

# Fizika feladatok

2014. november 20.

Ez a feladatgyűjtemény a villamosmérnök hallgatók korábbi jogos igényének megfelelően, nagy hiányt pótol. A kitűzött feladatok az I. féléves fizika tárgyának anyagához illeszkednek. Remélhetőleg érzékelhető segítséget jelent mind a hallgatók, mind a tárgyat oktatók számára, valamint hozzájárul az egységes oktatás megvalósításához. A gyűjteményben a \* jelzés a magasabb nehézségi szintű feladatokat jelöli, míg a \*\* -gal jelölt feladatokat a kihívásokat kedvelő megoldóknak ajánljuk. A feladatgyűjtemény folyamatosan bővül új feladatokkal és megoldásokkal. Javaslatokat új feladatokra, valamint megoldásokat és egyéb észrevételeket szívesen látunk. (Szerk.: Márkus Ferenc, Rakyta Péter, Krafcsik Olga)

# Tartalomjegyzék

<b>1. Feladatok a kinematika tárgyköréből</b>	<b>8</b>
Tömegpontok mozgása egyenes mentén . . . . .	8
1.1. Feladat . . . . .	8
1.2. Feladat . . . . .	8
1.3. Feladat . . . . .	8
1.4. Feladat . . . . .	9
1.5. Feladat . . . . .	9
1.6. Feladat . . . . .	10
1.7. Feladat . . . . .	10
1.8. Feladat . . . . .	11
1.9. Feladat . . . . .	12
1.10. Feladat . . . . .	13
1.11. Feladat . . . . .	14
1.12. Feladat . . . . .	14
1.13. Feladat . . . . .	15
1.14. Feladat . . . . .	15
1.15. Feladat . . . . .	17
1.16. Feladat . . . . .	17
1.17. Feladat . . . . .	18
Tömegpontok síkbeli mozgása . . . . .	19
1.18. Feladat . . . . .	19
1.19. Feladat . . . . .	20
1.20. Feladat . . . . .	20
1.21. Feladat . . . . .	21
1.22. Feladat . . . . .	22
1.23. Feladat . . . . .	23
1.24. Feladat . . . . .	24
1.25. Feladat . . . . .	24
1.26. Feladat . . . . .	25
1.27. Feladat . . . . .	25
1.28. Feladat . . . . .	26
1.29. Feladat . . . . .	26
1.30. Feladat . . . . .	27
1.31. Feladat . . . . .	28

1.32. Feladat . . . . .	28
<b>2. Feladatok körmozgás tárgyköréből</b>	<b>29</b>
Kerületi sebesség . . . . .	29
2.1. Feladat . . . . .	29
2.2. Feladat . . . . .	30
Szöggyorsulás . . . . .	30
2.3. Feladat . . . . .	30
2.4. Feladat . . . . .	31
Centripetális és tangenciális gyorsulások . . . . .	32
2.5. Feladat . . . . .	32
2.6. Feladat . . . . .	33
2.7. Feladat . . . . .	34
2.8. Feladat . . . . .	34
<b>3. Feladatok a dinamika tárgyköréből</b>	<b>35</b>
Newton három törvénye . . . . .	35
3.1. Feladat . . . . .	35
3.2. Feladat . . . . .	36
3.3. Feladat . . . . .	36
3.4. Feladat . . . . .	37
Centripetális erő . . . . .	38
3.5. Feladat . . . . .	38
3.6. Feladat . . . . .	38
3.7. Feladat . . . . .	39
3.8. Feladat . . . . .	40
3.9. Feladat . . . . .	41
Súrlódási erő . . . . .	42
3.10. Feladat . . . . .	42
3.11. Feladat . . . . .	43
3.12. Feladat . . . . .	43
3.13. Feladat . . . . .	43
3.14. Feladat . . . . .	44
3.15. Feladat . . . . .	45
3.16. Feladat . . . . .	45
3.17. Feladat . . . . .	46
3.18. Feladat . . . . .	47

