\omega\Delta t. \tag{5.3.5}$$

Az ehhez az elmozduláshoz tartozó α központi szög

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{r} = \omega\Delta t. \tag{5.3.6}$$

Ahhoz, hogy φ és α közelítőleg megegyezzenek egymással, az $\omega\Delta t << 1$ feltétel teljesülése szükséges.

Coriolis-erő

5.4. Feladat: (HN 14C-30) Írjuk le, hogyan tudna egy személy a forgásban lévő ringlispíl lapján járni úgy, hogy a rá ható Coriolis-erő és a centrifugális erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú legyen! (A ringlispíl forogjon az óra járásával ellentétesen.)

Megoldás: Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl origótól való R távolságú pontjában a személyre radiális kifele mutató $F_{cf} = mR\omega^2$ centrifugális erő hat. Ahhoz, hogy a Coriolis-erő radiális befele mutató legyen, ahhoz az óra járásával egyezően, az R sugarú kör érintője irányában kell v sebességgel haladnia. A Coriolis erő nagysága $F_{Co} = 2m\omega v$. A kettő

$$F_{cf} = mR\omega^2 = 2m\omega v = F_{Co} \tag{5.4.1}$$

egyenlőségéből a sebességre a

$$v = \frac{R\omega}{2} \tag{5.4.2}$$

adódik.

5.5. Feladat: Egy forgótárcsa szélén álló ember eldob egy testet vízszintesen a függőleges forgástengely irányába 10 m/s kezdősebességgel. A tárcsa percenként 600-at fordul. Mekkora a tárcsa vonatkoztatási rendszerében a test pályájának kezdeti görbületi sugara?

Megoldás: Jelölések: v = 10 m/s és f = 600 1/perc = 10 1/s. A tárcsa szögsebessége $\omega = 2\pi f$ = 62,8 rad/s. A forgó rendszerben a testet a Coriolis-erő téríti el, amelyhez tartozó gyorsulás nagysága

$$a_{Co} = 2\omega v. \tag{5.5.1}$$

Az indulás pillanatában körpályán mozog a test, amely esetén gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{5.5.2}$$

A kettő egyenlőségéből a görbületi sugár

$$R = \frac{v}{2\omega} = 0,159\,\mathrm{m}. \tag{5.5.3}$$

5.6. Feladat: (HN 14C-33) A mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső a vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége 1,5 rad/s abban a pillanatban, amikor az 5 g tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből.

(a) A forgó rendszerben mekkora Coriolis-erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában?

(b) Milyen irányú ez az erő?

Megoldás: Jelölések: $\omega = 1,5$ rad/s; $m = 5$ g és $v = 500$ m/s.

(a) A puska csöve az óra járásának megfelelően fordul el, így az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor függőlegesen lefele mutat. A Coriolis-erő a $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor és a $\mathbf{v}$ sebességvektorokkal

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \tag{5.6.1}$$

amelynek nagysága – figyelembe véve, hogy $\boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{v}$ egymásra merőlegesek

$$F = 2m\omega v = 7,5\,\mathrm{N}. \tag{5.6.2}$$

(b) Az erő iránya jobbról balra mutat.

5.7. Feladat: (HN 14C-38) A percenként tízet forgó ringlispíl szélén álló kislány 10 m/s vízszintes kezdősebességgel labdát dob a forgástengely felé. Úgy látja, hogy a pályagörbe jobbra kanyarodik.
(a) Számítsuk ki a pályagörbe kezdeti vízszintes görbületi sugarát!
(b) Amikor a labdát dobó kislány a ringlispíl közepe felé néz, jobbra vagy balra látja elmozdulni a távoli tájat?

Megoldás: Jelölések: A fordulatszám $f = 10$ 1/perc $= 1/6$ 1/s, amellyel a szögsebesség $\omega = 2\pi f = 1,047$ rad/s; $v = 10$ m/s.
(a) A labda Coriolis-gyorsulása

$$a_{Co} = 2\omega v, \tag{5.7.1}$$

amely éppen az elkanyarodás

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{5.7.2}$$

gyorsulása. Itt r a pályagörbe görbületi sugara. A két gyorsulás egyenlőségéből

$$r = \frac{v}{2\omega} = 9,55\,\mathrm{m}. \tag{5.7.3}$$

(b) Mivel a pályagörbe jobbra kanyarodik, így a ringlispíl az óra járásával ellentétes irányban forog. Az ilyen irányban forgó rendszerből nézve a táj balról jobbra látszik mozogni.

5.8. Feladat: A Föld napi forgása következtében az eső testek kelet felé elhajlanak.
(a) Mekkora az Egyenlítőre szabadon eső test keleti irányú gyorsulása?
(b) Számítsuk ki, hogy a becsapódás pillanatában mekkora a keleti irányú sebessége annak a

testnek, amely $h = 100$ m magasból esik szabadon az Egyenlítőre!

Megoldás:

(a) Az Egyenlítőn szabadon eső testnek a Coriolis-erő következményeként – figyelembe véve, hogy a Föld ω szögsebessége és a leeső test v sebessége egymásra merőleges –

$$a(t) = 2\omega v = 2\omega g t \tag{5.8.1}$$

keleti irányú gyorsulása van.

(b) A t időtartamú esés során az $a(t) = 2\omega g t$ egyenes alatti terület éppen a keleti irányú sebesség:

$$v(t) = \omega g t^2. \tag{5.8.2}$$

* Más úton:

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t 2\omega g t\,\mathrm{d}t = \omega g t^2. \tag{5.8.3}$$

Az esés ideje 4,47 s, $\omega = 7{,}27 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $g = 10$ m/s^2 adatokkal számolva:

$$v_{kelet} = 1.45 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s}. \tag{5.8.4}$$

Megjegyzés: Az ω szögsebesség nagyon kicsi, és ezért a "Coriolis-gyorsulás" is nagyon kicsi (ha nem túl sokáig esik a test). Emiatt tekinthetjük úgy, hogy a test teljes sebessége végig gyakorlatilag lefelé mutat, és így a Coriolis-gyorsulásnak valóban tisztán vízszintes az iránya.

6. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből

Impulzustétel, impulzusmegmaradás törvénye

6.1. Feladat: Egy $m = 4$ kg tömegű kalapács $v_0 = 6$ m/s sebességgel érkezik a szög fejéhez és $\Delta t = 0{,}002$ s alatt fékeződik le, miközben a szög behatol a fába. (A szög tömege elhanyagolható a kalapács tömegéhez viszonyítva.)

(a) Számítsuk ki az átlagos fékező erőt!

(b) Számítsuk ki a szög útját a fában!

(c) Mekkora munkát végzett a fa a szögön?

Megoldás:

(a) A szögre ható átlagos fékező erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -12000\,\mathrm{N}, \tag{6.1.1}$$

ahol a negatív előjel a fékező hatást fejezi ki.
(b) A szög átlagos gyorsulása a sebességváltozásával számolható ki. Amenniyben a szög nem deformálódott az ütés alatt, a kezdeti sebessége meg kell hogy egyezzen a kalapács sebességével. Ezért a sebesség megváltozása $\Delta v = -v_0$. A szög gyorsulása ezért

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -3000\,\mathrm{m/s^2}, \tag{6.1.2}$$

amit felhasználhatunk a szög által megtett út meghatározásához.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0,006\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{mm}. \tag{6.1.3}$$

(c) A fa által végzett munka a szögön:

$$W = Fs = -72\,\mathrm{J}. \tag{6.1.4}$$

6.2. Feladat: (HN 8B-27) A kezdetben nyugalomban lévő 5 kg tömegű testre 5 másodpercig 6 N állandó erő hat, majd az erő 3 s alatt egyenletesen zérusra csökken. Mekkora sebességet ér el a test?

Megoldás: Jelölések: $m = 5$ kg; $t_1 = 5$ s; $F = 6$ N és $t_2 = 8$ s a második időintervallum vége.
A test impulzusváltozását kell kiszámoljuk. A $0 \leq t \leq t_1 = 5$ s időintervallumban az impulzusváltozás

$$\Delta I_1 = F t_1 = 30\,\mathrm{kgm/s}. \tag{6.2.1}$$

A második szakaszon az erő időbeli függése

$$F(t) = \frac{F}{t_2 - t_1}(t_2 - t). \tag{6.2.2}$$

A második időintervallumon történő impulzusváltozás az egyenes alatti területtel egyszerűen számolható, amely

$$\Delta I_2 = \frac{F}{2}(t_2 - t_1) = 9\,\mathrm{kgm/s}. \tag{6.2.3}$$

A teljes impulzusváltozás

$$\Delta I = \Delta I_1 + \Delta I_2 = 39\,\mathrm{kgm/s}, \tag{6.2.4}$$

amelyet a tömeggel osztva a végsebességet kapjuk:

$$v = \frac{\Delta I}{m} = 7,8\,\mathrm{m/s}. \tag{6.2.5}$$

6.3. Feladat: (HN 8C-42) * Egy 8 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At - Bt^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 24$ N/s és $B = 1,2$ N/s^2.

(a) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet ér el a tömeg mielőtt újra megállna!

(b) Mennyi idő múlva következik ez be?

Megoldás:

(a) A test impulzusváltozása

$$\Delta I = \int_0^t F(t)\mathrm{d}t = \int_0^t (At - Bt^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{3}Bt^3. \tag{6.3.1}$$

Innen a sebesség

$$v(t) = \frac{1}{m}(\frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{3}Bt^3). \tag{6.3.2}$$

A sebesség maximuma akkor van, ha a gyorsulás zérus, azaz most

$$t = \frac{A}{B}. \tag{6.3.3}$$

A behelyettesítések után a maximális sebesség

$$v_{max} = \frac{1}{6m}\frac{A^3}{B^2} = 200\,\mathrm{m/s}. \tag{6.3.4}$$

(b) A maximális sebesség elérése $t = 20$ s idő múlva következik ez be.

6.4. Feladat: (HN 8C-43) * A 2,5 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 0,75$ N/s^2.

(a) Határozzuk meg a test sebességét 15 másodperccel az erő alkalmazása után!

(b) Mekkora állandó erővel lehetne elérni ezt a sebességet?

Megoldás:

(a) A test gyorsulása

$$a = \frac{1}{m}At^2, \tag{6.4.1}$$

amellyel a sebesség

$$v(t) = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{1}{m}At^2\mathrm{d}t = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{3}At^3\right]_0^{15} = 337,5\,\mathrm{m/s}. \tag{6.4.2}$$

(b) Ha az erő állandó, akkor

$$v = at = \frac{F}{m}t, \tag{6.4.3}$$

ahonnan az erő

$$F = \frac{mv}{t} = 56,25\,\mathrm{N} \tag{6.4.4}$$

kell legyen ekkora sebesség eléréséhez.

6.5. Feladat: Egy $M = 80$ kg tömegű ember jégen egy helyben állva eldob vízszintes irányban egy $m = 20$ kg tömegű golyót. A golyó az embertől mérve $v_0 = 20$ m/s sebességgel távolodik. Mekkora az ember v_M sebessége a jéghez viszonyítva? (A jég és az ember közötti súrlódási erő elhanyagolhatóan kicsi.)

Megoldás: Jelölje v_m a golyó jéghez viszonyított sebességét. Az impulzus megmaradás miatt

$$Mv_M = mv_m. \tag{6.5.1}$$

A golyó és az ember relatív sebessége pedig

$$v_0 = v_m + v_M \tag{6.5.2}$$

A két egyenletből

$$v_M = \frac{m}{m+M}\,v_0 \tag{6.5.3}$$

Behelyettesítve a számértékeket $v_M = 4$ m/s adódik.

Rugalmatlan ütközések

6.6. Feladat: Az m tömegű v_0 sebességű test tökéletesen rugalmatlanul ütközik az M tömegű álló testtel. Mekkora lesz az ütközés utáni együttes sebességük? Mekkora átlagos erőhatás lép fel köztük, ha az ütközés ideje (a becsapódástól számítva az összeragadásig) t.

Megoldás: Az impulzus megmaradás miatt:

$$mv_0 = (m+M)v, \tag{6.6.1}$$

ahol v az összeragadt testek együttes sebessége. Az ütközés utáni együttes sebesség ezért

$$v = \frac{m}{m+M}v_0. \tag{6.6.2}$$

Az ütközés közben fellépő átlagos erőhatás pedig: $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$, ahol ΔP az m tömegű test impulzus impulzusváltozása:

$$\Delta P = mv - mv_0 = \frac{m^2}{m+M}v_0 - mv_0 = -\frac{mM}{m+M}v_0. \tag{6.6.3}$$

A negatív előjel arra utal, hogy a m tömegű test impulzusa csökken. Az F erő nagysága így

$$F = -\frac{mM}{m+M}\frac{v_0}{t}. \tag{6.6.4}$$

Hasonló meggondolásokból az M tömegű testre

$$F = \frac{mM}{m+M}\frac{v_0}{t} \tag{6.6.5}$$

erő hat, amely eredmény pont azt mutatja, hogy a kölcsönható erők párosával lépnek fel: azonos nagyságúak és ellentétes irányúak.

6.7. Feladat: Két azonos m tömegű test azonos nagyságú v_0 sebességgel halad, az egyik az y tengelyen, a másik az x tengelyen, mindkét esetben a pozitív irányban. Az origóban a testek tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz az együttes sebességvektoruk és annak nagysága?

Megoldás: Az y tengelyen mozgó test impulzusvektora

$$\mathbf{p_y} = m(0; v_0), \tag{6.7.1}$$

az x tengelyen mozgó test impulzusvektora pedig

$$\mathbf{p_x} = m(v_0; 0). \tag{6.7.2}$$

Az ütközés utáni $2m$ tömegű együttes test impulzusa e két impulzusvektor összege, azaz

$$\mathbf{P} = \mathbf{p_y} + \mathbf{p_x} = m(v_0; v_0). \tag{6.7.3}$$

Az összeragadt test sebességvektora pedig

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{2m} = \left(\frac{v_0}{2}; \frac{v_0}{2}\right). \tag{6.7.4}$$

a sebesség nagysága:

$$V = |\mathbf{V}| = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0. \tag{6.7.5}$$

6.8. Feladat: (HN 8A-4) Egy m tömegű v_0 sebességgel mozgó test vele egyenlő tömegű, eredetileg nyugalomban lévő testbe ütközik és összeragad vele. Határozzuk meg a kinetikus energia $(K-K_0)/K_0$ relatív megváltozását!

Megoldás: Az ütközés tökéletes rugalmatlan, így az impulzus megmarad, a kinetikus energia viszont nem. Az impusumegmaradás az

$$mv_0 = 2mv \tag{6.8.1}$$

egyenlettel fejezhető ki, amelyben v az összeragadt testek végső együttes sebessége. Innen

$$v = \frac{v_0}{2}. \tag{6.8.2}$$

A kezdeti K_0 kinetikus energia

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{6.8.3}$$

A végső kinetikus energia pedig:

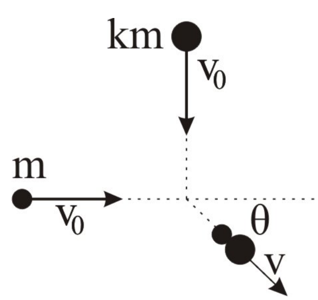
$$K = \frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{4}mv_0^2. \tag{6.8.4}$$

A kinetikus energia $(K-K_0)/K_0$ relatív megváltozása:

$$\frac{K-K_0}{K_0} = -\frac{1}{2}. \tag{6.8.5}$$

A negatív előjel arra utal, hogy az ütközés mechanikai energiaveszteséggel jár.

6.9. Feladat: (HN 8B-11) Két, m illetve km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 sebességgel halad merőleges irányból a 28. ábrán látható módon közeledik egymáshoz, összeütközik, és összeragadva mozgnak együtt tovább. Fejezzük ki a végsebességük irányát meghatározó θ szöget a k segítségével!



28. ábra.

Megoldás: Az ütközés közben megmarad a testek lendülete az x és y irányban egyaránt. Az összeregadt testek össz lendülete

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} mv_0 \\ kmv_0 \end{pmatrix}. \tag{6.9.1}$$

Az összeragadt testek össz lendületéből meghatározható azok sebességvektora is:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{m(1+k)} = \frac{v_0}{1+k}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}. \tag{6.9.2}$$

A 28. ábrán jelölt θ szög meghatározható a $\mathbf{V}$ sebességvektor komponenseivel:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{V_y}{V_x} = k. \tag{6.9.3}$$

6.10. Feladat: (HN 8B-14) Két, m illetve km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 sebességgel halad a $+x$ és $-x$ irányban. Ütközésük után összeragadva haladnak tovább.
(a) Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében, hogy mekkora az összeragadt testek v sebességének nagysága és iránya?
(b) Mekkora a v/v_0 arány, ha $k = 2$?

Megoldás:
(a) Az ütközés folyamatára érvényes a lendületmegmaradás törvénye:

$$mv_0 - kmv_0 = (1+k)mv. \tag{6.10.1}$$

Az egyenlet bal oldala a részrendszerek ütközés előtti lendületeinek összegét írja le, míg a jobb oldal az összeragadt testek összlendületét jelöli. Az egyenletből meghatározható az összeregadt testek együttes sebessége:

$$v = \frac{1+k}{1-k}v_0. \tag{6.10.2}$$

Az eredményből látható, hogy $k > 1$ esetben az összeragadt testek $-x$ irányba haladnak, míg $k < 1$ esetben az ellenkező irányba.
(b) $k = 2$ esetben a sebességek aránya

$$\frac{v}{v_0} = -3. \tag{6.10.3}$$

6.11. Feladat: (HN 9B-7) Fából készült $M = 800$ g tömegű ballisztikus ingatestbe vízszintes irányból $m = 20$ g tömegű ólomsörétet lőttünk. A lengésbe jövő ingatest $h = 10$ cm magasba emelkedik.

