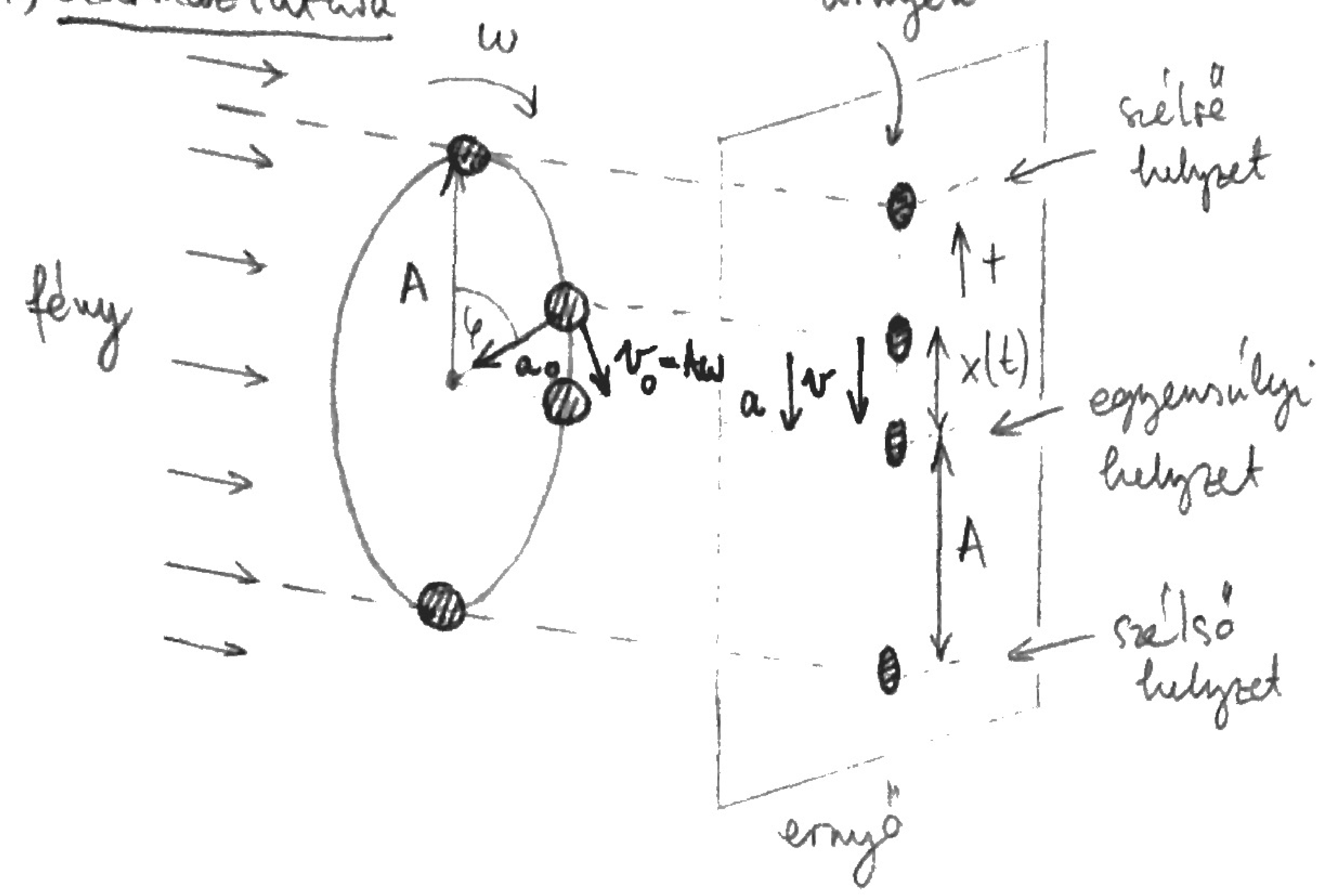
I.) Harmonikus rezgőmozgás

1.) Származtatása



A körmozgás vetületének helyzete az idő függvényében:

$$x(t) = A\cos\varphi = A\cos(\omega t)$$

A körmozgás sebessége, gyorsulása:

$$v_0 = A\cdot\omega = \text{áll.}, \quad a_0 = A\omega^2 = \text{áll.}$$

Ezek vetületei:

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)$$

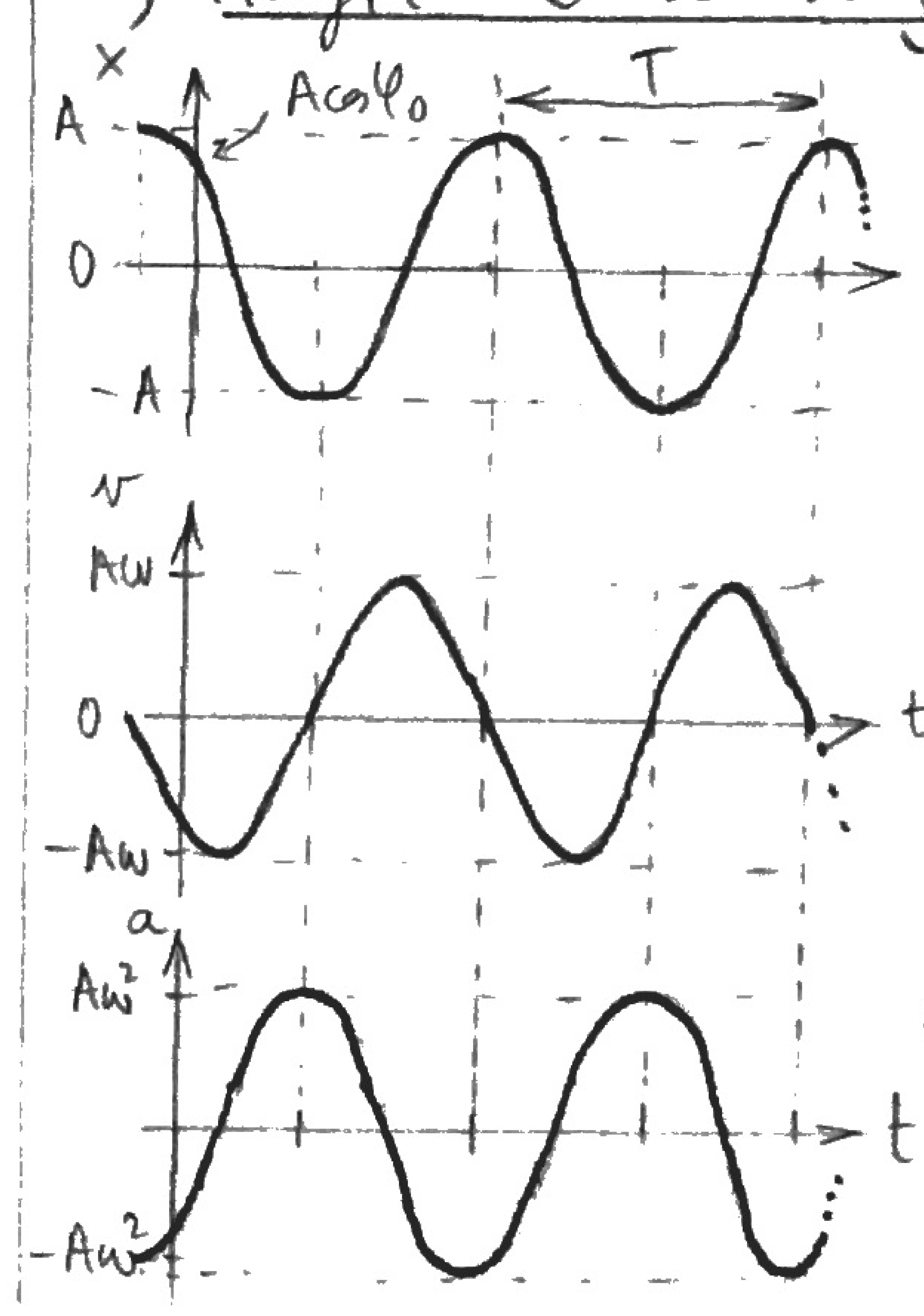
A fentit általánosítva:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$ kezdőfázis.