3.19. Feladat . . . . .	48
3.20. Feladat . . . . .	48
3.21. Feladat . . . . .	49
3.22. Feladat . . . . .	50
3.23. Feladat . . . . .	51
3.24. Feladat . . . . .	51
Közegellenállási erők . . . . .	52
3.25. Feladat . . . . .	52
3.26. Feladat . . . . .	53
3.27. Feladat . . . . .	53
3.28. Feladat . . . . .	55
<b>4. Feladatok munkavégzés és konzervatív erőterek tárgyköréből. Munkatétel</b>	<b>56</b>
Munkavégzés . . . . .	56
4.1. Feladat . . . . .	56
4.2. Feladat . . . . .	57
4.3. Feladat . . . . .	57
4.4. Feladat . . . . .	58
4.5. Feladat . . . . .	58
4.6. Feladat . . . . .	59
4.7. Feladat . . . . .	60
4.8. Feladat . . . . .	61
4.9. Feladat . . . . .	62
Munkatétel . . . . .	62
4.10. Feladat . . . . .	62
4.11. Feladat . . . . .	63
4.12. Feladat . . . . .	64
4.13. Feladat . . . . .	65
Munkavégzés konzervatív erőterben. Potenciális energia . . . . .	65
4.14. Feladat . . . . .	65
4.15. Feladat . . . . .	66
4.16. Feladat . . . . .	67
4.17. Feladat . . . . .	68
4.18. Feladat . . . . .	68
4.19. Feladat . . . . .	69
Energiatétel . . . . .	70



4.20. Feladat . . . . .	70
4.21. Feladat . . . . .	71
<b>5. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből</b>	<b>72</b>
Centrifugális erő . . . . .	72
5.1. Feladat . . . . .	72
5.2. Feladat . . . . .	73
5.3. Feladat . . . . .	74
Coriolis-erő . . . . .	75
5.4. Feladat . . . . .	75
5.5. Feladat . . . . .	75
5.6. Feladat . . . . .	76
5.7. Feladat . . . . .	76
5.8. Feladat . . . . .	77
<b>6. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből</b>	<b>77</b>
Impulzustétel . . . . .	77
6.1. Feladat . . . . .	78
6.2. Feladat . . . . .	78
6.3. Feladat . . . . .	79
6.4. Feladat . . . . .	79
Impulzusmegmaradás törvénye . . . . .	80
6.5. Feladat . . . . .	80
Rugalmatlan ütközések . . . . .	81
6.6. Feladat . . . . .	81
6.7. Feladat . . . . .	81
6.8. Feladat . . . . .	82
6.9. Feladat . . . . .	83
6.10. Feladat . . . . .	83
6.11. Feladat . . . . .	84
6.12. Feladat . . . . .	85
Rugalmas ütközések . . . . .	86
6.13. Feladat . . . . .	86
6.14. Feladat . . . . .	87
6.15. Feladat . . . . .	87
6.16. Feladat . . . . .	89
Rugalmas ütközések . . . . .	90

6.17. Feladat . . . . .	90
Folytonos közegek impulzusváltozása . . . . .	91
6.18. Feladat . . . . .	91
6.19. Feladat . . . . .	91
6.20. Feladat . . . . .	92
6.21. Feladat . . . . .	92
6.22. Feladat . . . . .	93
6.23. Feladat . . . . .	94
<b>7. Feladatok a gravitációs erő tárgyköréből. Kepler törvényei</b>	<b>95</b>
Centrális erőter. Potenciális energia . . . . .	95
7.1. Feladat . . . . .	95
7.2. Feladat . . . . .	96
7.3. Feladat . . . . .	96
7.4. Feladat . . . . .	96
7.5. Feladat . . . . .	97
7.6. Feladat . . . . .	98
7.7. Feladat . . . . .	98
7.8. Feladat . . . . .	99
7.9. Feladat . . . . .	100
Kepler törvényei . . . . .	100
7.10. Feladat . . . . .	100
<b>8. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből</b>	<b>101</b>
Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel . . . . .	101
8.1. Feladat . . . . .	102
8.2. Feladat . . . . .	102
8.3. Feladat . . . . .	103
8.4. Feladat . . . . .	104
8.5. Feladat . . . . .	105
8.6. Feladat . . . . .	106
8.7. Feladat . . . . .	106
8.8. Feladat . . . . .	107
8.9. Feladat . . . . .	108
8.10. Feladat . . . . .	109
8.11. Feladat . . . . .	109
8.12. Feladat . . . . .	110