(a) Mekkora v közös sebességgel indul az ingatest-sörét rendszer?
(b) Mekkora v_0 sebességgel csapódik az ingába a golyó? A sörét K kinetikus energiájának hányadrésze veszett el, azaz fordítódott a fa deformálására, ill. felmelegítésére?

Megoldás:
(a) Az összeragadt inga-sörét rendszer össz mozgási energiája teljes egésszében átalakul helyzeti energiává miközben h magasságba emelkedik:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh, \tag{6.11.1}$$

mely egyenletből az együttes sebesség

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{6.11.2}$$

Behelyettesítve a számadatokat $v \approx= 1,414$ m/s adódik.
(b) A golyó becsapódására az impulzus megmaradás tételét alkalmazhatjuk a sörétszemek sebességének meghatározására:

$$mv_0 = (m+M)v. \tag{6.11.3}$$

Az egyenlet segítségével meghatározhatjuk a sörétszemek sebsségét:

$$v_0 = \frac{m+M}{m}v. \tag{6.11.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $v_0 \approx 57,98$ m/s adódik. A kezdeti kinetikus energia

$$K = E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 \approx 33,62\,\mathrm{J}, \tag{6.11.5}$$

míg az ütközés után

$$E_2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 \approx 0,82\,\mathrm{J}. \tag{6.11.6}$$

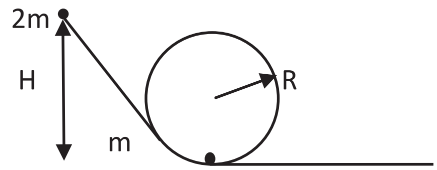
A mechanikai energiának az ütközés során a

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \approx 97,6\%. \tag{6.11.7}$$

része veszett el, illetve alakult át hőenergiává.

6.12. Feladat: Egy $2m$ tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedő lejtőn a 29. ábrának megfelelően. Mekkora H magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmatlan ütközés után a pálya alján lévő m tömegű test végighaladjon a hurkon?

Megoldás: A test mozgását három szakaszra oszthatjuk:



29. ábra.

(a) *A 2m tömegű test lecsúszik a hurok aljára az ütközés előtti pillanatig.* A $2m$ tömegű test H magasságból való lecsúszásra a

$$2mgH = \frac{1}{2}2mv_0^2 \tag{6.12.1}$$

mechanikai energia-megmaradást kifejező egyenlet írható fel, amelyből az ütközés előtti sebesség

$$v_0 = \sqrt{2gH}. \tag{6.12.2}$$

(b) *Ezután a 2m tömegű test rugalmatlanul ütközik az m tömegű testtel, majd összetapadva mozognak tovább.* Az A m tömegű testtel való tökéletesen rugalmatlan ütközésre az impulzus megmaradásának tételét alkalmazzuk

$$2mv_0 = 3mv_1, \tag{6.12.3}$$

ahonnan az ütközés utáni v_1 sebesség

$$v_1 = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2gH}. \tag{6.12.4}$$

(c) *Végül az összetapadt 3m tömegű test feljut a hurok tetejére és éppen áthalad a tetőponton.* A $2R$ magas hurok tetején az összeragadt $3m$ tömegű test v_2 sebessége az

$$\frac{1}{2}3mv_1^2 = \frac{1}{2}3mv_2^2 + 3mg\,2R \tag{6.12.5}$$

egyenletből határozható meg. Innen a v_2 tetőponti sebesség

$$v_2 = \sqrt{\frac{8}{9}gH - 2gR}. \tag{6.12.6}$$

A tetőponton való áthaladáshoz szükséges minimális sebességet a test és a hurok között fellépő nyomási erő eltűnése határozza meg. Ekkor a testet csak a súlyerő tartja körpályán, azaz

$$3m\frac{v_2^2}{R} = 3mg. \tag{6.12.7}$$

Behelyettesítés után a minimális indítási magasság

$$H = \frac{27}{8}R. \tag{6.12.8}$$

Rugalmas ütközések

6.13. Feladat: Mutassa meg, hogy a kemény asztallapon pattogó m tömegű golyó hosszú idő átlagában mg erővel nyomja az asztallapot!

Megoldás: Ha a golyót h magasságból leejtük, az $v = \sqrt{2gh}$ sebességgel csapódik be az asztallapba. Tökéletesen rugalmas ütközéskor a sebesség nagysága nem, csupán az iránya változik meg az ellenkezőjére. Ennek megfelelően a golyó impulzusváltozása

$$\Delta P = mv - (mv) = 2mv = 2m\sqrt{2gh}. \tag{6.13.1}$$

Két ütközés között eltelt Δt idő (mely a mozgás során fellépő átlagos erőhatás kiszámolásához szükséges) kétszerese a szabadon eső test h magasságból történő esési idejének, azaz

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{6.13.2}$$

Így az átlagos erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2\sqrt{\frac{2h}{g}}} = mg, \tag{6.13.3}$$

ami a feladat állításával megegyezik.

6.14. Feladat: Egy L oldalélű hasábban az oldallal párhuzamosan, v_0 sebességgel mozog egy m tömegű részecske.

(a) Mekkora átlagos erővel nyomja a reészecske a szembenlévő falakat?

(b) Mekkora az átlagos nyomás, ha a mozgásra merőleges lapok felülete A?

(c) Hogyan változik a megoldás, ha N részecske teszi ezt?

Megoldás:

(a) A részecske impulzusváltozása a fallal való ütközés során $\Delta P = 2mv_0$. Két egymást követő ütközés között eltelt idő pedig $\Delta t = \frac{2L}{v_0}$. Az ütközések során fellépő átlagos erő tehát

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\frac{2L}{v_0}} = \frac{mv_0^2}{L}. \tag{6.14.1}$$

(b) A falakon ébredő átlagos nyomás:

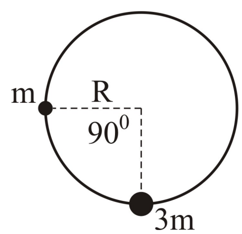
$$p = \frac{F}{A} = \frac{mv_0^2}{LA}. \tag{6.14.2}$$

(c) N részecske esetén a falakat nyomó F_N erő, illetve p_N nyomás megsokszorozódnak:

$$F_N = N\frac{mv_0^2}{L}, \qquad p_N = N\frac{mv_0^2}{LA}. \tag{6.14.3}$$

(*Megjegyzés:* Utóbbi eredmények szolgálnak a kinetikus gázelmélet alapjául!)

6.15. Feladat: (HN 9C-32) Függőleges síkú, R sugarú körré hajlított, merev huzalon a rá fűzött m tömegű gyöngy a 30. ábrán látható módon lecsúszik. A körpálya oldalsó pontjából nyugalom-



30. ábra.

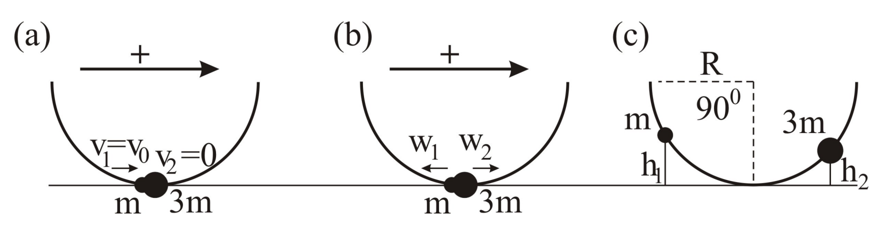
ban lévő gyöngy pusztán a gravitáció hatására lecsúszik és rugalmasan ütközik a kör legmélyebb pontjában nyugalomban lévő $3m$ tömegű másik gyönggyel.

(a) Az R sugárral kifejezve határozzuk meg, hogy milyen magasra emelkednek a gyöngyök az ütközés után!

(b) Az ütközés után a gyöngyök súrlódámentesen folyamatosan tovább mozognak és újra rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg, hogy mennyi a gyöngyök sebessége közvetlenül a második ütközés után!

Megoldás:

(a) A 31.(a) ábra az R magasságból lecsúszó v_0 sebességű és m tömegű gyöngy a $3m$ tömegű



31. ábra.

gyönggyel való ütközésének pillanatát mutatja. Az ütközés pillanatáig az R magasságból lecsúszó gyöngy potenciális energiája átalakul mozgási energiává:

$$mgR = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{6.15.1}$$

Ezért az m tömegű gyöngy sebessége $v_0 = \sqrt{2gR}$. A rugalmas ütközés folyamatára az impulzus megmaradás mellett fennáll a mechanikai energia-megmaradása is. A 31.(a) és 31.(b) ábrákon bejelölt pozitív irányok alapján felírhatjuk az ütközés előtti és utáni lendületek mérlegét.

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 w_1 + m_2 w_2. \tag{6.15.2}$$

A mechanikai energia-megmaradása pedig a

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_2^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 \tag{6.15.3}$$

egyenlettel fejezhető ki. A (6.15.2) és (6.15.3) egyenletek egy általános, egyenes menti rugalmas ütközést írnak le. Esetünkben $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, $v_1 = v_0$, $v_2 = 0$ és w_1, valamint w_2 ismeretlen paraméterek. Átalakítva a (6.15.2) és (6.15.3) egyenleteket:

$$m_1(v_1 + w_1) = m_2(w_2 + v_2), \tag{6.15.4}$$

és

$$m_1(v_1^2 - w_1^2) = m_2(w_2^2 - v_2^2) \tag{6.15.5}$$

adódnak. Elosztva egymással a két egyenletet és felhasználva az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ aznosságot

$$v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \tag{6.15.6}$$

adódik. A (6.15.6) és (6.15.2) egyenletekből kiküszöbölve a w_2 sebességet,

$$w_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1. \tag{6.15.7}$$

adódik. Analóg módon

$$w_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2. \tag{6.15.8}$$

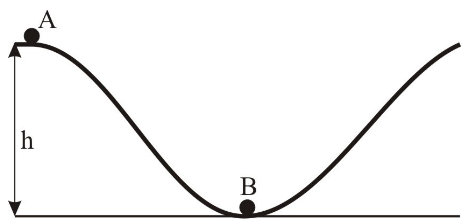
Esetünkben az ütközés utáni sebességek (lásd a 31.(b) ábrát) $w_1 = w_2 = \frac{v_0}{2}$-nek adódnak. Mivel a gyöngyök sebessége az ütközés után azonos, a gyöngyök tömegüktől függetlenül ugyanolyan $h_1 = h_2 = h$ magasba emelkednek (lásd a 31.(c) ábrát). Az emelkedési magasságot a mechanikai energia-megmaradás segítségével számolhatjuk ki. Az m tömegű gyöngy esetében

$$mgh = \frac{1}{2} m w_1^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} m v_0^2 = \frac{1}{4} mgR. \tag{6.15.9}$$

Az emelkedési magasság tehát $h = R/4$.

(b) A (6.15.7) és (6.15.8) egyenleteket felhasználhatjuk a második ütközés utáni sebességek meghatározásához is. Ebben az esetben a „beérkező” sebességek nagysága megegyezik az első ütközés utáni sebességek nagyságával. Behelyettesítve az értékeket, a második ütközés után $w_1 = v_0$ és $w_2 = 0$ adódik rendre az m és $3m$ tömegű gyöngyök sebességére. A sebességek nagysága pont akkora, mint amekkora sebességgel közvetlenül az első ütközés előtt találkoztak a gyöngyök. Ez az eredmény nem meglepő, hiszen a (6.15.2) és (6.15.3) egyenleteknek két független megoldása van, melyek mindegyike kielégíti a lendület és energia-megmaradás törvényit.

6.16. Feladat: A 32. ábrán látható súrlódásmentes pálya A pontjából elengedünk egy testet. Végigcsúszva a B pontban ütközik egy másik testtel.
(a) Mekkora v sebességgel ér az A pontból indított test a B pontban lévő testhez?
(b) Milyen magasra emelkedik a másik test, ha az ütközés tökéletesen rugalmas ($m_A = m_B/2$, $h = 1.8$ m)?



32. ábra.

Megoldás:
(a) A h m magasból kezdő sebesség nélkül induló, súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége felhasználva az energia-megmaradás elvét $v = \sqrt{2gh} = 6$ m/s.
(b) A tökéletesen rugalmas ütközés esetében az

$$m_A v = m_A v_A + m_B v_B \tag{6.16.1}$$

impulzus-megmaradás mellett érvényes a mechanikai energia megmaradása is:

$$\frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2. \tag{6.16.2}$$

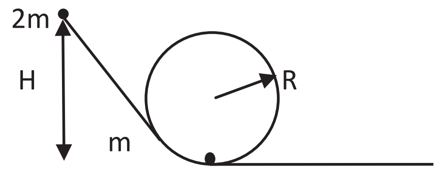
Az egyenletekben v_A és v_B az A illetve B testek ütközés utáni sebességét jelöli. Figyelembe véve, hogy $m_A = m_B/2$, e két egyenlettel a B test ütközés utáni sebessége:

$$v_B = \frac{2}{3} v = \frac{2}{3}\sqrt{2gh} = 4\,\text{m/s}. \tag{6.16.3}$$

A B test emelkedési magassága pedig

$$h_B = \frac{v_B^2}{2g} = 0,8\,\text{m}. \tag{6.16.4}$$

6.17. Feladat: Egy $2m$ tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedő lejtőn a 33. ábrának megfelelően. Mekkora H magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmas ütközés után a pálya alján lévő m tömegű test végighaladjon a hurkon? Megoldás:



33. ábra.

Általános ütközések

6.18. Feladat: $h_1 = 1,25$ m magasból $m = 1$ kg tömegű golyó a $\Delta t = 0,05$ s időtartamú kölcsönhatás után $h_2 = 80$ cm magasra pattan vissza. Mekkora átlagos erőt fejtett ki a talaj a golyóra ezen ütközés alatt?

Megoldás: A h_1 magasságból eső test

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \tag{6.18.1}$$

sebességgel csapódik be, míg a h_2 magasságba feljutó test a talajról

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} \tag{6.18.2}$$

sebességgel pattan vissza. Az ütközés alatt a teljes impulzusváltozás

$$\Delta P = mv_1 - (-mv_2). \tag{6.18.3}$$

A talaj és a golyó közt ébredő erő ezért

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2})}{\Delta t}. \tag{6.18.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $F = 180$ N adódik.

Folytonos közegek impulzusváltozása

6.19. Feladat: (HN 8A-33) A 600 l/perc hozamú és 20 m/s sebességű vízszintes irányú vízsugár függőleges falba ütközik, s számottevő freccsenés nélkül szétterül rajta. Mekkora erőt fejt ki a vízsugár a falra? (A víz sűrűsége 1000 kg/m^3.)

Megoldás: Jelölések: $\eta = 600$ l/perc = 10 l/s = 0.01 m^3/s, $v = 20$ m/s és $\varrho = 1000$ kg/m^3. A falra Δt idő alatt

$$\Delta m = \eta\varrho\Delta t \tag{6.19.1}$$

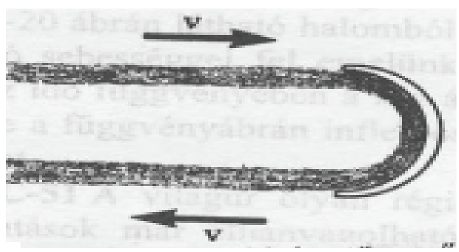
tömeg esik és áll meg. A beérkező víz teljes impulzusváltozása

$$\Delta P = v\Delta m = v\eta\varrho\Delta t. \tag{6.19.2}$$

A falon ébredő erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = v\eta\varrho = 200\,\mathrm{N}. \tag{6.19.3}$$

6.20. Feladat: (HN 8A-34) Egy nyugvó turbinalapátba vízsugár ütközik. A lapát a vízsugár irányát az 34. ábrán látható módon megfordítja. A víz sebessége mind az ütközés előtt, mind



34. ábra.

az ütközés után v. Határozzuk meg a lapátra ható erőt, ha az időegységentként becsapódó víz tömege μ!

Megoldás: Az időegységentként becsapódó víz tömege

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \tag{6.20.1}$$

A beérkező víz impulzusa $I_{\rightarrow} = mv$, a távozóé $I_{\leftarrow} = -mv$. Az impulzusváltozás:

$$\Delta I = 2mv, \tag{6.20.2}$$

amellyel az ébredő erő:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta 2mv}{\Delta t} = 2v\frac{\Delta m}{\Delta t} = 2\mu v. \tag{6.20.3}$$

6.21. Feladat: (HN 8A-40) Egy 3000 kg tömegű rakéta meghajtású űrhajó egy helyben lebeg a Hold felszíne felett, ahol a $g = 1,63$ m/s^2. Mekkora sebességgel bocsátja ki a rakéta a hajtóanyagot, ha 2 kg/s sebességgel fogyasztja a fűtőanyagot?

Megoldás: A kezdeti lépésben tételezzük fel, hogy a t időpillanatban az m rakéta v sebességgel halad felfelé. Ekkor az impulzusa:

$$I_1 = mv \tag{6.21.1}$$

A $t+\Delta t$ időpillanatban a Δm kiáramlott gázzal kevesebb – azaz $m-\Delta m$ –, sebessége Δv-vel nő – azaz $v+\Delta v$. Ha kiáramló gáz sebessége a rakétához képest u – lefele irányban –, akkor a Δm kiáramlott gáz sebessége az álló megfigyelőhöz képest: $v-u$. A $t+\Delta t$ időpillanathoz tartozó impulzus:

$$I_2 = (m-\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(v-u). \tag{6.21.2}$$

A Δt alatti impulzusváltozás:

$$\Delta I = I_2 - I_1 = m\Delta v - u\Delta m. \tag{6.21.3}$$

Az m tömegű rakétára ható erő: $F = -mg$. Így az impulzus tétel értelmében:

$$F = -mg = \frac{\Delta I}{\Delta t} = I_2 - I_1 = m\frac{\Delta v}{\Delta t} - u\frac{\Delta m}{\Delta t}. \tag{6.21.4}$$

Felhasználva a feladat szövegét, hogy a rakéta áll, azaz $\frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$, $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}$, valamint a rakéta tömegének időbeli változását $m(t) = m_0 - \mu t$ (m_0 a kezdeti tömeg), felírható:

$$(m_0 - \mu t)g = \mu u(t), \tag{6.21.5}$$

amelyből

$$u(t) = \frac{m_0 - \mu t}{\mu} g = 1,63\frac{3000-2t}{2}. \tag{6.21.6}$$

Világos, hogy egyre kisebb kiáramlási sebességre van szükség a csökkenő tömeg miatt. A $t = 0$ időpillanatban $u = 2445$ m/s.