2.) kinematikai mennyiségek

- periódusidő (T): az egyik szélső helyzetbe történő két, egymásutáni érkezés közti idő.
- körfrekvencia: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $[\omega] = \frac{1}{s}$
- frekvencia („fordulatszám"): $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $[f] = Hz$.
- amplitúdó: az egyensúlyi és az egyik szélső helyzet távolsága: A, $[A] = m$.

3.) Hely, idő és sebesség az időben



$$x(t) = A\omega\cos(\varphi_0 + \omega t)$$

$$x_{max} = A$$

$$v(t) = -A\omega^2\sin(\varphi_0 + \omega t)$$

$$v_{max} = A\omega$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\varphi_0 + \omega t)$$

$$a_{max} = A\omega^2$$

4.) A rezgőmozgás dinamikai feltétele

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\varphi_0 + \omega t) \\ a(t) &= -A\omega^2\cos(\varphi_0 + \omega t) \end{aligned}\right\} \quad x(t) = -a(t)\,\omega^2$$

(minden pillanatban)

Mindkét oldalt $-\frac{m}{\omega^2}$-tel szorozva:

$$\underbrace{-\overbrace{\frac{m}{\omega^2}}^{D}\cdot x(t)}_{F(t)} = m\,a(t) \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Éppen ilyen erő mozgatja az m tömegű, $D = \frac{m}{\omega^2}$ rugóállandójú testet.

5.) A rezgőmozgás energetikai viszonyai

mozgási energia: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$

pot. energia (rugó): $E_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}D\,A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$

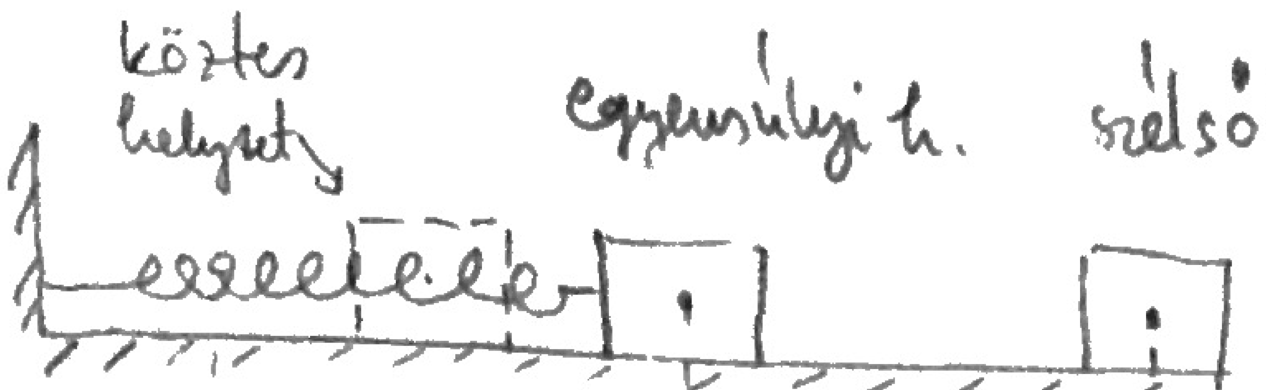
A mechanikai energia: $E_{mech} = E_{kin} + E_{pot}$.