8.13. Feladat . . . . .	111
8.14. Feladat . . . . .	113
8.15. Feladat . . . . .	114
Impulzusmomentum megmaradása . . . . .	115
8.16. Feladat . . . . .	115
8.17. Feladat . . . . .	116
Forgási energia . . . . .	117
8.18. Feladat . . . . .	117
8.19. Feladat . . . . .	118
8.20. Feladat . . . . .	119

# 1. Feladatok a kinematika tárgyköréből

## Tömegpontok mozgása egyenes mentén

**1.1. Feladat:** Mekkora az átlagsebessége annak pontnak, amely mozgásának első szakaszában  $v_1$  sebességgel  $s_1$  utat, második szakaszában  $v_2$  sebességgel  $s_2$  utat tesz meg?

**Megoldás:** Az átlagsebességet az összesen megtett útmennyiség és az ehhez szükséges teljes időtartam hányadosaként kapjuk meg:  $\bar{v} = \frac{\sum_i s_i}{\sum_i t_i}$ . Az eltelt időtartamok:  $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$  és  $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$ . Így

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}. \quad (1.1.1)$$

**1.2. Feladat:** Két mozdony  $s_1$  távolságból, egymáshoz képest  $v$  sebességgel közeledik egymás felé az egyenes vasúti pályán. Az egyik fényjelet ad, amely a szélvédőkről visszaverődik. Mekkora utat tesz meg a fény, amíg  $s_2$  távolságra lesznek egymástól?

**Megoldás:** Az eltelt idő:

$$t = \frac{s_1 - s_2}{v}, \quad (1.2.1)$$

amely idő alatt a fény

$$s = ct = c \frac{s_1 - s_2}{v} \quad (1.2.2)$$

utat tesz meg.

**1.3. Feladat:** Egyenes vasúti pályán egy mozdony halad  $v$  sebességgel, s közben  $\Delta t$  ideig dudál. Milyen hosszúnak hallja a pálya mellett álló utas a dudaszót, ha a vonat nem halad el mellette?

**Megoldás:** Tegyük fel, hogy a mozdony  $s$  távolságban van, amikor elkezd dudálni. A hangot

$$t_1 = \frac{s}{c} \quad (1.3.1)$$

idő elteltével hallja meg a megfigyelő. Ezt követően  $\Delta t$  idő múlva már csak  $s - v\Delta t$  távolságban lesz a mozdony, amely ekkor befejezi a dudálást. A dudaszó vége

$$t_2 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} \quad (1.3.2)$$

idő elteltével jut a megfigyelőhöz. A dudaszót a megfigyelő tehát

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c - v}{c} \Delta t \quad (1.3.3)$$

hosszúnak hallja. *Megjegyzés:* Távolodó mozdony esetén a dudaszó

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s + v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c + v}{c} \Delta t \quad (1.3.4)$$

időtartamúnak hallatszik.

**1.4. Feladat:** Egy gépkocsi 54 km/h sebességről 5 m/s<sup>2</sup> lassulással egyenletesen lefékez. Mekkora a teljes fékút?

Megoldás: Legyenek  $v_0 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$  és  $a = 5 \text{ m/s}^2$ . A sebesség az idő függvényében a

$$v(t) = v_0 - at, \quad (1.4.1)$$

összefüggéssel adható meg. Ennek segítségével a gépkocsi megállásáig eltelt idő

$$t = \frac{v_0}{a} = 3 \text{ s}. \quad (1.4.2)$$

A teljes fékút pedig

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 = 22,5 \text{ m}. \quad (1.4.3)$$

**1.5. Feladat:** Egy tömegpont az  $x$  tengely mentén mozog  $-4 \text{ m/s}^2$  állandó gyorsulással. Az  $x = 0$  helyen a sebessége 20 m/s, az időt ekkor kezdjük el mérni. Mikor lesz a test először az  $x = 18 \text{ m}$  helyen?