6.22. Feladat: (HN 8B-41) A 130000 kg tömegű rakéta függőlegesen helyezkedik el a kilövőálláson.

(a) Mekkorának kell lennie a hajtóművek tolóerejének ahhoz, hogy a rakéta 17 m/s^2 gyorsulással induljon felfelé?

(b) Hány kg/s a hajtóanyag fogyasztás akkor, ha a hajtógáz rakétához viszonyított sebessége 2100 m/s?

Megoldás: Jelölések: $m = 130000$ kg; $a = 17$ m/s^2 és $u = 2100$ m/s.
(a) Az indulás pillanatában

$$ma = F - mg \tag{6.22.1}$$

a rakéta mozgásegyenlete. Innen a tolóerő

$$F = m(a+g) = 3,51 \cdot 10^6\,\mathrm{N}. \tag{6.22.2}$$

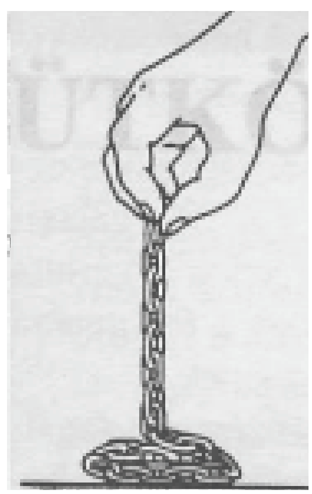
(b) Ez a tolóerő az u sebességgel kiáramló gáz következménye, azaz

$$F\Delta t = (\Delta m)u, \tag{6.22.3}$$

amelyből a hajtóanyag fogyasztás

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{F}{u} = 1671\,\mathrm{kg/s}. \tag{6.22.4}$$

6.23. Feladat: (HN 8C-48) Egy függőlegesen lógó, m tömegű hajlékony l hosszúságú láncot állandó v sebességgel engedünk le az asztalra az 35. ábrán látható módon. Adjuk meg az idő függvényében, hogy mekkora erőt fejt ki a lánc az asztalra!



35. ábra.

Megoldás: A hosszegységenkénti tömeget jelölje $\lambda = \frac{m}{l}$; a t idő alatti süllyedés hossza $x = vt$. Így ennyi idő alatt $m(t) = \lambda x = \frac{m}{l}vt$ tömeg van az asztalon, amely

$$N_1 = \frac{m}{l}vtg \tag{6.23.1}$$

erővel nyomja az asztalt. Ez az ébredő erő egyik része. A másik rész ahhoz kötődik, hogy a v sebességű dx hossz megáll. Ennek a hossznak az impulzusváltozása:

$$\Delta I = \lambda dx\, v = \frac{m}{l} v \Delta t\, v = \frac{mv^2}{l}\Delta t. \tag{6.23.2}$$

A megállításból eredő másik rész

$$N_2 = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l}. \tag{6.23.3}$$

Az összes erő tehát

$$N = \frac{m}{l} vtg + \frac{mv^2}{l}. \tag{6.23.4}$$

6.24. Feladat: (HN 9C-47) A Földhöz viszonyítva v sebességű és időegységenként μ tömeget szállító vízáram csapódik a turbinalapátra. Az ütközés hatására a turbinalapát egyenesvonalú mozgásba kezd, míg a vízáram $v/4$ sebességgel visszafelé halad a Földhöz képest.

(a) Mekkora sebességgel mozog a turbinalapát?

(b) Határozzuk meg v és μ függvényében, hogy mekkora erő hat a mozgó lapátra?

Megoldás:

(a) Az u sebességgel mozgó turbinalapáton fordul meg a vízáram. Figyelembe véve a relatív sebességeket fennáll, hogy

$$v - u = u + \frac{1}{4}v. \tag{6.24.1}$$

Innen a turbinalapát sebessége

$$u = \frac{3}{8}v. \tag{6.24.2}$$

(b) Ha m tömegű víz fordul meg, akkor annak impulzusváltozása

$$\Delta I = 2m(v-u) = \frac{5}{4}mv. \tag{6.24.3}$$

A Δt idő alatt a turbinalapátra beérkező tömeg

$$m = \mu \Delta t \frac{v-u}{v}, \tag{6.24.4}$$

amellyel az impulzusváltozás

$$\Delta I = \frac{25}{32}\mu v \Delta t. \tag{6.24.5}$$

Az ébredő erő

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{25}{32}\mu v. \tag{6.24.6}$$

7. Feladatok a gravitásiós erő tárgyköréből. Kepler törvényei

Centrális erőtér. Potenciális energia

7.1. Feladat: (HN 16B-16) A "szinkron" műhold akkora sebességgel kering körpályán, hogy a földi megfigyelő számára nyugalomban lévőnek látszik.
(a) Magyarázzuk meg, miért csak az egyenlítő síkjában lévő pályán lehetséges az ilyen mozgás!
(b) Határozzuk meg a pálya sugarát a Föld középpontjától mérve!
(c) Határozzuk meg azt a legtávolabbi szélességi fokot, ahonnan ez a műhold a Földről még látható!

Megoldás: Jelölések: m a műhold tömege; M a Föld tömege; T a Föld forgásának periódus ideje; R a műhold távolsága a Föld középpontjától; R_F a Föld sugara.
(a) A körmozgás a Föld forgástengelye körül kell történjen, amelyhez kizárólag e tengelyre merőleges erő szükséges. A Föld a centruma felé vonzza a testeket. Az első feltétel csak akkor teljesül, ha a test az Egyenlítőn van.
(b) A műhold ún. geostacionárius pályán kering, azaz szögsebessége megegyezik a Föld forgáshoz tartózó $\omega = \frac{2\pi}{T}$ szögsebességgel. A keringő műhold mozgásegyenlete

$$mR\omega^2 = \gamma\frac{mM}{R^2}. \tag{7.1.1}$$

A szögsebesség behelyettesítése és az egyenlet átrendezése után az R sugár

$$R = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} = 42170\,\text{km}. \tag{7.1.2}$$

(c) Az szélesség kör, ahonnan a műhold még látható

$$\cos\theta = \frac{R_F}{R} = 0,1511 \;\longrightarrow\; \theta = 81,3^0. \tag{7.1.3}$$

7.2. Feladat: (HN 16B-31) Egy nem forgó gömb alakú bolygó tömege M, sugara R. A bolygó felszínéről radiális irányban egy részecskét lőnek ki $\sqrt{\gamma M/(2R)}$ sebességgel. Számítsuk ki mekkora távolságra jut el a részecske a bolygó középpontjától?

Megoldás: A mechanikai energia megmaradás tételét kell alkalmazni – figyelembe véve, hogy az "eljutás" zérus pillanatnyi sebességet jelent –

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{R} = -\gamma\frac{mM}{R'}, \tag{7.2.1}$$

ahol R' a kérdéses távolság. A sebesség behelyettesítése után

$$R' = \frac{4}{3}R. \tag{7.2.2}$$

7.3. Feladat: (HN 16B-34) Jelölje M illetve R a Föld tömegét illetve sugarát.
(a) Mekkora az a minimális v_0 sebesség, amellyel az egyenlítőn függőlegesen kilőtt test a Föld felszínétől éppen két földsugárnyi magasságig emekedik? A Föld forgását és a légköri súrlódást ne vegyük figyelembe.
(b) A Föld forgását is számításba véve, növekszik, csökken vagy változatlan marad-e az a, kérdésre adott válasz számértéke?

Megoldás:
(a) A mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva

$$-\gamma\frac{mM}{R}+\frac{1}{2}mv_0^2=-\gamma\frac{mM}{3R} \tag{7.3.1}$$

egyenlet írható fel, amelyből a kérdezett sebesség:

$$v_0=\sqrt{\frac{4}{3}\frac{\gamma M}{R}}=9152\,\mathrm{m/s}. \tag{7.3.2}$$

(b) A Föld forgása csökkenti ezt az értéket, mert a kinetikus energiában a sebesség négyzete van. A forgáshoz tartozó v_f sebesség érintő irányú (a kilövésre merőleges), amivel a kezdő sebesség négyzete: $v_0^2+v_f^2$ mindig nagyobb mint v_0^2.

7.4. Feladat: (HN 16B-36) A Föld felszínén egy testet emelünk.
(a) Határozzuk meg annak a munkának a nagyságát, amivel egy 100 kg tömegű hasznos terhet 1000 km-rel a Föld felszíne felé lehet juttatni!
(b) Határozzuk meg azt a többletmunkát, ami ezen a szinten a hasznos teher körpályára állításához szükséges!

Megoldás: Adatok: $\gamma = 6,67\cdot10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$; $m = 100$ kg; $h = 1000$ km. A Föld tömege: $M = 6\cdot10^{24}$ kg; sugara: $R = 6,37\cdot10^6$ m.
(a) Az általunk végzett munka

$$W=\int_R^{R+h}\gamma\frac{mM}{r^2}\,\mathrm{d}r=\left[\gamma\frac{mM}{r}\right]_R^{R+h}=\gamma\frac{mM}{R}-\gamma\frac{mM}{R+h}=1,42\cdot10^8\,\mathrm{J}. \tag{7.4.1}$$

(b) Az $R+h$ sugárnyi távolságban keringés feltétele, hogy az

$$\gamma\frac{mM}{(R+h)^2}=m\frac{v^2}{R+h} \tag{7.4.2}$$

fennálljon. E keringéshez tartozó többlet energia

$$E_{kin}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{R+h}=2,7\cdot 10^9\text{J.}^* \tag{7.4.3}$$

* *Megjegyzés:* Tekintettel arra, hogy a Föld forog, és így a rakéta nem álló helyzetből indul, ennél kisebb energiára van szükség. Nem véletlen, hogy a kilövő állomásokat az Egyenlítőhöz közel igyekeznek telepíteni.

7.5. Feladat: (HN 16B-37) Mutassuk ki, hogy egy állandó sűrűségű bolygó felületéről a szökési sebesség a bolygó sugarával arányos!

Megoldás: A gömb alakú bolygó térfogata:

$$V=\frac{4R^3\pi}{3}, \tag{7.5.1}$$

tömege:

$$M=\varrho\frac{4R^3\pi}{3}. \tag{7.5.2}$$

A szökéshez minimálisan szükséges kinetikus energia

$$\frac{1}{2}mv^2=\gamma\frac{mM}{R}=\gamma\frac{m\varrho\frac{4R^3\pi}{3}}{R}=\gamma m\varrho\frac{4R^2\pi}{3}. \tag{7.5.3}$$

Egyszerűsítések után:

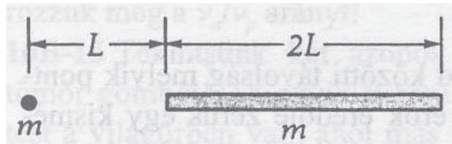
$$v=\sqrt{\frac{8}{3}\gamma\varrho\pi}R, \tag{7.5.4}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

7.6. Feladat: (HN 16C-47) * A 36. ábrán látható kicsiny test és vékony rúd mindegyikének tömege m. A pontszerű test a rúd vonalában fekszik. A test L távolságban van a 2L hosszúságú rúd végétől. Mekkora a kicsiny m tömegű testre ható gravitációs erő?

Megoldás: A rúd hosszegységnyi tömege $\lambda=\frac{m}{2L}$, így a dx hosszhoz tartozó dm tömeg

$$dm=\lambda dx. \tag{7.6.1}$$



36. ábra.

Legyen a dm tömeg x távolságra az m tömegű testtől. A két test között ható erő nagysága

$$dF = \gamma \frac{m\,dm}{x^2}. \tag{7.6.2}$$

A teljes erő

$$F = \int_L^{3L} \gamma \frac{m\,\lambda dx}{x^2} = \gamma \frac{m^2}{2L} \left[-\frac{1}{x} \right]_L^{3L} = \gamma \frac{m^2}{3L^2}. \tag{7.6.3}$$

7.7. Feladat: (HN 16C-58) Egy ember a Föld felszínén gugguló helyzetből tömegközéppontját h magassággal tudja emelni. Számítsuk ki annak a legnagyobb (a Föld átlagsűrűségével azonos sűrűségű) kisbolygónak a sugarát, amelyről ez az ember ugyanilyen sebességgel felugorva elszökhetne, azaz elhagyhatná annak vonzáskörzetét.

Megoldás: A h magasságba ugró ember kezdősebessége

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{7.7.1}$$

A kisbolygó M tömege a ϱ sűrűséggel és az R sugárral kifejezve

$$M = \varrho \frac{4R^3\pi}{3}. \tag{7.7.2}$$

A kisbolygón v sebességgel felugró emberre a mechanikai energia megmaradás tételét alkalmazzuk azzal az ismerettel, hogy a távolban a sebessége – így a kinetikus energiája – zérus, másrészt a távoli pontban zérus a potenciális energia. Felírhatjuk tehát, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0, \tag{7.7.3}$$

amelybe a fenti tömeget behelyettesítve és az egyenltet a sugárra átrendezve kapjuk:

$$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi\gamma\varrho}}. \tag{7.7.4}$$

7.8. Feladat: * Az M tömegű R sugarú bolygó egyenletes ϱ tömegsűrűségű.
(a) Hogyan változik az m tömegű kicsiny testre ható erő a bolygó belsejébe való haladás során?
(b) Hogyan változik a potenciális energia a bolygón belül?

Megoldás:
(a) Ha az m test a bolygó belsejében, annak középpontjától r távolságra van, akkor a gravitációs erőhatásba a bolygónak csak az r sugaron belüli része ad járulékot. Ezért először ezt a tömeget kell kiszámolni. A bolygó sűrűsége

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}, \tag{7.8.1}$$

amelyből az r sugárhoz tartozó $M(r)$ tömeg

$$M(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}\frac{4}{3}r^3\pi = M\frac{r^3}{R^3}. \tag{7.8.2}$$

Mostmár alkalmazni tudjuk a gravitációs erőtörvényt

$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{mM(r)}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\gamma\frac{mM\frac{r^3}{R^3}}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\gamma mM\frac{r}{R^3}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{7.8.3}$$

azaz a középponttól való távolsággal lineárisan változik. (Az $\mathbf{r}/r$ vektor a radiális egységvektor.)
(b) A bolygó felszínén a potenciális energia végtelen távoli ponthoz képest

$$U_p(R) = -\gamma\frac{mM}{R}. \tag{7.8.4}$$

Ehhez az értékhez képest az r sugárnyi távolságnál

$$U_p(r) - U_p(R) = \int_R^r \gamma mM\frac{r}{R^3}\mathrm{d}r = \left[\frac{1}{2}\gamma mM\frac{r^2}{R^3}\right]_R^r = \frac{1}{2}\gamma mM\frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2}\gamma mM\frac{1}{R}. \tag{7.8.5}$$

Így az a gravitációs potenciál az r pontban a végtelenhez képest

$$U_p(r) = -\gamma\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}\gamma mM\frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{R}. \tag{7.8.6}$$

Megjegyzés: Látható, hogy – talán nem meglepő módon – a bolygó közepén is véges a potenciális energia értéke

$$U_p(0) = -\frac{3}{2}\gamma\frac{mM}{R}. \tag{7.8.7}$$

7.9. Feladat: A *V1FIZ* nevű, $R = 40020$ km sugarú és $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg tömegű bolygó felszínétől R távolságban v_0 sebességgel keringő űrhajó pályájáról letér és a bolygó felszínébe csapódik. Mekkora a becsapódás sebessége? ($\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Megoldás: Az űrhajó $2R$ sugarú keringésére érvényes, hogy

$$m\frac{v_0^2}{2R} = \gamma\frac{mM}{4R^2}, \tag{7.9.1}$$

ahonnan

$$v_0^2 = \gamma\frac{M}{2R}. \tag{7.9.2}$$

Másrészt érvényes a mechanikai energia megmaradás tétele, az a kezdeti kinetikai és potenciális energiák összege egyenlő a végső kinetikai és potenciális energiák összegével, azaz

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma\frac{mM}{2R} = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{R}. \tag{7.9.3}$$

Ebből és a v_0 sebesség belyettesítével a becsapódási sebesség

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma\frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{5}{4}\gamma\frac{M}{R}} = 3535\,\mathrm{m/s}. \tag{7.9.4}$$

Kepler törvényei

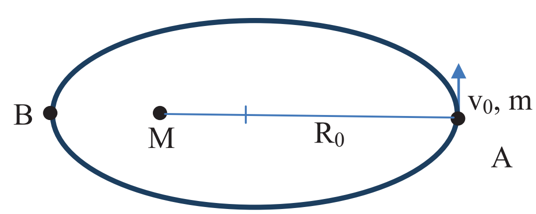
7.10. Feladat: M tömegű csillag körül m tömegű bolygó kering ellipszis pályán (– a csillag rögzítettnek tekinthető) a 37. ábra szerint. Az ellipszis fél nagytengelyét jelöljük "a"-val. A bolygó az $R_0 = R_A$ naptávolban (A) v_0 sebességgel halad.

(a) Mekkora a napközeli (B) távolság?

(b) Mekkora a bolygó sebessége?

(c) Mekkora munkát végzett a gravitációs erőtér?

(d) Ábrázolja grafikonon a potenciális energia értékeket (A, B)!



37. ábra.