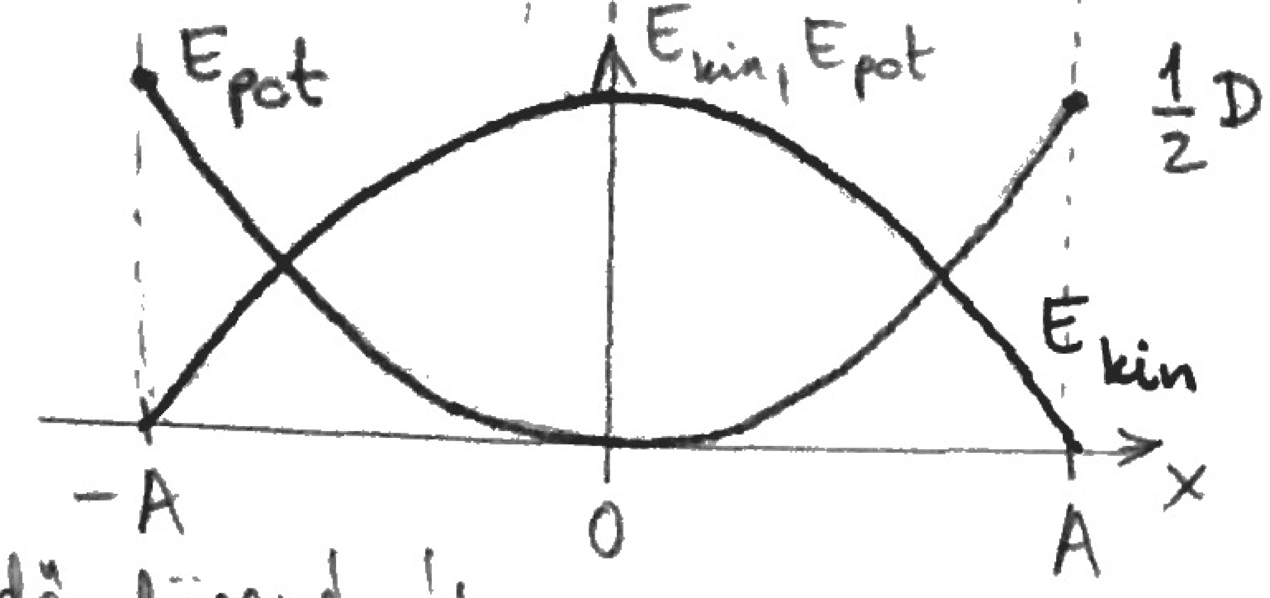
Mivel $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$:

$$E_{mech} = \frac{1}{2}DA^2\left[\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right] = \frac{1}{2}DA^2.$$

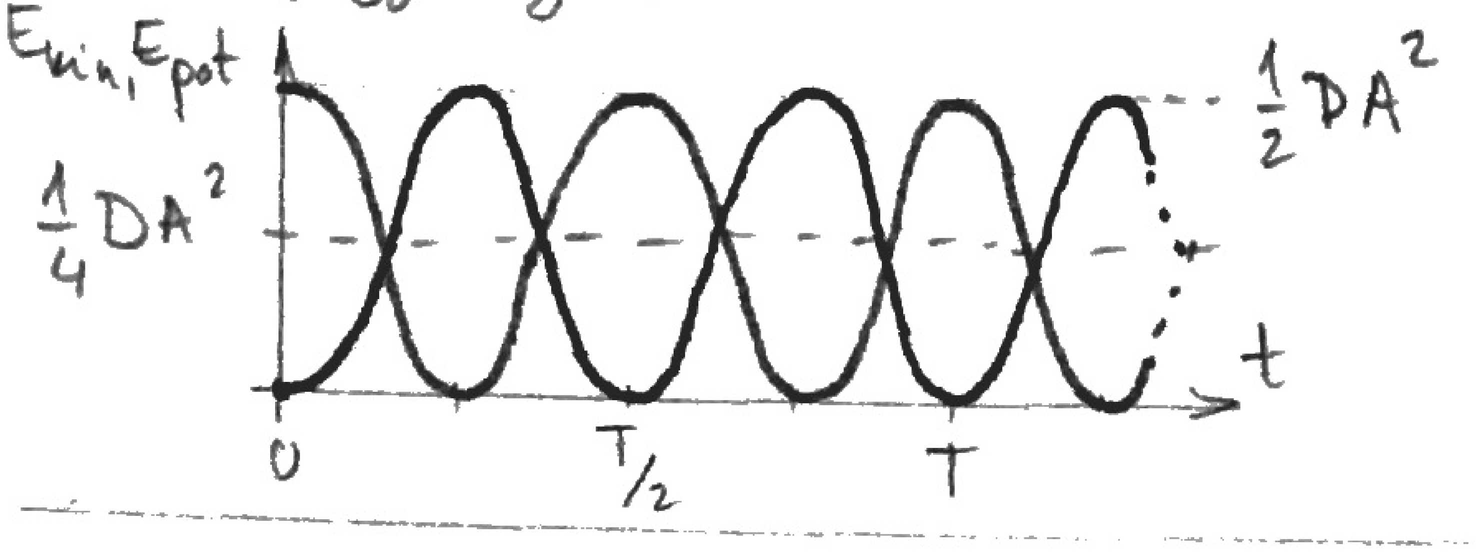
E_{mech} = állandó a mech. energiamegmaradásnak megfelelően.