Megoldás: Legyenek  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ,  $a = -4 \text{ m/s}^2$ . A tömegpont helye, mint az idő függvénye az

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.5.1)$$

összefüggéssel adható meg. Oldjuk meg az egyenletet a  $t$  változóra az  $x = 18 \text{ m}$  helyettesítés mellett:

$$18 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.5.2)$$

Az egyenlet gyökei:  $t_1 = 1 \text{ s}$  és  $t_2 = 9 \text{ s}$ . A tömegpont először a  $t_1$  időpillanatban éri el az  $x = 18 \text{ m}$  helyet.

**1.6. Feladat:** (HN 2B-18) Egy futó a 100 m-es vágtszámot 10,3 s-os eredménnyel nyerte meg. Egy másik futó 10,8 s-os idővel futott be. Feltéve, hogy az atléták az egész távon egyenletesen futottak, határozzuk meg, hogy milyen távol volt a második futó a céltől, amikor a győztes átszakította a célszalagot!

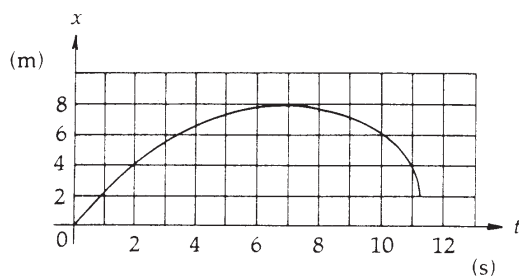
**Megoldás:** Az adatokat jelöljük az alábbi módon:  $s = 100$  m;  $t_1 = 10,3$  s;  $t_2 = 10,8$  s. A másodikként célba érkező futó sebessége

$$v = \frac{s}{t_2} = 9,26 \text{ m/s} \quad (1.6.1)$$

volt. Mivel a hátránya  $t = t_2 - t_1 = 0,5$  s volt, így  $d = vt = 4,63$  m-re volt a célvonalától.

**1.7. Feladat:** (HN 2B-19) A 1. ábra egy egyenesvonalú pályán mozgó részecske út-idő grafikonját mutatja.

- Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a  $t_1 = 2$  s és  $t_2 = 5$  s időintervallumra!
- Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége?
- Mekkora a  $t = 10$  s időpontban a pillanatnyi sebessége?



**Megoldás:**

(a) A grafikonról leolvasható, hogy a  $t_1 = 2$  s időpillanatban  $x_1 = 4$  m a helykoordináta, valamint a  $t_2 = 5$  s időpillanatban  $x_2 = 7$  m. Az átlagsebességet a teljesen megtett út és hozzá tartozó idő hányadosaként kapjuk meg:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1 \text{ m/s.} \quad (1.7.1)$$

(b) A mozgás sebessége ott zérus, ahol a görbéhez húzott érintő meredeksége zérus. Ez jó közelítéssel láthatóan a

$$t' = 7 \text{ s} \quad (1.7.2)$$

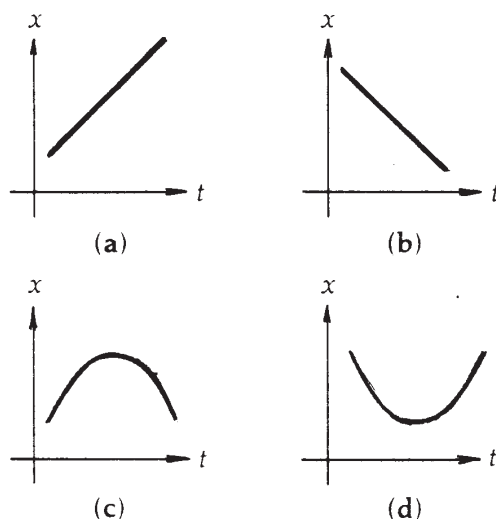
időpillanatban áll fenn.