Megoldás:

(a) Az ellipszisre nagytengelyére fennálló összefüggés

$$R_B + R_A = 2a, \tag{7.10.1}$$

ahol R_B a napközeli távolságot jelöli. Innen ez a távolság

$$R_B = 2a - R_A. \tag{7.10.2}$$

(b) Centrális erőtérről lévén szó, fennáll az impulzusmomentum megmaradás tétele, vagyis

$$mR_A v_0 = mR_B v_B, \tag{7.10.3}$$

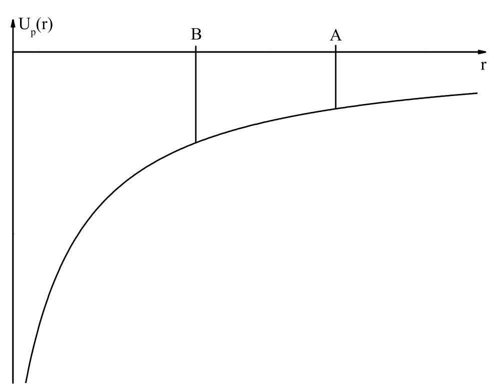
ahol v_B a B pontbeli (napközeli) sebességet jelöli. Innen

$$v_B = \frac{R_A v_0}{R_B} = \frac{R_A v_0}{2a - R_A}. \tag{7.10.4}$$

(c) Az erőtér által végzett munka

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{R_A^2}{(2a-R_A)^2} - 1\right) > 0. \tag{7.10.5}$$

(d) Az A és B pontokbeli potenciális energia értékeket a 38. ábra mutatja.



38. ábra.

8. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel

8.1. Feladat: (HN 10B-4) Egy $\mathbf{F} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$ ($f_x = 2$ N; $f_y = 3$ N; $f_z = 0$ N) erő hat egy testre. A test a z koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

($x = 4$ m; $y = 5$ m; $z = 0$ m) pontban támad. Határozzuk meg a forgatónyomaték nagyságát és irányát!

Megoldás: A forgatónyomaték definíciója $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ szerint a

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (yf_z - zf_y)\mathbf{i} + (zf_x - xf_z)\mathbf{j} + (xf_y - yf_x)\mathbf{k} \tag{8.1.1}$$

determináns kiszámolását kell elvégezzük. A számszerű adatok behelyettesítésével forgatónyomaték vektor

$$\mathbf{M} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \tag{8.1.2}$$

azaz a vektor nagysága 2 Nm, iránya a z tengely irányításával megegyezik.

8.2. Feladat: Egy "L" hosszúságú kötél végén 0,2 kg tömegű test függőleges síkban körmozgást végez. A pálya csúcsán a kör középpontjára vett perdület fele akkora, mint a pálya alján, ahol a tömeg kinetikus energiája 4 J. Mekkora az "L"?

Megoldás: Jelölések: $m = 0,2$ kg, $E = 4$ J, valamint v_a az alsó, v_f a felső pontbeli sebességek. Mivel a pálya alsó pontján ismerjük a kinetikus energiát, így az

$$E = \frac{1}{2}mv_a^2 \tag{8.2.1}$$

összefüggésből az alsóponti sebesség

$$v_a = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{40}\,\mathrm{m/s} = 6,32\,\mathrm{m/s}. \tag{8.2.2}$$

Az impulzusmomentum $N = (L =)mvL$ definíciójából következik, hogy a felső pontban úgy lehet a fele az alsó impulzusmomentumnak, ha a felsőponti sebesség

$$v_f = \frac{v_a}{2} = \sqrt{10}\,\mathrm{m/s} = 3,16\,\mathrm{m/s}. \tag{8.2.3}$$

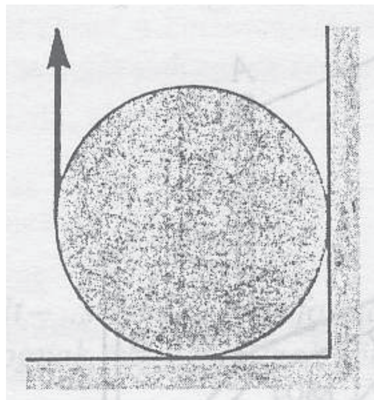
A két sebesség valamint az alsó és felső pontok magasssága közötti kapcsolatot a mechanikai energia megmaradását kifejező összefüggéssel teremthetjük meg:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \cdot 2L. \tag{8.2.4}$$

Az alsó és felső pontok közötti távolság $2L$. A behelyettesítések után a kötél hossza

$$L = 0,75\,\mathrm{m}. \tag{8.2.5}$$

8.3. Feladat: (HN 10C-48) A 39. ábra egy G súlyú homogén hengerre függőleges irányban ható F erőt mutat. A henger és a felületek közötti nyugalmi súrlódási együttható $\mu = 0,5$. Fejezzük ki a G függvényében azt a legnagyobb F erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását!



39. ábra.

Megoldás: Jelölje N_1 a alsó érintkezési ponton felfele mutató támaszerőt, F_{s1} a balról jobbra mutató súrlódási erőt ugyanitt. Legyen N_2 a falnál jobbról balra mutató támaszerő, míg az itt ható felfele mutató súrlódási erő F_{s2}. E mennyiségek közötti kapcsolat

$$F_{s1} = \mu N_1 \tag{8.3.1}$$

és

$$F_{s2} = \mu N_2. \tag{8.3.2}$$

A henger akkor van egyensúlyban, ha a ható erők eredője és forgatónyomatéka zérus. Azaz előjel helyesen — pozitív az az erő, amely balról jobbra, illetve alulról felfele mutat — a függőleges irányban

$$0 = F - G + N_1 + F_{s2}, \tag{8.3.3}$$

a vízszintes irányban

$$0 = F_{s1} - N_2. \tag{8.3.4}$$

A forgatónyomatékra

$$0 = F_{s2}R + F_{s2}R - FR \tag{8.3.5}$$

A fenti öt egyenletből kell az F erőt kifejezni. A (8.3.1) és (8.3.2) súrlódási erők behelyettesítésével illetve az (8.3.5) egyenletben az R-rel való egyszerűsítés után kapjuk:

$$0 = F - G + N_1 + \mu N_2, \tag{8.3.6}$$

a vízszintes irányban

$$0 = \mu N_1 - N_2. \tag{8.3.7}$$

A forgatónyomatékra

$$0 = \mu N_2 + \mu N_1 - F \tag{8.3.8}$$

A (8.3.7) egyenletből N_2-őt kifejezve és a (8.3.6) valamint a (8.3.8) egyenletekbe helyettesítve

$$0 = F - G + (1+\mu^2)N_1 \tag{8.3.9}$$

és

$$0 = \mu(\mu+1)N_1 - F \tag{8.3.10}$$

adódik. Az N_1 eliminálásával az F erő

$$F = \frac{\mu(\mu+1)}{2\mu^2+\mu+1}G. \tag{8.3.11}$$

A $\mu = 0,5$ behelyettesítési értékkel az F erő maximális értéke

$$F = 0,375G. \tag{8.3.12}$$

8.4. Feladat: (HN 13B-7) Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le az α szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke tg$\alpha/3$ kell, hogy legyen! (A henger tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.)

Megoldás: A hengerre az mg súlyerő, az $N = mg\cos\alpha$ támaszerő és az F_s tapadási súrlódási erő hat. A mozgásegyenletek a haladó mozgásra

$$ma = mg\sin\alpha - F_s, \tag{8.4.1}$$

és a forgómozgásra

$$\theta\beta = F_s R. \tag{8.4.2}$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \tag{8.4.3}$$

összefüggéssel fogalmazható meg. A három egyenletből az F_s erő alakja

$$F_s = \frac{mg\sin\alpha}{1+\frac{mR^2}{\theta}}. \tag{8.4.4}$$

Figyelembe véve, hogy a tapadási erő maximális, ha

$$F_s = \mu mg\cos\alpha, \tag{8.4.5}$$

így ezt behelyettesítve a minimális μ tapadási együttható értékére — felhasználva a tehetetlenségi nyomaték kifejezését —

$$\mu = \frac{mg\sin\alpha}{(1+\frac{mR^2}{\theta})mg\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{1+\frac{mR^2}{\theta}} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{3}. \tag{8.4.6}$$

adódik. Q.E.D.

8.5. Feladat: Egy tömör hengert és egy vékony falú csövet egyszerre engedünk el egy adott hajlásszögű lejtő tetejéről. Mindkét tárgy tisztán gördül.

(a) Határozza meg a henger tömegközéppontjának gyorsulását!

(b) Határozza meg a cső tömegközéppontjának gyorsulását!

(c) Milyen messze gurul el a cső, míg a henger s_h utat tesz meg?

Megoldás: Jelölje α a lejtő hajlásszögét, θ_h a henger és θ_{cs} a cső tehetetlenségi nyomatékát, F_s a tapadási súrlódási erőt. Az m és R a gördülő test tömege és sugara. ($\theta_h = \frac{1}{2}mR^2$; $\theta_{cs} = mR^2$)
A lejtőn legördülő test mozgásegyenlete a haladómozgásra

$$ma = mg\sin\alpha - F_s, \tag{8.5.1}$$

és a forgómozgásra — θ a gördülő test tehetetlenségi nyomatéka —

$$\theta\beta = F_s R. \tag{8.5.2}$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \tag{8.5.3}$$

összefüggéssel fogalmazható meg. E három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{m}{m+\frac{\theta}{R^2}} g\sin\alpha. \tag{8.5.4}$$

(a) A henger gyorsulása

$$a_h = \frac{m}{m+\frac{\theta_h}{R^2}} g\sin\alpha = \frac{2}{3} g\sin\alpha. \tag{8.5.5}$$

(b) A cső gyorsulása

$$a_{cs} = \frac{m}{m+\frac{\theta_{cs}}{R^2}} g\sin\alpha = \frac{1}{2} g\sin\alpha. \tag{8.5.6}$$

(c) A henger az s_h utat

$$t = \sqrt{\frac{2s_h}{a_h}} \tag{8.5.7}$$

idő alatt teszi meg. Ezalatt a cső

$$s_{cs} = \frac{1}{2}a_{cs}t^2 = \frac{1}{2}a_{cs}\frac{2s_h}{a_h} = \frac{3}{4}s_h \tag{8.5.8}$$

utat tesz meg.

8.6. Feladat: Egy jojó külső R sugara tízszerese belső r sugarának. A jojó orsója körüli tehetetlenségi nyomatéka jó közelítéssel $\theta = \frac{1}{2}mR^2$, ahol m a jojó teljes tömege. A fonál vége nem mozog.
(a) Számítsa ki a jojó tömegközéppontjának gyorsulását!
(b) Határozza meg a fonálban ébredő erőt!

Megoldás: Jelölés: a kötélerő K és $r = R/10$.
(a) A jojó tömegközéppontja körüli forgásra vonatkozó mozgásegyenlet

$$\theta\beta = Kr, \tag{8.6.1}$$

azaz a kötélerő hozza létre a β szöggyorsulású forgást. A haladó mozgásra felírható, hogy

$$ma = mg - K. \tag{8.6.2}$$

A haladó és forgómozgás közötti kapcsolat (tiszta gördülés)

$$a = r\beta. \tag{8.6.3}$$

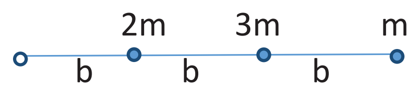
A három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{g}{\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}+1} = \frac{1}{51}g. \tag{8.6.4}$$

(b) A kötélerő

$$K = \frac{50}{51}mg. \tag{8.6.5}$$

8.7. Feladat: Egy elhanyagolható tömegű merev rúdra három pontszerű testet erősítettek. Az egyik végén csapágyazott rúd függőleges síkban lenghet.
(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomaték a csapágyra nézve?
(b) Mekkora lesz az alsó test sebessége a rúd függőleges helyzeten való áthaladásakor, ha a 40. ábrán látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük?



40. ábra.

Megoldás:

(a) A felfüggesztési pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\theta = \sum_i m_i r_i^2 = 2mb^2 + 3m(2b)^2 + m(3b)^2 = 23mb^2. \tag{8.7.1}$$

(b) A testek helyzeti energiájának összes megváltozása:

$$\Delta E_h = 2mgb + 3mg \cdot 2b + mg \cdot 3b = 11mgb. \tag{8.7.2}$$

E helyzeti energiaváltozás alakul forgási energiává:

$$\Delta E_h = \frac{1}{2}\theta\omega^2, \tag{8.7.3}$$

amelyből behelyettesítés után a szögsebességre kapjuk:

$$\omega = \sqrt{\frac{22g}{23b}}. \tag{8.7.4}$$

Az m tömegű test sebessége az alsó pontban:

$$v = R\omega = 3b\omega = 3\sqrt{\frac{22gb}{23}}. \tag{8.7.5}$$

8.8. Feladat: Homogén tömör tárcsa sugara 6 cm, tömege 1,5 kg. Nyugalomból indul a motor által kifejtett 0,6 Nm forgatónyomaték hatására. Mennyi idő alatt éri el az 1200 1/perc fordulatszámot? ($\theta = \frac{1}{2}mr^2$)

Megoldás: Jelölések: $r = 6$ cm $= 0{,}06$ m, $m = 1{,}5$ kg, $M = 0{,}6$ Nm és $f = 1200$ 1/perc $= 20$ 1/s. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M, \tag{8.8.1}$$

ahonnan a β szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M}{\theta} = \frac{2M}{mr^2} = 222{,}2\ 1/\mathrm{s}^2. \tag{8.8.2}$$

A szögsebesség és a fordulatszám közötti összefüggés

$$\omega = 2\pi f, \tag{8.8.3}$$

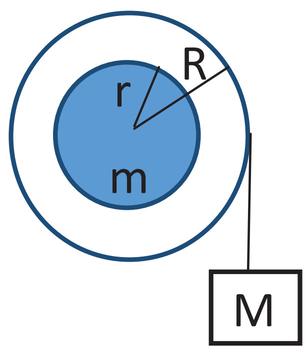
másrészt

$$\omega = \beta t. \tag{8.8.4}$$

A kérdéses fordulatszám eléréséhez szükséges idő

$$t = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = 0,565\,\mathrm{s}. \tag{8.8.5}$$

8.9. Feladat: Egy $r = 20$ cm "tehetetlenségi" sugarú, $m = 40$ kg tömegű kerék sugara $R = 30$ cm. Az R sugárhoz tartozó keréktömeget hanyagoljuk el.) Függőlegesen helyeztük egy vízszintes tengelyre. Egy $M = 2.0$ kg tömegű testet erősítettünk a szélére tekert kötélre a 41. ábrának megfelelően. Határozza meg a kerék elengedés utáni kezdeti szöggyorsulását! (A kerékre: $\theta = mr^2$.)



41. ábra.

Megoldás: Jelölés: a kötelben ébredő erő K. A kerék forgómozgására felírhatjuk, hogy

$$\theta\beta = KR, \tag{8.9.1}$$

míg az m tömegű test haladó mozgására

$$Ma = Mg - K. \tag{8.9.2}$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy

$$a = R\beta. \tag{8.9.3}$$

E három egyenletből a kiszámolt szöggyorsulás

$$\beta = \frac{MgR}{\theta + MR^2} = \frac{MgR}{mr^2 + MR^2} = 3,37\,1/\mathrm{s}^2. \tag{8.9.4}$$

8.10. Feladat: Egy lendkerék fordulatszáma 60 rad/s-ról 180 rad/s-ra növekedett a rajta történt 100 J munkavégzés következtében.
(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka?
(b) Ezt követően egy 3-szor nagyobb tehetetlenségi nyomatékú álló kereket nyomunk a lendkerékhez. Mekkora lesz a kialakuló közös fordulatszám?

Megoldás: a, A végzett munka a kinetikus energiát változtatja meg, azaz

$$W = \frac{1}{2}\theta\omega_2^2 - \frac{1}{2}\theta\omega_1^2, \tag{8.10.1}$$

ahol ω_1 a kezdeti, ω_2 a végső szögsebesség, θ a tehetetlenségi nyomaték. Innen a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = \frac{2W}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,00694\,\mathrm{kgm}^2. \tag{8.10.2}$$

b, Az impulzusmomentum megmaradása miatt

$$\theta\omega_2 = (\theta + 3\theta)\omega', \tag{8.10.3}$$

amelyből

$$\omega' = \frac{1}{4}\omega_2 = 45\,\mathrm{rad/s}. \tag{8.10.4}$$

8.11. Feladat: Egy m tömegű, $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú kereket ω_0 szögsebességgel megforgatunk és zérus kezdősebességgel a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük.
(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:
(a) A kerék és a talaj között ébredő μmg súrlódási erő kezdi haladó (transzlációs) mozgásában gyorsítani a kereket, másrészt az súrlódási erő miatt ébredő forgatónyomaték fékezi forgó (rotációs) mozgásában. A kerék haladó mozgására érvényes dinamikai egyenlet

$$ma = \mu mg, \tag{8.11.1}$$

ahol a poziztív előjel a sebesség növekedését fejezi ki. Míg a forgómozgásra felírható egyenlet — a forgómozgás alapegyenlete — a

$$\theta\beta = M = -\mu mgR, \tag{8.11.2}$$

ahol a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a súrlódási erő által létrehozott forgatónyomaték csökkenti a szögsebességet. Ezekből a kerék a gyorsulása és β szöggyorsulása

$$a = \mu g \tag{8.11.3}$$

és

$$\beta = -\frac{\mu mgR}{\theta}. \tag{8.11.4}$$

A $v(t)$ sebesség és az $\omega(t)$ szögsebesség egyszerűen

$$v(t) = \mu g t \tag{8.11.5}$$

és

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta} t. \tag{8.11.6}$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy az

$$v(t) = R\omega(t) \tag{8.11.7}$$

feltétel teljesüljön, azaz

$$\mu g t = R\left(\omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta} t\right). \tag{8.11.8}$$

A θ behelyettesítésével a kérdezett eltelt idő

$$t = \frac{R\omega_0}{3\mu g}. \tag{8.11.9}$$

(b) Az eközben megtett út

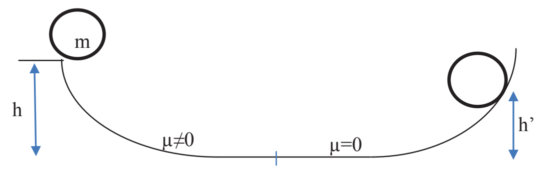
$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\mu g \frac{R^2\omega_0^2}{9\mu^2 g^2} = \frac{1}{18}\frac{R^2\omega_0^2}{\mu g}. \tag{8.11.10}$$

8.12. Feladat: A 42. ábrán látható módon az m tömegű $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú korongot egy lejtőn h magasságban elengedünk. A lejtő tapadási súrlódási együtthatója $\mu \neq 0$, ezért a korong itt tisztán gördül. A pálya második fele viszont súrlódásmentes.
(a) Mekkora sebessége és szögsebessége van a korongnak a lejtő alján?
(b) Milyen h' magasra megy fel a súrlódásmentes emelkedőn a korong?
(c) Mennyi a lejtő tetején a korong impulzus momentuma?