Energetika (folytatás)

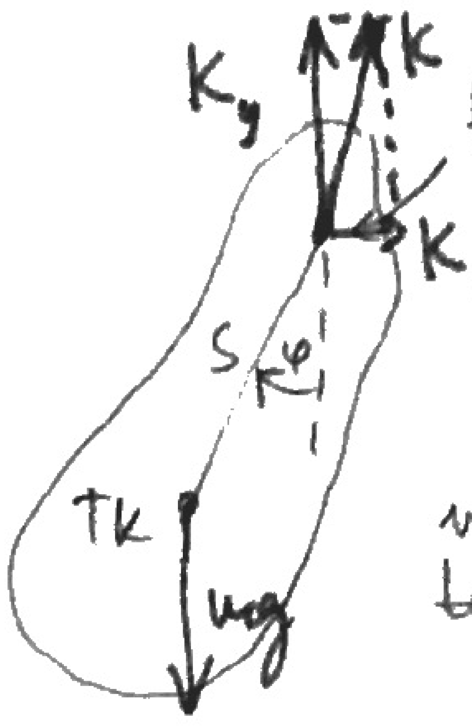




Az idő függvényében:



6.) Fizikai és matematikai inga.



Forgómozgás alapegyenlete:

$$\sum M = \Theta \cdot \beta$$

a tengelyre:

visszatérítő $\longrightarrow -mgs \cdot \sin\varphi = \Theta \cdot \ddot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} \approx -\underbrace{\frac{mgs}{\Theta}}_{\omega^2} \cdot \varphi$$