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechanikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.12.1}$$



42. ábra.

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \tag{8.12.2}$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}. \tag{8.12.3}$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a lejtőn felszalad h' és ott egy helyben forog ω szögsebességgel. Azaz transzlációs kinetikus energiája alakul csak át helyzeti energiává:

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2. \tag{8.12.4}$$

Innen az emelkedés magassága

$$h' = \frac{2}{3}h. \tag{8.12.5}$$

(c) A lejtő tetején forgó korong az impulzusmomentuma:

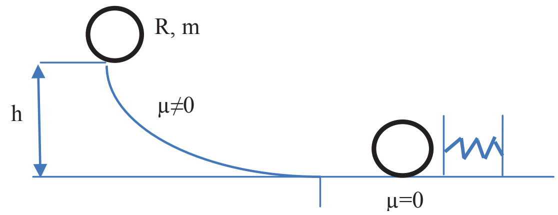
$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}}. \tag{8.12.6}$$

8.13. Feladat: Egy $R = 10$ cm sugarú, $m = 1$ kg tömegű tömör korong ($\theta = \frac{1}{2}mR^2$) tisztán legördül egy $h = 0,3$ m magasságú lejtős pályán. A lejtő alján nekiütközik a 43. ábrán látható fékezőrugónak, amelynek ütközője és a pálya ezen szakasza súrlódásmentes. A $k = 400$ N/m rugóállandójú rugó nyugalmi hossza $l_0 = 20$ cm.

(a) Mekkora a korong sebessége és szögsebessége a lejtő alján?

(b) Mekkora a korong impulzusmomentuma a rugó összenyomódása után?

(c) Mennyivel nyomódott össze a rugó?



43. ábra.

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechnikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.13.1}$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 2\text{m/s} \tag{8.13.2}$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = 20\,\text{rad/s}. \tag{8.13.3}$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a rugót összenyomja és ott egyhelyben forog ω szögsebességgel:

$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}} = 0,1\,\text{kg m}^2/\text{s}. \tag{8.13.4}$$

(c) A fentiek szerint a transzlációs kinetikus energiája alakul csak át rugalmas energiává:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2. \tag{8.13.5}$$

Innen az összenyomódás mértéke:

$$\Delta = l_0 - l = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} = 0,1\,\text{m}. \tag{8.13.6}$$

8.14. Feladat: Egy R sugarú, m tömegű homogén tömegeloszlású nem forgó kereket tengelyre merőlegesen v_0 sebességgel meglökünk és a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük. A kerék tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.
(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:
(a) A kereket a talajra engedve a v_0 sebességgel ellentétes $F_s = -\mu mg$ súrlódási erő hat, amely egyrészt csökkenti a sebességet, másrészt a kerék középpontjára forgatónyomatékot ad, amely a kereket forgásba hozza. A transzlációra vonatkozó mozgásegyenlet

$$ma = F_s = -\mu mg, \tag{8.14.1}$$

amelyből a gyorsulás

$$a = -\mu g. \tag{8.14.2}$$

Így a kerék sebessége a

$$v(t) = v_0 - \mu gt \tag{8.14.3}$$

függvény szerint változik. A forgómozgásra a forgómozgás alapegyenlete írható fel, amely — figyelembe véve a forgatónyomaték előjelét —

$$\theta\beta = \mu mgR. \tag{8.14.4}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítésével, valamint az egyenlet rendezésével a szöggyorsulás

$$\beta = \frac{2\mu g}{R}. \tag{8.14.5}$$

A kerék szögsebessége az

$$\omega(t) = \frac{2\mu g}{R}t \tag{8.14.6}$$

függvény szerint változik. A tiszta gördülés feltétele, hogy a

$$v(t) = R\omega(t) \tag{8.14.7}$$

összefüggés teljesüljön, azaz a

$$v_0 - \mu gt = R\frac{2\mu g}{R}t \tag{8.14.8}$$

fennálljon. Ebből a tiszta gördülésig eltelt időt kifejezve kapjuk, hogy

$$t = \frac{v_0}{3\mu g}. \tag{8.14.9}$$

(b) A megtett út az

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{8.14.10}$$

négyzetes úttörvénybe helyettesítve

$$s = \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{\mu g} \tag{8.14.11}$$

8.15. Feladat: ** A m tömegű R sugarú homogén korongot forgástengelye körül ω_0 szögsebességgel megforgatunk, majd lapjával — a tengely merőleges a felületre — a sík asztalra helyezzük. A korong és asztal között μ súrlódási tényező van. Feltételezve, hogy korong egyenletesen nyomja az asztalt, mennyi idő múlva áll meg a korong? (A korong tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2} m R^2$.)

Megoldás: A feladat megoldásának kulcsa az eredő forgatónyomaték kiszámolása. Vezessük be a felületi tömegsűrűséget, amely

$$\eta = \frac{m}{R^2 \pi}. \tag{8.15.1}$$

A korongból tekintsünk egy r sugarú dr szélességű körgyűrűt. Ennek tömege

$$dm = \eta 2 r \pi dr. \tag{8.15.2}$$

A körgyűrű érintője mentén ébredő dF_s súrlódási erő

$$dF_s = \mu \, dm \, g, \tag{8.15.3}$$

amely erő a körgyűrű középpontjára vonatkoztatva

$$dM = \mu \, dm \, g r = 2 \pi \mu \eta g r^2 dr \tag{8.15.4}$$

forgatónyomatékot hoz létre. A korongra ható teljes forgatónyomaték

$$M = \int_0^R 2 \pi \mu \eta g r^2 dr = \frac{2\pi}{3} \mu \eta g R^3 = \frac{2}{3} \mu m g R. \tag{8.15.5}$$

Felírva a forgómozgás alapegyenletét

$$\theta \beta = M = \frac{2}{3} \mu m g R \tag{8.15.6}$$

a szögsebesség kiszámolható:

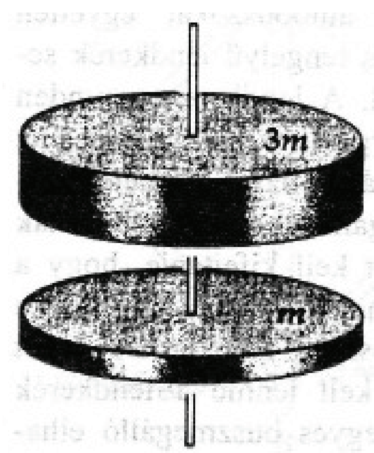
$$\beta = \frac{4}{3} \frac{\mu g}{R}. \tag{8.15.7}$$

A megállásig eltelt idő

$$t = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{3}{4} \frac{\omega_0 R}{\mu g}. \tag{8.15.8}$$

Impulzusmomentum megmaradása

8.16. Feladat: (HN 12B-28) A 44. ábrán látható két tömör tárcsa sugara R, egyik tömeg m, a másiké $3m$. A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának ω_0 kezdő szögsebességet adunk, majd nagyon kis magasságból ráejtjük a kezdetben nyugalomban lévő alsó tárcsára. A tárcsák — a közöttük fellépő súrlódás hatására — végül közös ω szögsebességgel együtt forognak.
(a) A megadott mennyiségekkel fejezzük ki a végső ω szögsebességet, és
(b) a tárcsák egymáson való súrlódása közben végzett munkát!
(c) Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási "ütközésnek"?



44. ábra.

Megoldás:
(a) Külső forgatónyomatékok hiányában az impulzusmomentum megmaradás tételét alkalmazhatjuk. Kezdetben a $3m$ tömegű test forog ω_0 szögsebességgel. Az impulzusmomentum

$$N_1 = \theta_{3m}\omega_0 = \frac{1}{2}3mR^2\omega_0, \tag{8.16.1}$$

ahol θ_{3m} a $3m$ tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Az összetapadás után együtt forog a két test, az együttes impulzusmomentum

$$N_2 = (\theta_m + \theta_{3m})\omega = (\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2)\omega, \tag{8.16.2}$$

ahol θ_m az m tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Mivel $N_1 = N_2$, így

$$\frac{1}{2}3mR^2\omega_0 = (\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2)\omega, \tag{8.16.3}$$

amelyből

$$\omega = \frac{3}{4}\omega_0. \tag{8.16.4}$$

(b) A kezdeti kinetikus energia

$$E_1 = \frac{1}{2}\theta_{3m}\omega_0^2 = \frac{1}{4}3mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2, \tag{8.16.5}$$

míg az összetapadás után

$$E_2 = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_{3m})\omega^2 = \frac{1}{4}4mR^2\omega^2 = \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2. \tag{8.16.6}$$

A két energia különbsége, amennyi a belső energiát növeli:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2 - \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{16}mR^2\omega_0^2. \tag{8.16.7}$$

(c) Az egyenesvonalú analogon: a $3m$ tömegű v_0 sebességű test ütközése a nyugvó m tömegű testtel. Ekkor a közös sebesség:

$$v = \frac{3}{4}v_0. \tag{8.16.8}$$

8.17. Feladat: (HN 12C-50) A 45. ábra egy r_0 sugarú körpályán v_0 sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó m tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test az $r_0/2$ sugarú körpályára kerüljön. Számítsuk ki az m, az r_0 és v_0 függvényében

(a) a test végső sebességét és

(b) a fonál új helyzetve húzása során végzett munkát!

(c) Mutassuk meg, hogy a végzett munka egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával!

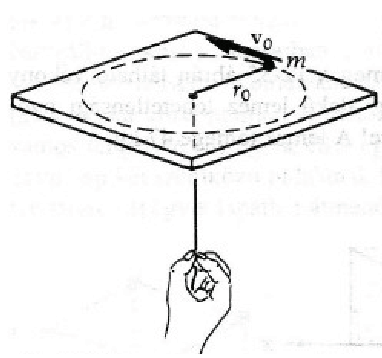
Megoldás:

(a) Mivel jelen esetben a mozgás során mindvégig a kötélerő sugárirányú, azaz centrális, így az impulzusmomentum megmaradásának tétele alkamazható

$$mv_0r_0 = mv\frac{r_0}{2}. \tag{8.17.1}$$

Ebből a test végső sebessége

$$v = 2v_0. \tag{8.17.2}$$



45. ábra.

(b) A munka kiszámolásához először a K kötélerőt egy közbenső r sugarú pályára kell megadni. Ehhez egyrészt újra alkalmazni kell az impulzusmomentum megmaradásának tételét

$$mv_0r_0 = mvr, \tag{8.17.3}$$

másrészt fel kell írni a körpályán való mozgásra a

$$K = m\frac{v^2}{r} \tag{8.17.4}$$

mozgásegyenletet. E kettőből az origó felé mutató K kötélerő

$$K = m\frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}. \tag{8.17.5}$$

A végzett munka — figyelembe véve az erő és a radiális egységvektor ellentétes irányát —

$$W = -\int_{r_0}^{r_0/2} m\frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}\mathrm{d}r = \frac{1}{2}mv_0^2 r_0^2\left[\frac{1}{r^2}\right]_{r_0}^{r_0/2} = \frac{3}{2}mv_0^2. \tag{8.17.6}$$

(c) A kinetikus energia megváltozása

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}mv_0^2 = W, \tag{8.17.7}$$

ahogy annak lennie is kell.

Forgási energia

8.18. Feladat: Az L hosszúságú m tömegű rúd függőlegesen áll, az alsó pontja súrlódásmentes csapággyal csatlakozik a talajhoz. Az egyensúlyi helyzetből kimozdul és a talajba csapódik.

Mekkora a rúd szögsebessége a becsapódás pillanatában? A rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúd végére vonatkoztatva $\theta = \frac{1}{3}mL^2$.

Megoldás: A talajszintet választva a potenciális energia zérus pontjának a rúd — a rúd tömegközéppontjának — potenciális energiája álló helyzetben

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \tag{8.18.1}$$

míg a fekvő helyzetben

$$E_{p2} = 0. \tag{8.18.2}$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \tag{8.18.3}$$

míg a végső kinetikus energia a forgásból származó

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.18.4}$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1}+E_{k1} = E_{p2}+E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.18.5}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \tag{8.18.6}$$

adódik.

8.19. Feladat: * Az L szárhosszúságú, száranként m tömegű létra egyik lába a falnál áll, míg a másik lába súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes talajon. A kezdetben 2α szögre szétnyitott létra szára csúszik, és a létra teljesen szétnyílva a talajba csapódik. Mekkora a létra szárainak szögsebessége a becsapódás pillanatában? (A rúg végpontjára vett tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3}mL^2$.)

Megoldás: A létra a becsapódás pillanatában csak forgómozgást végez. Ez belátható, ha végiggondoljuk a következőt. Ha a létra csúcsa — a két szár találkozási pontja — v_x sebességgel halad, akkor csúszó talppont sebessége $2v_x$. A csúcspont a becsapódás pillanatában csak függőleges mozgást végez ($v_x = 0$), így a csúszó talppont sebessége ugyancsak zérus. Azaz a létra egyetlen pontja sem végez haladó mozgást. A kezdeti helyzeti energia alakul át forgási energiává:

$$2mg\frac{L}{2}\cos\alpha = 2\frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.19.1}$$

Egyszerűsítés és átrendezés után mindkét rúd szögsebessége

$$\omega\sqrt{\frac{3g}{L}}. \tag{8.19.2}$$

8.20. Feladat: * A h magasságú toronyugró a palló szélén áll és összegörnyedés nélkül — merev rúdként — a vízbe fordul. (A lába a pallón nem csúszik meg a dőlés során.) Mekkora szögnél válik el a pallótól?

Megoldás: Jelölje α azt a függőlegessel bezárt szöget, amelynél éppen elvélik a pallótól a toronyugró lába. Első lépésként számítsuk ki mekkora ebben a pillanatban a szögsebessége. A palló szintjét tekintve a potenciális energia zérus pontjának a kezdeti helyzeti energia

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \tag{8.20.1}$$

míg a dőlt helyzetben

$$E_{p2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha. \tag{8.20.2}$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \tag{8.20.3}$$

míg az elválás pillanatához tartozó forgásból származó kinetikus energia

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.20.4}$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1}+E_{k1} = E_{p2}+E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{8.20.5}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre azt kapjuk, hogy

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\alpha)}. \tag{8.20.6}$$

A rúd tömegközéppontjának sebessége

$$v = \frac{L}{2}\omega = \sqrt{\frac{3}{4}gL(1-\cos\alpha)}. \tag{8.20.7}$$

Az elválás pillanatában — egyetlen erőként — az mg súlyerő rúdirányú (radiális) komponense hat és tartja körpályán a rúd tömegközéppontját, azaz

$$m\frac{v^2}{(\frac{L}{2})} = mg\cos\alpha. \tag{8.20.8}$$

A sebesség behelyettesítése és az egyszerűsítések után

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \tag{8.20.9}$$

adódik, amelyből az elválás pillanatához tartozó szög $\alpha = 53,1^0$.

9. Feladatok a rezgőmozgás és a mechanikai hullámok tárgyköréből

Harmonikus rezgőmozgás

9.1. Feladat: (HN 15A-1) 20 g tömegű részecske harmonikus rezgőmozgást végez 3 rezgés/másodperc frekvenciával és 5 cm amplitúdóval.
(a) Mekkora teljes távolságot fut be a részecske egy teljes periódus folyamán?
(b) Mekkora a legnagyobb sebessége? Hol lép ez fel?
(c) Határozzuk meg a részecske legnagyobb gyorsulását! Hol lép fel a mozgás során a legnagyobb gyorsulás?

Megoldás: Jelölések: m = 20 g = 0,02 kg, f = 3 1/s és A = 5 cm = 0,05 m. A rezgés körfrekvenciája $\omega = 2\pi f = 18,85$ 1/s.
(a) Egy teljes periódus alatt 4-szer futja be az amplitúdónyi kitérést, így a megtett út

$$s = 4A = 20\,\text{cm} = 0,2\,\text{m}. \tag{9.1.1}$$

(b) A sebesség maximális értéke

$$v_{max} = A\omega = 0,94\,\text{m/s}. \tag{9.1.2}$$

Ezt az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor éri el a részecske.
(c) A gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = A\omega^2 = 17,77\,\text{m/s}^2. \tag{9.1.3}$$

Ezt a maximális kitérésű helyeken való áthaladáskor éri el a részecske.

9.2. Feladat: Pontszerűnek tekinthető 1 kg tömegű testre $F = -Dx$ alakú rugalmas erő hat. A rugóállandó $D = 0,25$ N/cm. A $t = 0$ pillanatban a kitérés 20 cm, a sebesség 2,83 m/s. Mekkora a rezgés amplitúdója?

Megoldás: Jelölések: $m = 1$ kg, a $t = 0$ pillanathoz tartozó kitérés és sebesség értékek $y_0 = 20$ cm és $v_0 = 2,83$ m/s.
A rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 5\,1/\text{s}. \tag{9.2.1}$$

A rezgés kitérése és sebessége

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{9.2.2}$$

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi), \tag{9.2.3}$$

ahol A az amplitrúdó és φ a kezdőfázis. A $t = 0$ pillanatra

$$y_0 = A\sin\varphi, \tag{9.2.4}$$

$$v_0 = A\omega\cos\varphi. \tag{9.2.5}$$

E két egyenletből behelyettesítés után az amplitúdó

$$A = \frac{\sqrt{y_0^2\omega^2 + v_0^2}}{\omega} = 0,6\,\text{m}. \tag{9.2.6}$$

9.3. Feladat: A 4 N/m rugóállandójú rugóra egy 0,8 kg tömegű testet függesztünk. Nyugalmi helyzetéből 12 cm-t kitérítjük és itt 0,4 m/s kezdősebességgel indítva harmonikus rezgőmozgásba hozzuk. Mézbe merítve megáll a test. Mekkora a súrlódás által disszipált mechanikai energia?

Megoldás: Jelölések: $k = 4$ N/m, $m = 0,8$ kg, $x = 12$ cm = 0,12 m és $v = 0,4$ m/s.
A mozgás kezdetén a teljes mechanika energia a rugalmas energiából és a mozgási energiából áll

$$E_{mech} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 0,0928\,\text{J}. \tag{9.3.1}$$

Mivel a text megáll és a kitérése zérus lesz, így éppen ennyi a súrlódás következtében disszipált ("szétszórt") mechanikai energia.

9.4. Feladat: Mutassa meg, hogy a $F = -kx$ rugalmas erejű rugóra akasztott m tömegű test g homogén nehézségi erőtérben harmonikus rezgőmozgást végez!

Megoldás: Fordítsuk lefelé az y tengely irányítását. Tegyük a rugó végére a testet és engedjük megnyúlni y hosszal, amíg el nem éri az egyensúlyi (gyorsulásmentes) helyzetét. Ekkor érvényes, hogy

$$0 = mg - ky. \tag{9.4.1}$$

Ezt követően húzzuk lejjebb további x távolsággal, aminek következtében, ha elengedjük, a test gyorsulni fog. Az erre a helyzetre felírható mozgásegyenlet

$$ma = mg - k(x+y). \tag{9.4.2}$$

Figyelembe az ezt megelőző egyenletet végül az

$$ma = -kx \tag{9.4.3}$$

egyenletre jutunk, amely éppen a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete.
Megjegyzés: A megoldásból az is kiolvasható, hogy egyrészt a rezgés az egyensúlyi helyzet körül jön létre, másrészt a homogén nehézségi erőtér jelenléte ellenére a mozgás harmonikus.

9.5. Feladat: Egy harmonikus rezgőmozgást végző test legnagyobb gyorsulása 8π m/s^2, legnagyobb sebessége 1,6 m/s.
(a) Határozza meg a rezgésidőt és az amplitúdót!
(b) Mennyi a rezgés összenergiája?

Megoldás:
(a) A maximális gyorsulás illetve sebesség

$$a_{max} = A\omega^2 \tag{9.5.1}$$

illetve

$$v_{max} = A\omega, \tag{9.5.2}$$

ahol A az amplitúdó, ω a körfrekvencia. E két egyenletből

$$\omega = \frac{a_{max}}{v_{max}} = \frac{8\pi}{1,6} = 15,7\,\mathrm{rad/s} \tag{9.5.3}$$

és

$$A = \frac{v_{max}^2}{a_{max}} = \frac{2,56}{8\pi} \sim 0,1\,\mathrm{m}. \tag{9.5.4}$$

A rezgésidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \sim 0,4\,\mathrm{s}. \tag{9.5.5}$$

(b) Jelölje m a tömeget kg-ban. A rezgés teljes energiája

$$E = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = 1,28 m\,\mathrm{J}. \tag{9.5.6}$$

Megjegyzés: Látható, hogy a kinematikai adatok önmagukban nem elegek a dinamikai mennyiségek meghatározásához!

9.6. Feladat: Két, azonos amplitúdójú rezgés, melyek frekvenciája $\nu_1 = 40$ Hz és $\nu_2 = 60$ Hz, egyszerre kezdi meg rezgését az egyensúlyi helyzetből. Mikor lesz legelőször ismét azonos a kitérésük?

Megoldás: A rezgések kitérését az $y(t) = A\sin 2\pi\nu_1 t$ illetve $y(t) = A\sin 2\pi\nu_2 t$ alakba írjuk fel. Az első találkozási idő a kettő egyenlőségéből számolható

$$A\sin 2\pi\nu_1 t = A\sin 2\pi\nu_2 t. \tag{9.6.1}$$

Az egyenletet átrendezve és a szögek szinusza különbségére vonatkozó összefüggést alkalmazva

$$0 = \sin 2\pi\nu_2 t - \sin 2\pi\nu_1 t = 2\cos\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2} t \sin\frac{2\pi\nu_2 - 2\pi\nu_1}{2} t \tag{9.6.2}$$

írható. Leghamarabb akkor teljesül az egyenlőség, ha

$$\cos\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2} t = 0, \tag{9.6.3}$$

azaz

$$\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2} t = \frac{\pi}{2}. \tag{9.6.4}$$

Innen az első találkozás időpontja

$$t = \frac{1}{2(\nu_2 + \nu_1)} = 0,005\mathrm{s}. \tag{9.6.5}$$

9.7. Feladat: (HN 15A-19) Határozzuk meg a 2,3 m hosszú fonálinga

(a) frekvenciáját és

(b) lengésidejét a Hold felszínén, ahol a gravitációtól származó nehézségi gyorsulás 1,67 m/s^2.

Megoldás:
(a) A kitérített inga pályagörbéje kör. A g nehézségi gyorsulású erőtérben α szöggel kitérített l hosszúságú fonálingán az m tömegű testet a testre ható gravitációs erőnek a pályagörbe érintője irányába eső erőkomponense fogja az egyensúlyi irányba mozgatni. A mozgásegyenlet

$$ma_t = -mg\sin\alpha, \tag{9.7.1}$$

ahol a tangenciális (érintő irányú) gyorsulás, a negatív előjel pedig arra utal, hogy a növekvő szögekkel ellentétes irányú az erőkomponens. A tangenciális gyorsulás

$$a_t = l\beta = l\ddot{\alpha}, \tag{9.7.2}$$

ahol $\beta = \ddot{\alpha}$ a szöggyorsulás. Így az

$$l\ddot{\alpha} = -g\sin\alpha, \tag{9.7.3}$$

differenciál egyenlet kapható. Ez az egyenlet kis szögekre – ha $\alpha << 5^0$, akkor $\sin\alpha \sim \alpha$ – a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletébe megy át, azaz

$$l\ddot{\alpha} = -g\alpha. \tag{9.7.4}$$

Innen az inga körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{9.7.5}$$

A frekvencia

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 0,135\,1/\mathrm{s}. \tag{9.7.6}$$

(b) A periódusidő

$$T = \frac{1}{f} = 7,4\,\mathrm{s}. \tag{9.7.7}$$

9.8. Feladat: A földi Egyenlítőn egy zárt épületben egy fonálinga segítségével hogyan állapíthatnánk meg, hogy a Hold felettünk vagy a Föld túlsó oldalán van?

Megoldás: Ha a Hold a Föld túlsó oldalán van, akkor a Holdtól származó vonzó kölcsönhatás hozzáadódva a Földéhez a g nehézségi gyorsulásnál nagyobb g' értékkel kell számolni. Így a kialakuló rezgés ω' körfrekvenciája nagyobb mint az az ω, amely csak a Föld hatását veszi figyelembe:

$$\omega' = \sqrt{\frac{g'}{l}} \;>\; \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{9.8.1}$$

Ennek megfelelően a periódusidőkre az áll fenn, hogy $T' < T$.

9.9. Feladat: (HN 15A-20) Egy világítótorony látogatója meg akarja mérni a torony magasságát. Van nála egy orsó cérna, erre kis kavicsot köt, és a torony spirál-lépcsőházának közepén – mint fonálingát – lelógatja. A lengésidő 9,4 s. Milyen magas a torony?

Megoldás: A fonálinga ω körfrekvenciája az l fonálhosszal és a g nehézségi gyorsulással

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{9.9.1}$$

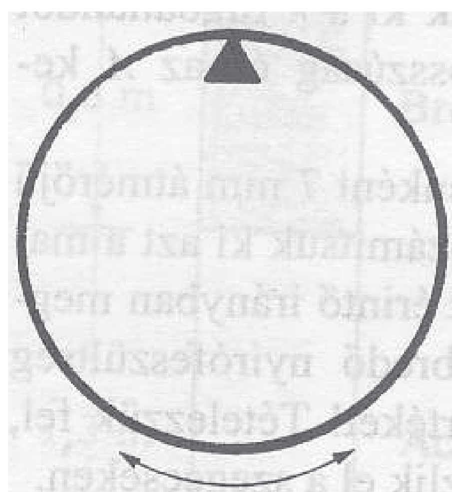
A T periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{9.9.2}$$

Innen az inga hossza, ami most a torony h magassága is egyben

$$h = l = \frac{T^2}{4\pi^2}g = 22,38\,\mathrm{m}. \tag{9.9.3}$$

9.10. Feladat: (HN 15B-26) Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk a 46. ábra szerint úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng.
(a) Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periódusidejét.
(b) Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?



46. ábra.

Megoldás: Jelölés: $R = 20$ cm $= 0{,}2$ m; m a karika tömege, $\theta_0 = mR^2$ a szimmetria tengelyére vett

tehetetlenségi nyomatéka; φ a kitérés szöge a függőlegeshez viszonyítva.
(a) A kés élén felfüggesztett inga karja – felfüggesztés és tömegközéppont távolsága – az R sugár, a felfüggesztésre vett θ tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel szerint

$$\theta = \theta_0 + mR^2 = 2mR^2. \tag{9.10.1}$$

Kitérítve φ szöggel a karikát

$$M = -mgR\sin\varphi \tag{9.10.2}$$

forgatónyomaték fog hatni. A negatív előjel éppen arra utal, hogy a nyomaték az egyensúlyi helyzet felé mozgat. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M = -mgR\sin\varphi, \tag{9.10.3}$$

ahol β a szöggyorsulás. Mivel $\beta = \ddot{\varphi}$, így

$$\theta\ddot{\varphi} = -mgR\sin\varphi, \tag{9.10.4}$$

amely "majdnem" a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Ha kis szögkitérésekre szorítkozunk, akkor alkalmazhatjuk a $\sin\varphi \sim \varphi$ közelítést, így a

$$\theta\ddot{\varphi} = -mgR\varphi \tag{9.10.5}$$

egyenlet harmonikus rezgomozgást ír le. Az ω körfrekvencia közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{\theta}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}. \tag{9.10.6}$$

A periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \tag{9.10.7}$$

(b) A fonálinga (matematikai inga) lengésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{9.10.8}$$

ahonnan a kérdéses fonál hossz

$$l = 2R. \tag{9.10.9}$$

9.11. Feladat: (HN 15C-37) Egy meg nem feszített l hosszúságú, k rugóállandójú homogén rugót úgy vágunk két részre, hogy az egyik darab kétszer akkora, mint a másik.
(a) Fejezzük ki rugódarabok k_1 és k_2 rugóállandóját!
(b) Ha mindkét darab egyik végére azonos tömegű testet akasztanánk, mi lenne a frekvenciák aránya?

Megoldás:
(a) Elég csak gondolatban szétválasztani az l hosszúságú rugót egy l_1 és l_2 hosszúságú darabra, ahol legyen $l_1 = 2l_2$. Ha a rugót F erővel húzzuk, akkor jelölje a megnyúlást Δx, azaz

$$F = k\Delta x. \tag{9.11.1}$$

Az l_1 és l_2 szakaszok megnyúlása Δx_1 és Δx_2

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2, \tag{9.11.2}$$

amelyekre, mivel az F erő a rugó teljes hosszában hat – fennáll, hogy

$$F = k_1\Delta x_1 \tag{9.11.3}$$

és

$$F = k_2\Delta x_2. \tag{9.11.4}$$

A Δx_1 és Δx_2 megnyúlások arányosak az l_1 és l_2 szakaszok hosszaival, így

$$\Delta x_1 = 2\Delta x_2. \tag{9.11.5}$$

A fenti egyenletekből

$$k_1 = 1,5k, \tag{9.11.6}$$

míg

$$k_2 = 3k. \tag{9.11.7}$$

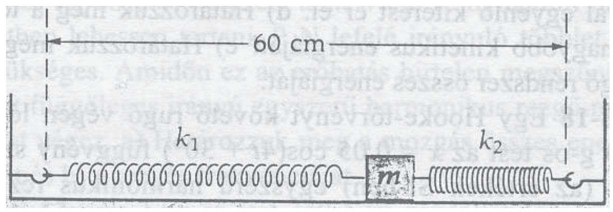
(b) A frekvenciák aránya

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{k_1}{m}}}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \tag{9.11.8}$$

9.12. Feladat: (HN 15C-38) Két rugó mindegyike feszítetlen állapotban $l_0 = 20$ cm hosszú, de rugóállandóik különbözőek: $k_1 = 40$ N/m és $k_2 = 80$ N/m. A rugókat vízszintes súrlódásmentes felületen nyugvó $m = 0,60$ kg tömegű kicsiny testhez rögzítik. A rugókat ellentétes irányban megfeszítik és egymástól $L = 60$ cm távolságban lévő kampókhoz rögzítik a 47. ábra szerint. Feltéve, hogy a test mérete elhanyagolható.

(a) A balodali kampótól milyen távol lesz a test egyensúlyi helyzete?

(b) Mekkora a test rugóirányú harmonikus rezgőmozgásának a körfrekvenciája?



47. ábra.

Megoldás:

(a) Jelölje az egyes rugók megnyúlását x_1 illetve x_2. A teljes megnyúlás

$$D = L - 2l_0 = x_1 + x_2. \tag{9.12.1}$$

Az egyensúlyi helyzetben a rugókban ugyanakkora nagyságú erő ébred, azaz

$$k_1 x_1 = k_2 x_2. \tag{9.12.2}$$

A test baloldali faltól való távolságának meghatározásához az x_1 kiszámolására van szükség

$$x_1 = \frac{Dk_2}{k_1 + k_2} = 12\,\mathrm{cm}. \tag{9.12.3}$$

Tehát a test egyensúlyi helyzete a faltól

$$l_0 + x_1 = 32\,\mathrm{cm} \tag{9.12.4}$$

távolságra van.

(b) Mozdítsuk ki a testet az egyensúlyi helyzetéből a pozitív irányba x-szel és írjuk fel a mozgásegyenletet a ható erőkkel – figyelembe véve az irányokat és azt, hogy a megnyúlások megváltoztak –

$$ma = -k_1(x_1 + x) + k_2(x_2 - x). \tag{9.12.5}$$

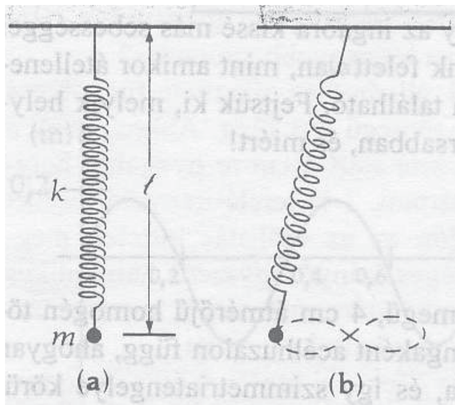
Alkalmazva a (9.12.2) egyenletbeli összefüggést az

$$ma = -(k_1 + k_2)x \tag{9.12.6}$$

egyenletre jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \tag{9.12.7}$$

9.13. Feladat: (HN 15C-39) Egy k rugóállandójú rugó végére akasztott m tömegű test a rugót (nyugalmi állapotban) l hosszúságúra nyújtja a 48.a ábra szerint. A testet most mozgásba hozzuk úgy, hogy fel-le rezeg és ingaként ide-oda leng. A test a 48.b ábra szerint a függőleges síkban mozogva "nyolcasokat" ír le. Fejezzük ki a k rugóállandót az m, l és g függvényében!



48. ábra.

Megoldás: A mozgás egy rezgésre és egy ingalengésre bontható. A rezgés ω_r körfrekvenciája

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{9.13.1}$$

az ingamozgás ω_i körfrekvenciája

$$\omega_i = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{9.13.2}$$

alakban írható fel. A "8"-as leírása során egy ingalengéshez két rezgés tartozik, tehát

$$\omega_r = 2\omega_i, \tag{9.13.3}$$

vagyis

$$\frac{k}{m} = 4\frac{g}{l}. \tag{9.13.4}$$

Innen a rugóállandó

$$k = 4\frac{mg}{l}. \tag{9.13.5}$$

9.14. Feladat: Egy d vastagságú egyenletes A keresztmetszetű falapocskát vízre teszünk g homogén nehézségi erőtérben. A falapocskát függőleges irányban kicsit megnyomva, majd elengedve rezgőmozgást jön létre. Mutassuk meg, hogy a mozgás harmonikus rezgőmozgás. A közegellenállástól és a felületi feszültségtől tekintsünk el. A fa sűrűsége ϱ_f , a vízé ϱ_v.

Megoldás: Helyezzük a falapocskát a vízre és várjuk meg az egyensúlyi helyzet beálltát. Ha ekkor x-szel jelöljük a bemerülés nagyságát, akkor lefele irányított koordinátarendszer esetén a testre ható erők a

$$0 = \varrho_f A d g - \varrho_v A x g \tag{9.14.1}$$

egyenletnek tesznek eleget. Ezt követően a falapocskát y-nal lejjebb nyomjuk, majd elengedjük. A falapocska mozgásegyenlete a

$$\varrho_f A d \ddot{y} = \varrho_f A d g - \varrho_v A(x+y)g \tag{9.14.2}$$

lesz. Figyelembe véve a (9.14.1) egyenletet a

$$\varrho d \ddot{y} = -\varrho_v g y \tag{9.14.3}$$

egyenlethez jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a rezgés körfrekvenciája közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{\varrho_v g}{\varrho_f d}}. \tag{9.14.4}$$

9.15. Feladat: Az M tömegű, R sugarú homogén anyageloszlású bolygó északi és déli pólusa között lyukat fúrunk. Mutassuk meg, hogy a bedobott m tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez! (A súrlódástól tekintsünk el.)