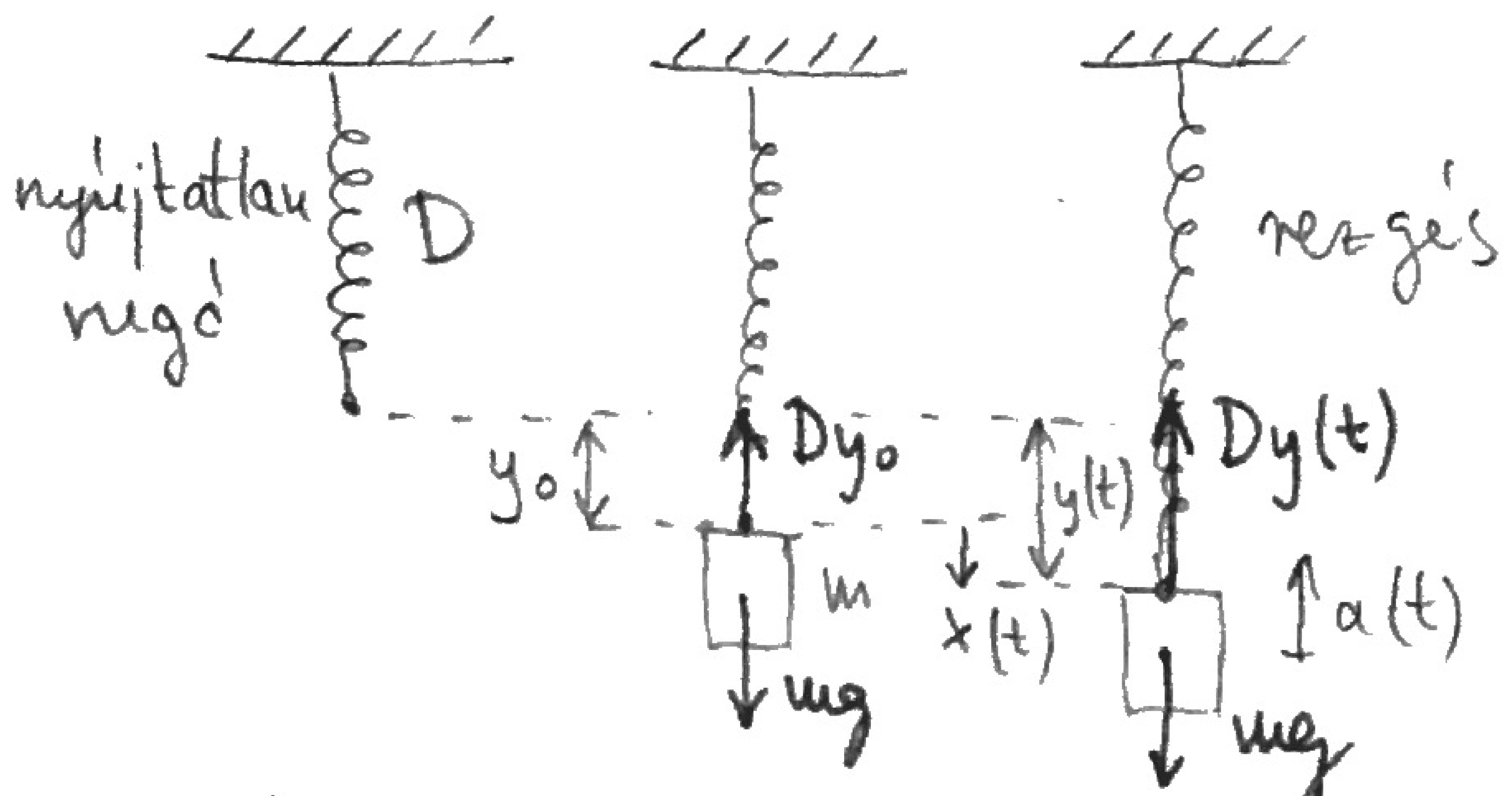
analógia: $x(t) \leftrightarrow \varphi(t)$
$a(t) = \ddot{x}(t) \leftrightarrow \ddot{\varphi}(t)$ $\rightarrow$ $\omega^2 = \frac{mgs}{\Theta}$

A periódusidő: $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}}$.

Példák: a.) homogén rúd: $\Theta = \frac{1}{3}mL^2$, $s = \frac{L}{2}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$

b.) matematikai inga: $\Theta = mL^2$, $s = L$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

7.) Rezgés homogén erőtérben.



Mozgásegyenlet:

$$mg - Dy(t) = ma(t)$$

Új változó bevezetése: $x(t) = y(t) - \frac{mg}{D}$.

x: egyensúlyi helyzettől mért távolság.

Ezzel a mozgásegyenlet:

$$mg - D\left[x(t) + \frac{mg}{D}\right] = ma(t)$$

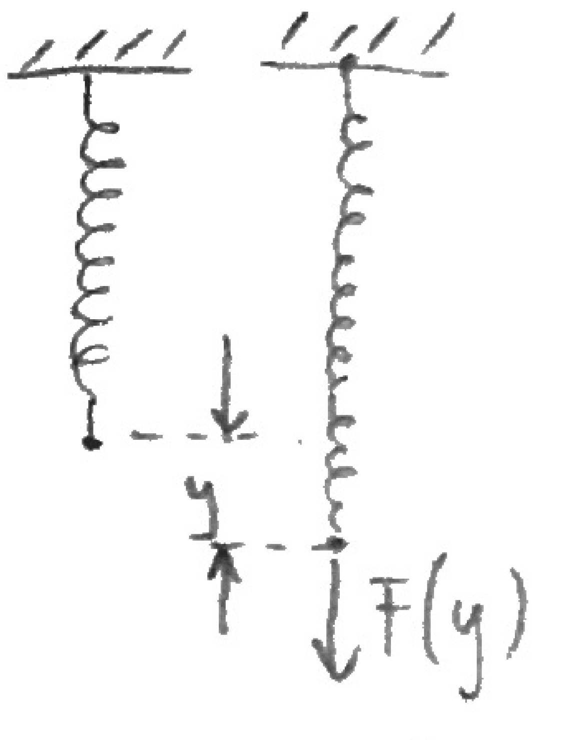
Mivel $\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t)$, ezért:

$$-Dx(t) = m\ddot{x}(t),$$

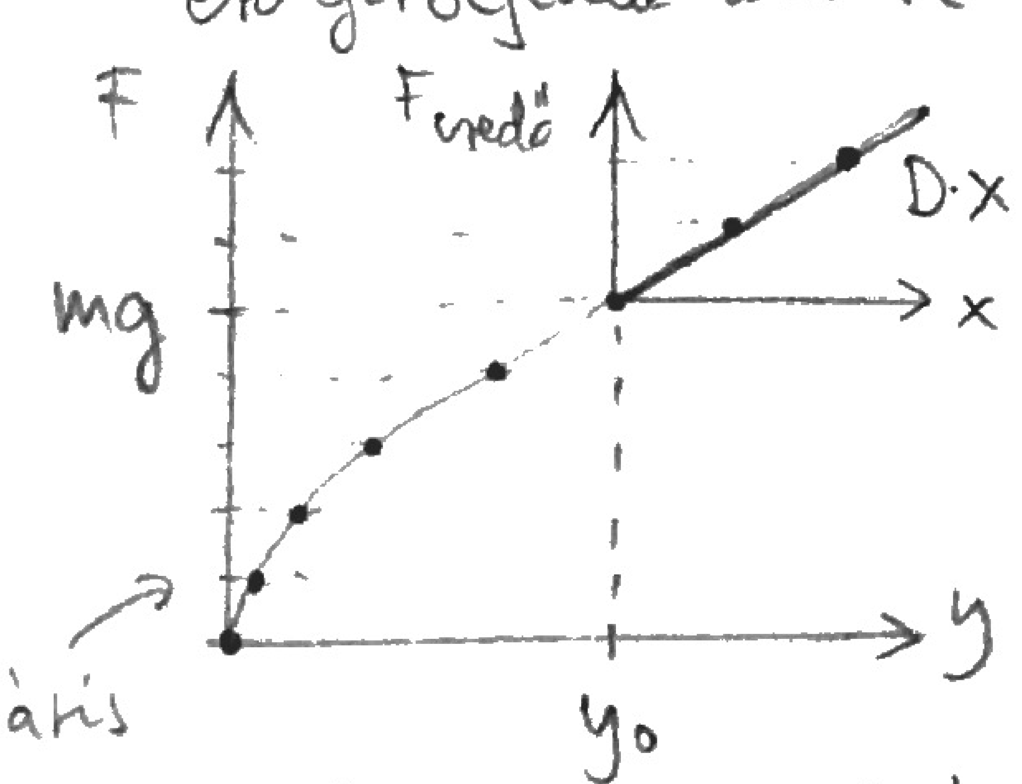
ez a sima harmonikus rezgőmozgás egyenlete: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$.

A homogén erőtér (konstans erő) tehát csak eltolja az egyensúlyi helyzetet, a mozgás jellegét <u>nem változtatja meg</u>.