Megoldás: A homogén bolygó közepétől r távolságban lévő testre a bolygónak attól a részétől származik eredő erőhatás, amennyi az r sugáron belül van. Így az arányosság miatt a figyelembe veendő tömeg

$$M(r) = \frac{r^3}{R^3} M. \tag{9.15.1}$$

Az m tömegű test mozgásegyenlete

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{R^3} r, \tag{9.15.2}$$

amelyből

$$\ddot{r} = -\gamma \frac{M}{R^3} r \tag{9.15.3}$$

adódik. Ez egy harmonikus rezgőmozgás egyenlete. A körfrekvencia közvetlenül leolvasva:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}. \tag{9.15.4}$$

9.16. Feladat: Az M tömegű, R sugarú homogén bolygó északi pólusán lefektetünk egy súrlódásmentes sík lapot, amely a póluson átmenő érintősík. Mutassuk meg, hogy egy, a póluson átmenő egyenes mentén mozgó m tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez! Mi az itteni harmonikus rezgés feltétele? (A bolygó forgásától tekintsünk el.)

Megoldás: A síkon az érintési ponttól x távolságban a testre ható erő

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2+x^2}, \tag{9.16.1}$$

amely a bolygó középpontja felé mutat. Az egyensúlyi helyzet felé mutató tangenciális komponens

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}. \tag{9.16.2}$$

Ezzel a test mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{mM}{(R^2+x^2)^{3/2}} x. \tag{9.16.3}$$

Ha kis $x << R$ kitérésekre szorítkozunk, akkor alkalmazhatjuk a

$$\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}} \sim \frac{1}{R^3} \tag{9.16.4}$$

közelítést, amellyel a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{mM}{R^3} x \tag{9.16.5}$$

alakú lesz. Ez pedig a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a körfrekvencia

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}. \tag{9.16.6}$$

Csillapodó és gerjesztett rezgések

9.17. Feladat: (HN 15B-28) Egy 2 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Súrlódás miatt a test csillapított harmonikus mozgást végez. A rezgés amplitúdója a t = 0 s időpillanatban 0,20 m, majd ezt követően 6 másodperc múlva 0,16 m-re csökken.
(a) Határozzuk meg a súrlódási erőtől származó csillapítási együtthatót.
(b) Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját.

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $k = 200$ N/m; $A = 0,2$ m; $t = 6$ s és $A(t) = 0,16$ m.
(a) A csillapodó rezgés mozgásegyenlete

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 = 0, \tag{9.17.1}$$

ahol

$$\beta = \frac{c}{2m} \tag{9.17.2}$$

a keresett c csillapítási együtthatóval és

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{9.17.3}$$

A (9.17.1) mozgásegyenletet kielégítő kitérés az idő függvényében

$$y(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta), \tag{9.17.4}$$

ahol δ a kezdeti feltételhez illesztett kezdőfázis, valamint $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ Itt a t időpillanathoz tartozó amplitúdó

$$A(t) = Ae^{-\beta t}. \tag{9.17.5}$$

Ebből β kifejezhető és a paraméterek behelyettesítése után kiszámolható:

$$\beta = -\frac{1}{t}\ln\frac{A(t)}{A} = 0,037\,1/\mathrm{s}. \tag{9.17.6}$$

A c csillapodási tényező a (9.17.2) összefüggésből

$$c = 2m\beta = 0,1488\,\mathrm{kg/s}. \tag{9.17.7}$$

(b) A rendszer rezonanciafrekvenciája

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 99,99\,1/\mathrm{s}. \tag{9.17.8}$$

9.18. Feladat: Egy csillapítatlan rezgő rendszerben mozgó test tömege 0,5 g. A rendszert változtatható frekvenciájú gerjesztő erő hajtja, amplitúdója minden frekvencián F_0. A test 400 Hz-en 9 mm, 405 Hz-en 5 mm amplitúdóval rezeg.
(a) Határozzuk meg az oszcillátor ω_0 sajátfrekvenciáját és
(b) a rezgés amplitúdóját 395 Hz frekvencián.
(c) Állapítsuk meg a gerjesztő erő nagyságát. Megoldás:

Rugalmas közegekben terjedő hullámok

9.19. Feladat: Mindkét végén nyitott síp alapfrekvenciája 110 Hz. Milyen hosszú a síp, ha a hang terjedési sebessége 340 m/s?

Megoldás: Ha a síp minkét vége nyitott, akkor mindkét helyen duzzadóhely van. Ebből következik, hogy a hang fél hullámhossza a síp hossza, azaz

$$d = \frac{\lambda}{2}. \tag{9.19.1}$$

A hullámhossz a kifejezhető a frekvenciával és a terjedési sebességgel, amely

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 3,091\,\mathrm{m}. \tag{9.19.2}$$

Így a síp hossza

$$d = 1,55\,\mathrm{m}. \tag{9.19.3}$$

9.20. Feladat: A pozitív x tengely irányában egy transzverzális harmonikus hullám terjed 2 m/s sebességgel, amely a $t = 0$ időpillanatban az origóban van. Amplitúdója 10 cm, frekvenciája 0,5 Hz.

(a) Mennyi a körfrekvencia?

(b) Mekkora a hullámhossz?

(c) Mekkora a cirkuláris hullámszám?

Megoldás:

(a) A körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 3,14\,1/\mathrm{s}. \tag{9.20.1}$$

(b) A hullám terjedési v sebessége, a ν frekvencia és a λ hullámhossz közötti összefüggés

$$v = \lambda\nu, \tag{9.20.2}$$

ahonnan

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = 4\,\mathrm{m}. \tag{9.20.3}$$

(c) A cirkusláris hullámszám

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1,57\,1/\mathrm{m}. \tag{9.20.4}$$

9.21. Feladat: (HN 18B-8) Kifeszített huzalon haladó transzverzális hullám apmlitúdója 0,2 mm, frekvenciája 500 Hz, sebessége 196 m/s.
(a) Írjuk fel SI egységekkel a hullámfüggvényt $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ alakban.
(b) A huzal lineáris tömegsűrűsége 4,1 g/m. Mekkora a huzalt feszítő erő?

Megoldás:
(a) Az amplitúdó méterben
$$A = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}. \tag{9.21.1}$$
A körfrekvencia
$$\omega = 2\pi f = 3140\,1/\mathrm{s}. \tag{9.21.2}$$
A hullámhossz
$$\lambda = v/f = 0,392\,\mathrm{m}. \tag{9.21.3}$$
A cirkusláris hullámszám
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 16\,1/\mathrm{m}. \tag{9.21.4}$$
Így a hullámfüggvény
$$y(x,t) = 2 \cdot 10^{-4} \sin(16x - 3140t). \tag{9.21.5}$$

(b) A terjedési sebesség négyzete
$$v^2 = \frac{F}{\mu}, \tag{9.21.6}$$
ahol μ a hosszegységenkénti tömeg. Innen a kötelet feszítő erő
$$F = \mu v^2 = 157\,\mathrm{N}. \tag{9.21.7}$$

9.22. Feladat: Egy húron csillapítatlan transzverzális harmonikus hullám terjed 20 m/s sebességgel pozitív irányba. Amplitúdója 50 cm, frekvenciája 2 Hz. A $t_0 = 0$ pillanatban az $x_0 = 0$ helyen levő részecske kitérése 25 cm, és negatív irányban mozog. Mekkora a kitérése az $x = 5$ m helyen lévő részecskének a $t = 2$ s pillanatban?

Megoldás: Jelölések: $v = 20$ m/s; $A = 50$ cm = 0,5 m; $\nu = 2$ Hz; $A(x_0 = 0, t_0 = 0) = A(0,0) = 25$ cm = 0,25 m.
A hullámfüggvény általános alakja
$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \delta), \tag{9.22.1}$$

amelyre a kezdeti feltételeket alkalmazva

$$A(0,0) = A\sin\delta. \tag{9.22.2}$$

Ahhoz, hogy a hullámfüggvény a kezdeti időpillanatot követően az $x_0 = 0$ helyen csökkenjen, úgy $0 < \delta < \pi/2$ kell legyen. Így az adatok behelyettesítése után

$$\delta = \frac{\pi}{6}. \tag{9.22.3}$$

Az ω körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 12,56\,1/\mathrm{s}. \tag{9.22.4}$$

A hullám terjedési sebessége a

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{9.22.5}$$

összefüggéssel számolható, ahonnan a k cirkuláris hullámszám

$$k = \frac{\omega}{v} = 0,628\,1/\mathrm{m}. \tag{9.22.6}$$

A hullámfüggvény az SI egységekkel kifejezve a

$$y(x,t) = 0,5\sin\left(0,628x - 12,56t + \frac{\pi}{6}\right) \tag{9.22.7}$$

alakot ölti. Az $x = 5$ m és $t = 2$ s helyettesítést elvégezve az ezen a helyen és ebben az időpontban a kitérés

$$y(5,2) = -0,25\,\mathrm{m}. \tag{9.22.8}$$

10. Feladatok a termodinamika tárgyköréből

Hővezetés, hőterjedés sugárzással

10.1. Feladat: (HN 19A-23) Határozzuk meg egy 20 cm hosszú, 4 cm átmérőjű hengeres vörösréz rúdon időegység alatt átvezetett hőmennyiséget, ha a rúd két vége 0 ^{0}C, ill. 220 ^{0}C hőmérsékletű!

Megoldás:

10.2. Feladat: (HN 19A-25) Egy épület téglafalának mérete: 4 m × 10 m és, a fal 15 cm vastag. A hővezetési együtthatója $\lambda = 0,8$ W/m K. Mennyi hő áramlik át a falon 12 óra alatt, ha az átlagos belső hőmérséklet 20 ^{0}C, a külső pedig 5 ^{0}C?

Megoldás: Jelölések: a fal felülete A = 4 m × 10 m = 40 m^2; a falvastagság d = 15 cm; az eltelt idő t = 12 óra = 43200 s; T_1 = 20 ^{0}C és T_2 = 5 ^{0}C.
A hőáram (a belső energia árama, itt most a fal teles felületére vett teljesítmény) a Fourier-törvény szerint

$$I = P = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} A. \tag{10.2.1}$$

A 12 óra alatt átáramlott hő

$$Q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} At = 1,38 \cdot 10^8 \mathrm{J}. \tag{10.2.2}$$

10.3. Feladat: (HN 19B-33) Egy 3 cm élhosszúságú alumínium kockát lámpakorommal vontak be és így ideális hősugárzó lett. A kockát vákuumkamrába tették, amelynek falait 27 ^{0}C-on tartották. Milyen teljesítményű legyen az a fűtőtest, amely annyi energiát ad a kockának, hogy hőmérséklete állandóan 90 ^{0}C maradjon?

Megoldás: Jelölések, adatok: $a = 3$ cm; $T_0 = 27\ ^0\mathrm{C} = 300$ K; $T_1 = 90\ ^0\mathrm{C} = 363$ K és $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4).
A stacionárius (időben állandó) állapot beálltakor a fűtőtest teljesítménye

$$P = \sigma(T_1^4 - T_0^4)A \tag{10.3.1}$$

ahol a kocka felszíne $A = 6a^2$. Az adatok behelyettesítése után

$$P = 2,836 \mathrm{W}. \tag{10.3.2}$$

Ideális gázok állapotegyenlete

10.4. Feladat: (HN 20B-26) Egy tó fenekén, ahol a hőmérséklet 4 ^{0}C, egy 0,2 cm átmérőjű légbuborék képződött. Ez 25 m-t emelkedik a felszínig, ahol a víz hőmérséklete 24 ^{0}C. Határozzuk meg a gömb alakú buborék méretét, amint éppen eléri a víz felszínét, feltételezve, hogy a buborék belsejében lévő levegő mindig felveszi a környező víz hőmérsékletét! A légköri nyomás 10^5 Pa.

Megoldás: Jelölések: $T_1 = 4$ ^{0}C $= 277$ K; $d_1 = 0,2$ cm; $h = 25$ m; $T_2 = 24$ ^{0}C $= 297$ K; a külső légnyomás $p_k = 10^5$ Pa; a víz sűrűsége $\varrho = 1000$ kg/m^3.
Az egyesített gáztörvény szerint

$$\frac{(p_k + \varrho g h)\frac{4}{3}(\frac{d_1}{2})^3\pi}{T_1} = \frac{p_k\frac{4}{3}(\frac{d_2}{2})^3\pi}{T_2}, \tag{10.4.1}$$

ahonnan — behelyettesítés után — a buborék átmérője

$$d_2 = 0,31\mathrm{cm}. \tag{10.4.2}$$

10.5. Feladat: (HN 20A-29) A Nap belsejének hőmérséklete kb. $2 \cdot 10^7$ K.
(a) Határozzuk meg egy proton átlagos kinetikus energiáját a Nap belsejében!
(b) Határozzuk meg a proton négyzetes középsebességét!
Megoldás:

10.6. Feladat: (HN 20B-36) Milyen hőmérsékleten egyenlő az oxigén atomok négyzetes középsebessége a Föld felszínéről való szökési sebességgel?

Megoldás: Adatok: A Föld sugara $R_F = 6370$ km, tömege $M_F = 6 \cdot 10^{24}$ kg; gravitációs állandó $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; egyetmes gázállandó $R = 8,31$ J/(mol K); az oxigén móltömege $M = 16$ g/mol.
A v_{sz} szökési sebesség

$$v_{sz} = \sqrt{\frac{2\gamma M_F}{R_F}}, \tag{10.6.1}$$

a v_{nks} négyzetes középsebesség

$$v_{nks} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \tag{10.6.2}$$

A kettő egyenlőségéből a fenti adatokkal a kérdéses hőmérséklet

$$T = 80642\mathrm{K}. \tag{10.6.3}$$

10.7. Feladat: 2 mól, 2 atomos gázzal állandó nyomáson 747,9 J hőt közlünk. A hőmérséklete 10 ^{0}C-kal változik. Hány szabadsági fokú a gáz?

Megoldás: Az állandó nyomásom vett mólhő és a szabadsági fokok száma közötti összefüggés

$$c_p = \frac{f+2}{2}R. \tag{10.7.1}$$

A közölt hő és a hőmérséklet változás között fenn áll, hogy

$$Q = c_p n \Delta T, \tag{10.7.2}$$

amelyből behelyettesítés után az állandó nyomáson vett mólhőre $c_p = \frac{9}{2}$ adódik. Innen egyszerűen leolvasható, hogy a szabadsági fokok száma

$$f = 7. \tag{10.7.3}$$

Megjegyzés: A szoba hőmérsékletű kétatomos gázok állandó nyomáson vett mólhője $c_p = \frac{7}{2}$, a szabadsági fokok száma $f = 5$, amelyek a transzlációs és rotációs mozgásokhoz kapcsolódnak. Magas hőmérsékleten ($\sim$ 2000 K) azonban a rezgéshez tartozó 2 újabb szabadsági fok jelenik meg. A mérést ezen a hőmérsékleten végezték!

10.8. Feladat: (HN 21B-12) Mutassuk meg, hogy egyatomos ideális gázra az izotermikus kompresszió-modulus ($K = -V \cdot dp/dV$) egyenlő a nyomással!

Megoldás: Az ideális gáz állapotegyenlete

$$pV = nRT, \tag{10.8.1}$$

ahonnan a nyomás

$$p(V) = nRT\frac{1}{V}. \tag{10.8.2}$$

A dp/dV differenciálhányadost kiszámolva

$$\frac{dp}{dV} = -nRT\frac{1}{V^2}, \tag{10.8.3}$$

az izoterm kompresszió-modulus — felhasználva az állapotegyenlet alakját —

$$K = -V\frac{dp}{dV} = VnRT\frac{1}{V^2} = p. \tag{10.8.4}$$

Körfolyamatok ideális gázzal

10.9. Feladat: (HN 21C-22) Kezdeti p_1, V_1, T_1 állapotjelzőkkel jellemzett egyatomos ideális gázzal a következő, három lépésből álló körfolyamatot végezzük: izotermikus expanzió V_2 térfogatig, izobár kompresszió az eredeti térfogatig és izochor melegítés a kezdeti nyomás és hőmérséklet visszaállítására.
(a) Ábrázoljuk a körfolyamatot a $p-V$ síkon!
(b) Határozzuk meg a gáz mólszámát a megadott paraméterekkel, a gázállandóval és c_v-vel kifejezve.
(c) Határozzuk meg a T_2 hőmérsékletet az izobár kompresszió végén a b) feladat eredményét felhasználva!
(d) Írjuk fel mindhárom folyamatra a hőmérséklet változását a megfelelő változók függvényében.

Megoldás:
(a) (ábra)
(b) Az ideális gáz

$$pV = nRT \tag{10.9.1}$$

állapotegyenletéből és a mólhőre érvényes

$$c_v = \frac{3}{2}R \tag{10.9.2}$$

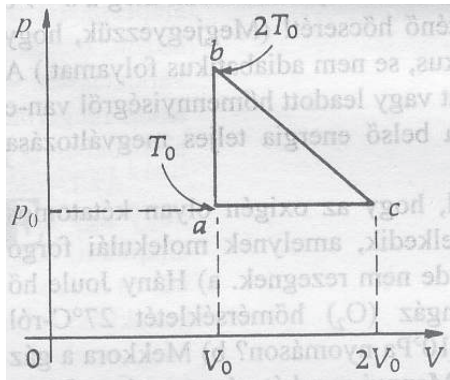
összefüggéssel az n mólszám

$$n = \frac{3p_1V_1}{2c_vT_1} = \frac{3p_2V_2}{2c_vT_1} = \frac{3p_2V_1}{2c_vT_2}. \tag{10.9.3}$$

(c) A fenti egyenletből a T_2 hőmérséklet

$$T_2 = \frac{V_1}{V_2}T_1. \tag{10.9.4}$$

(d) Az első folyamatban $\Delta T = 0$; a másodikban $\Delta T = T_2 - T_1 = (\frac{V_1}{V_2} - 1)T_1$; míg a harmadikban $\Delta T = T_1 - T_2 = (1 - \frac{V_1}{V_2})T_1$.



49. ábra.

10.10. Feladat: (HN 21C-26) Két mól egyatomos gázzal a 49. ábrán látható abca körfolyamatot végezzük. A $p-V$ síkon mindhárom folyamat ábrája egyenes. Az a pontban a paraméterek: p_0, V_0, T_0. Az alábbi feladatokat oldjuk meg RT_0 függvényében.

(a) Határozzuk meg egy teljes ciklus alatt végzett munkát.

(b) Határozzuk meg a $b \to c$ folyamat során történő hőcserét! A rendszer által felvett vagy leadott hőmennyiségről van-e szó?

(c) Mekkora a belső energia teljes megváltozása egy ciklus során?

Megoldás: Az egyesített gáztörvény alkalmazásával az egyes pontokban az állapothatározók:

a: (p_0, V_0, T_0)

b: $(2p_0, V_0, 2T_0)$

c: $(p_0, 2V_0, 2T_0)$

(a) A körfolyamatban végzett munka

$$W = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{1}{2}p_0V_0 = \frac{1}{2}nRT_0. \tag{10.10.1}$$

(b) A $b \to c$ folyamat kezdő és végállapotában a hőmérséklet egyaránt T_2, de ettől a folyamat maga nem izotermikus. Ugyanakkor a belső energia megváltozása zérus. A gáz által végzett munka

$$W_{b\to c} = \frac{1}{2}(2p_0 + p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}nRT_0, \tag{10.10.2}$$

s ennek megfelelően a felvett hő

$$Q_{b\to c} = \frac{3}{2}nRT_0. \tag{10.10.3}$$

Megjegyzés: E folyamat további diszkusszióra érdemes!

(c) A körfolyamat egy teljes ciklusában a belső energia megváltozása zérus.

10.11. Feladat: (HN 22A-5) Egy hőerőgép, amelynek a Carnot-hatásfoka 30%, a 400 K hőmérsékletű hőtartályból vesz fel hőt. Határozzuk meg a hidegebb hőtartály hőmérsékletét!

Megoldás: A Carnot-körfolyamat hatásfoka

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (10.11.1)$$

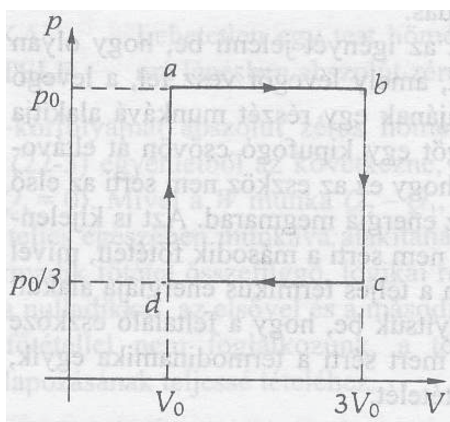
ahol T_1 a felső, T_2 az alsó hőtartály hőmérséklete. Innen

$$T_2 = (1-\eta)T_1 = 280\text{K}. \qquad (10.11.2)$$

10.12. Feladat: (HN 22B-23) Egyatomos ideális gázzal a 50. ábrán látható, a $\rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ körfolyamatot végezzük.

(a) Határozzuk meg a gáz által végzett eredő munkát p_0 és V_0 segítségével!

(b) Határozzuk meg a körfolyamat hatásfokát! Megoldás:

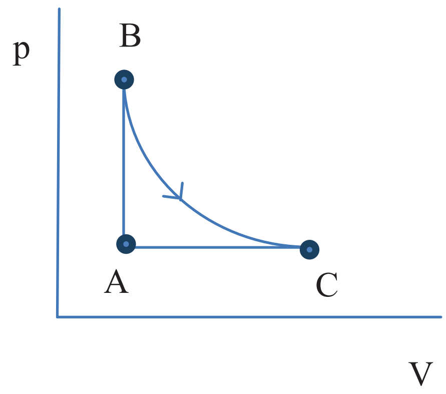


50. ábra.

10.13. Feladat: A 51. ábra 1 kmol héliumgázon végzett körfolyamatot mutat. A BC ív izotermát jelöl, $p_A = 10^5$ Pa, V_A =22,4 m^3, $p_B = 2 \cdot 10^5$ Pa. a, Határozzuk meg T_A, T_B és V_C értékeit! b, Számítsuk ki a körfolyamatban az AB és BC folyamatban végzett munkát!

Megoldás: a, Az ideális gáz állapotegyenletét

$$p_A V_A = nRT_A \qquad (10.13.1)$$



51. ábra.

felhasználva az A-beli hőmérséklet

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 269,6\,\mathrm{K}. \tag{10.13.2}$$

A B-beli hőmérsékletet Gay-Lussac II. törvénye

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \tag{10.13.3}$$

segítségével határozhatjuk meg. Innen

$$T_B = T_A \frac{p_B}{p_A} = 539,2\,\mathrm{K}. \tag{10.13.4}$$

Mivel a $B \longrightarrow C$ folyamat izoterm, így

$$T_C = T_B = 539,2\,\mathrm{K}. \tag{10.13.5}$$

A C-beli térfogatot pl. Gay-Lussac I. törvénye

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_C}{T_C} \tag{10.13.6}$$

segítségével határozhatjuk meg. Innen

$$V_C = V_A \frac{T_C}{T_A} = 44,8\,\mathrm{m}^3. \tag{10.13.7}$$

b, Mivel az $A \longrightarrow B$ folyamatban nincs térfogatváltozás, így a végzett munka is zérus:

$$W_{A\longrightarrow B} = 0. \tag{10.13.8}$$

A $B \longrightarrow C$ izoterm folyamatban a gáz által végzett munka

$$W = \int_{V_B}^{V_C} p(V)\mathrm{d}V = \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT_B}{V}\mathrm{d}V = nRT_B \ln\frac{V_C}{V_B} = 3,1\cdot 10^6\,\mathrm{J}. \tag{10.13.9}$$

10.14. Feladat: 1 m^3, 0 C^0-os 10^5 Pa nyomású héliumot állandó nyomáson addig hűtenek, amíg térfogata 0,75 m^3 nem lesz. Mennyi hőt kell ehhez elvonni?

Megoldás: Jelölések: $V_1 = 1$ m^3, $T_1 = 0$ $C^0 = 273$ K, $p_1 = p_2 = 10^5$ Pa és $V_2 = 0,75$ m^3. Mivel egyatomos gázról van szó, az állandó nyomáson vett mólhő $c_p = \frac{5}{2}R$. A folyamat állandó nyomáson történik, így

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \tag{10.14.1}$$

amelyből a hűtés utáni hőmérséklet

$$T_2 = T_1\frac{V_2}{V_1} = 204,75\,\text{K}. \tag{10.14.2}$$

A elvont hő kiszámolásához tudni kell, hány mól hélium van rendszerben. Ez a

$$pV = nRT \tag{10.14.3}$$

összefüggésből tehető meg, azaz

$$n = \frac{p_1V_1}{RT_1} = 44,08\,\text{mol}. \tag{10.14.4}$$

Ezzel a közölt hő

$$Q = c_p n(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}Rn(T_2 - T_1) = -62500\,\text{J}. \tag{10.14.5}$$

Megjegyzés: A negatív előjel arra utal, hogy hőelvonás történik.

10.15. Feladat: Tekintsünk $n = 2$ mólnyi egyatomos ideális gázt: $p_1 = 10^5$ Pa, $T_1 = 273$ K. A gázzal $Q = 6806$ J hőt közlünk, állandó térfogat mellett, majd izoterm módon tágulni engedjük úgy, hogy a végső térfogat háromszorosa legyen a kiindulási térfogatnak.

(a) Ábrázolja a folyamatot állapotdiagramon!

(b) Mennyi lesz a hőközlés utáni hőmérséklet?

(c) Mekkora lesz a nyomás a folyamat végén?

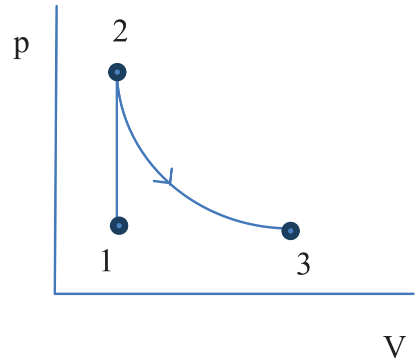
(d) Mekkora az entrópia-változás a két folyamatban?

Megoldás:

(a) Az állapotdiagram a 52. ábrán látható.

(b) A közölt hő és a hőmérséklet-változás közötti összefüggés

$$Q = c_v n\Delta T, \tag{10.15.1}$$



52. ábra.

ahol $c_v = \frac{3}{2}nR$. Innen a hőközlés során a hőmérséklet-változás

$$\Delta T = \frac{Q}{c_v n} = \frac{Q}{\frac{3}{2}nR} = 273\,\mathrm{K}. \tag{10.15.2}$$

Így az állandó nyomású hőközlés utáni hőmérséklet

$$T_2 = 546\,\mathrm{K}. \tag{10.15.3}$$

(c) Az állandó térfogaton végzett hőközlés során kialakuló p_2 nyomás a

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \tag{10.15.4}$$

összefüggésből

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}. \tag{10.15.5}$$

A térfogatváltozás miatti nyomás – figyelembe véve, hogy $V_1 = V_2$ és $V_3 = 3V_1$ – a Boyle-Mariotte törvény szerint a

$$p_2 V_2 = p_3 V_3 \tag{10.15.6}$$

összefüggésből

$$p_3 = \frac{V_2}{V_3} p_2 = 0{,}667 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}. \tag{10.15.7}$$

(d) Az <u>izochor</u> ($1 \longrightarrow 2$) folyamatbeli S_1 entrópiaváltozás a

$$S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_v n \mathrm{d}T}{T} = \frac{3}{2} nR \ln \frac{T_2}{T_1} = 17{,}28\,\mathrm{J/K}. \tag{10.15.8}$$

Az izoterm ($2 \longrightarrow 3$) folyamatban a gáz belsőenergia változása, a felvett hő a tágulási munkára fordítódik. Így a felvett hő

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_2}{V}\mathrm{d}V = nRT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} = 9969,4\,\mathrm{J}. \tag{10.15.9}$$

Az izoterm S_2 entrópiaváltozás

$$S_2 = \frac{Q}{T_2} = 18,26\,\mathrm{J/K}. \tag{10.15.10}$$

Az össz entrópiaváltozás: 35,54 J/K.

10.16. Feladat: 8 g tömegű, 5 l térfogatú, 27 ^{0}C hőmérsékletű N_2 gázt (M = 28 g) adiabatikusan kiterjesztünk 50 liter térfogatra. Mennyi hőmennyiséget kell ezen a térfogaton a gázzal közölni, hogy hőmérséklete újra 27 ^{0}C legyen?

Megoldás: Jelölések: $m = 8$ g, $V_1 = 5$ l, $T_1 = 27^0$C $= 300$ K és $V_2 = 50$ l. Mivel kétatomos szoba hőmérsékletű gázról van szó, ezért a mólhők $c_p = \frac{7}{2}R$, $c_v = \frac{5}{2}R$, így $\kappa = c_p/c_v = \frac{7}{5}$. Elsőként az adiabatikus folyamat végi hőmérsékletet határozzuk meg a $TV^{\kappa-1} = const.$ összefüggés alapján

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}. \tag{10.16.1}$$

Behelyettesítés után

$$T_2 = 119,43\,\mathrm{K}. \tag{10.16.2}$$

A 8 g nitrogén gáz n = 0,2857 molnak felel meg, így az állandó térfogaton történő visszamelegítéshez szükséges hő

$$Q = c_v n \Delta T = \frac{5}{2} Rn(T_1 - T_2) = 1071,8\,\mathrm{J}. \tag{10.16.3}$$

Hőátadás

10.17. Feladat: A c_1 fajhőjű, m_1 tömegű, T_1 hőmérsékletű pohárba c_2 fajhőjű, m_2 tömegű, T_2 hőmérsékletű sört öntünk. ($c_1 = 670$ J/kgK, $T_1 = 37$ ^{0}C, $m_1 = 0,3$ kg, $c_2 = 4000$ J/kgK, $T_2 = 8$ ^{0}C, $m_2 = 0,5$ kg)

(a) Mekkora lesz a közös hőmérséklet?

(b) Mennyi az átadott hő?

(c) Mekkora a hőáram, ha $\Delta t = 5$ s alatt áll be az egyensúly?

(d) Mekkora a teljes entrópia változás?

Megoldás:
(a) Az energiamegmaradás kifejezhető úgy, hogy a belső energiákat a $T_0 = 0\ ^0$C-hoz viszonyítjuk:

$$c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2 = (c_1 m_1 + c_2 m_2) T, \tag{10.17.1}$$

ahol T a közös hőmérséklet. Innen

$$T = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} = 10,64\,^0\mathrm{C} = 283,64\,\mathrm{K}. \tag{10.17.2}$$

(b) Az átadott hő nagysága

$$\Delta Q = c_1 m_1 (T_1 - T) = 5298\,\mathrm{J}. \tag{10.17.3}$$

(c) A hőáram

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 1059,6\,\mathrm{W}. \tag{10.17.4}$$

(d) A teljes entrópiaváltozás

$$S = \int_{T_1}^{T} c_1 m_1 \frac{\mathrm{d}T}{T} + \int_{T_2}^{T} c_2 m_2 \frac{\mathrm{d}T}{T} = c_1 m_1 \ln\frac{T}{T_1} + c_2 m_2 \ln\frac{T}{T_2} \tag{10.17.5}$$

$$= (-17,86 + 18,70)\,\mathrm{J/K} = 0,84\,\mathrm{J/K}.^* \tag{10.17.6}$$

**Emlékeztető:* A hőmérsékletet kelvinben kell behelyettesíteni.

10.18. Feladat: m = 1 kg tömegű, T_1 = 273 K hőmérsékletű vizet T_2 = 300 K hőmérsékletű végtelen hőkapacitású hőtartállyal hozunk kapcsolatba. (A víz fajhője: 4,18 kJ/kg.) Mennyi a rendszer teljes entrópiájának megváltozása?

Megoldás: A víz és a hőtartály által cserélt hő nagysága

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} c_v m\,\mathrm{d}T = c_v m (T_2 - T_1), \tag{10.18.1}$$

amely pozitív a vízre, negatív a hőtartályra nézve. A víz S_1 entrópiaváltozása – figyelembe véve, hogy a hőfelvétel a víz esetén nem állandó hőmérsékleten történik –

$$S_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v m \frac{\mathrm{d}T}{T} = c_v m \ln\frac{T_2}{T_1} = 394,2\,\mathrm{J/K}. \tag{10.18.2}$$

A hőtartály végtelen hőkapacitású, ami azt jelenti, hogy T_2 hőmérséklete nem változik, azaz a hőtártály S_2 entrópiaváltozása egyszerűen

$$S_2 = -\frac{Q}{T_2} = -376,2\,\mathrm{J/K}. \tag{10.18.3}$$

Azaz az össz entrópiaváltozás: 18 J/K.

10.19. Feladat: (HN 23B-9) Igazoljuk, hogy n mól ideális gáz V_0 kezdeti térfogatról $2V_0$ végső térfogatra való izobár tágulásakor a gáz entrópiaváltozása $nR[\kappa/(\kappa-1)]$ ln 2 !

Megoldás: A folyamat során felvett elemi hő

$$\mathrm{d}Q = nc_p\mathrm{d}T, \tag{10.19.1}$$

így az entrópiaváltozás

$$\triangle S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} nc_p \frac{\mathrm{d}T}{T} = nc_p \ln\frac{T_2}{T_1}, \tag{10.19.2}$$

ahol T_1 a kezdeti, T_2 a végső hőmérséklet. Felhasználva Gay-Lussac I. törvényét

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_k}, \tag{10.19.3}$$

ahol most $V_1 = V_0$ a kezdeti, $V_2 = 2V_0$ a végső térfogat, az entrópiaváltozás

$$\triangle S = nc_p \ln\frac{V_2}{V_1} = nc_p \ln 2. \tag{10.19.4}$$

Most már csak az kell belátni, hogy

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}R = \frac{\frac{c_p}{c_v}}{\frac{c_p}{c_v}-1}R = c_p. \tag{10.19.5}$$

Így az állítást igazoltuk.

10.20. Feladat: (HN 23C-17) Igazoljuk, hogy az egyatomos ideális gáz izochor állapotváltozása során az entrópiaváltozás 3/2 nR ln (p_v/p_k), ahol p_k a kezdeti, p_v a végső nyomás!

Megoldás: Mivel egyatomos gázról van szó, az állandó térfogaton vett mólhő

$$c_v = \frac{3}{2}R. \tag{10.20.1}$$

A folyamat során felvett elemi hő

$$\mathrm{d}Q = nc_v\mathrm{d}T, \tag{10.20.2}$$

így az entrópiaváltozás

$$\triangle S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_k}^{T_v} \frac{3}{2}nR\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{3}{2}nR\ln\frac{T_v}{T_k}, \tag{10.20.3}$$

ahol T_k a kezdeti, T_v a végső hőmérséklet. Felhasználva Gay-Lussac II. törvényét

$$\frac{T_v}{T_k} = \frac{p_v}{p_k}, \tag{10.20.4}$$

az entrópiaváltozás

$$\triangle S = \frac{3}{2}nR\ln\frac{p_v}{p_k}. \tag{10.20.5}$$