8.) Kísérlet (mérés)



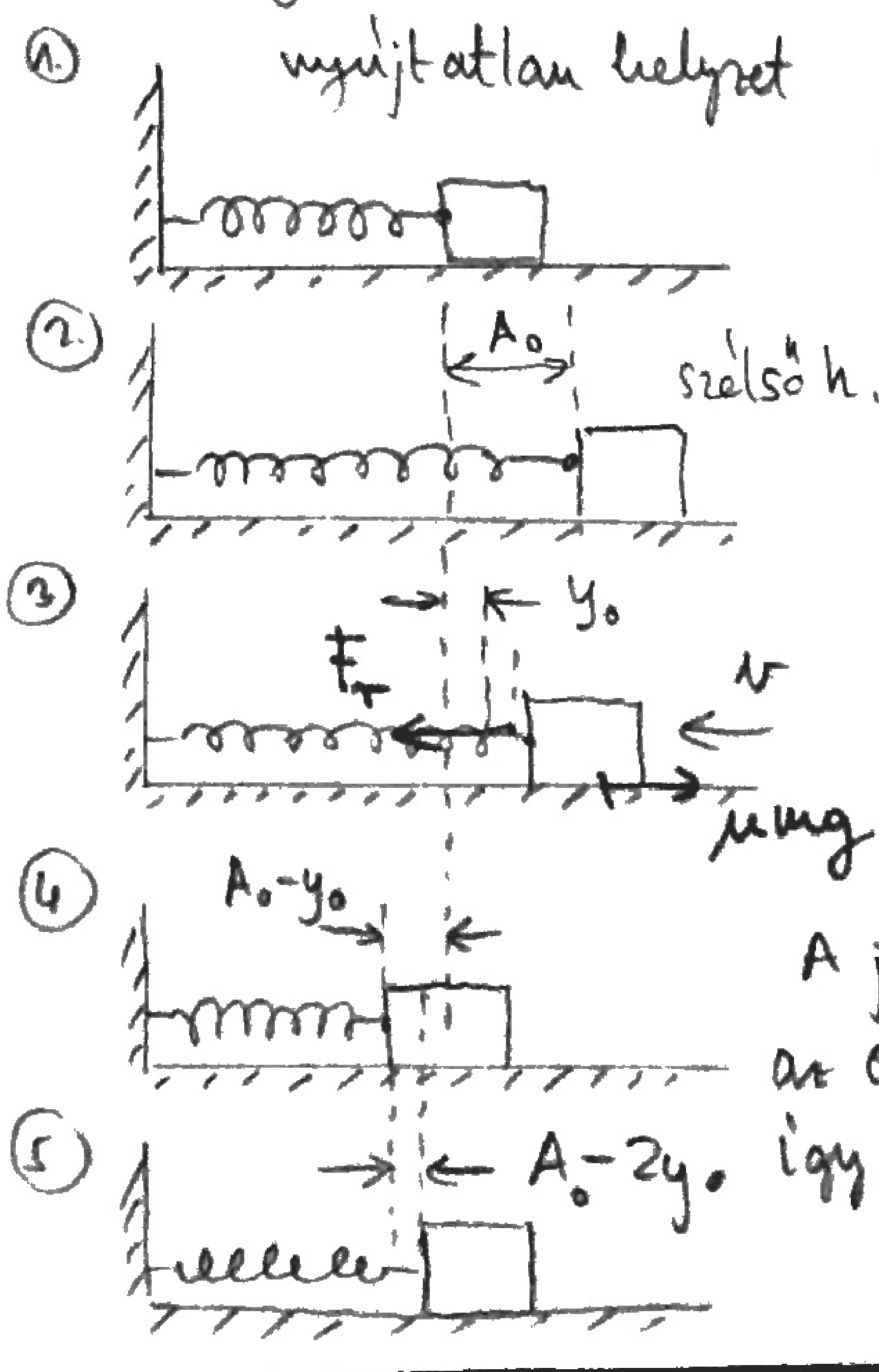
A rugó megnyúlás-erő görbéjének mérése:



A „differenciális" rugóállandót kimérjük, abból a periódusidő kiszámolható: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$.

Ezt stopperrel is megmérve jó egyezést kapunk.

9.) Rezgés súrlódás hatása alatt.



A testet A_0-lal jobbra kitérítjük. A balra induló mozgás egyensúlyi helyzete eltolt:

$$y_0 = \frac{\mu mg}{D},$$

így az amplitúdó: $A_1 = A_0 - y_0$.

A jobbra mozgás során az e.h. balra tolódik el, így: $A_2 = A_1 - 2y_0$ ..stb.