(c) A  $t = 10$  s-beli sebesség meghatározása a pontbeli érintő kiszámolását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a ponthoz nagyon közeli értékeket kellene leolvasni. Mivel elég nagy a leolvasási pontatlanság – a megértés lényegét pedig nem érinti – az érintő meghatározását úgy végezzük el, hogy tekintjük a  $t_9 = 9$  s-hoz és  $t_{11} = 11$  s-hoz tartozó  $x_9 = 7$  m és  $x_{11} = 4$  m helykoordinátákat, és kiszámoljuk a

$$v_{10} = \frac{x_{11} - x_9}{t_{11} - t_9} \sim -2 \text{ m/s.} \quad (1.7.3)$$

meredekséget. A negatív előjel arra utal, hogy a pont az origó felé mozog. A mozgás irányának megváltozása a  $t' = 7$  s időpillanatban történt.

**1.8. Feladat:** (HN 2B-22) Az 1. ábra négy különböző mozgás hely-idő függvényábráját mutatja. Állapítsuk meg minden esetben, hogy a gyorsulás pozitív, negatív vagy zérus!



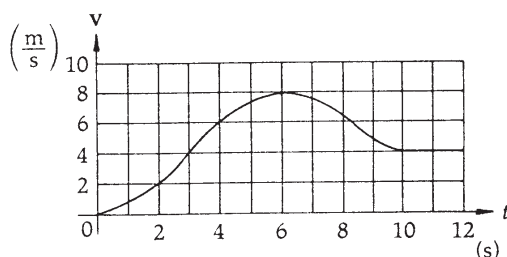
1. ábra.

**Megoldás:** Az 1. (a) és (b) ábráinak grafikonjai lineáris összefüggést írnak le a megtett út és az eltelt idő között. A lineáris grafikonok egyenes sebességű mozgást írnak le, következésképpen a mozgások alatt a gyorsulás zérus. A gyorsulás mellett a tömegpont sebességének iránya is megállapítható a grafikonok meredekségéből: az 1. (a) ábrán pozitív meredeksége van a grafikonnak, tehát a tömegpont pozitív irányba mozog és sebessége pozitív, míg az 1. (b) ábra negatív meredekségű egyenest mutat, mely negatív irányba mozgó tömegpontot ír le negatív sebességgel. Az 1. (c) ábra grafikonja olyan mozgást ír le, mely során a tömegpont először pozitív irányba mozog, majd egy adott pillanatban visszafordul. A grafikon meredekségét elemezve az

egyes  $t$  időpillanatokban megállapítható, hogy kezdetben pozitív irányba mozgott a tömegpont, majd pedig visszafordult, a sebessége negatív lett. A tömegpont gyorsulása ezért negatív volt a mozgás során. Végül az 1. (d) ábra az előző megfontolások alapján egy pozitív irányba gyorsuló tömegpont mozgását írja le.

**1.9. Feladat:** (HN 2B-24) A 2. ábra egy egyenes úton nyugalomból induló motorkerékpáros sebesség-idő grafikonját mutatja.

- Mekkora a motorkerékpáros átlagos gyorsulása a  $t_0 = 0$  s és  $t = 6$  s időtartamban?
- Állapítsuk meg (közelítőleg), hogy mikor éri el a gyorsulás maximális értékét és mekkora a gyorsulás ebben a pillanatban?
- Mikor zérus a gyorsulás?
- Mikor veszi fel a gyorsulás legnagyobb negatív értékét és mekkora ez az érték?



2. ábra.

### Megoldás:

- (a) A  $[t_0, t]$  s időintervallumban a teljes sebességváltozás  $\Delta v = 8$  m/s. Az átlag gyorsulás ezért

$$a = \frac{\Delta v}{t - t_0}. \quad (1.9.1)$$

A számértékek behelyettesítése után  $a = 1.3$  m/s<sup>2</sup>.

- (b) A legnagyobb gyorsulást akkor éri el a motorkerékpáros, amikor a sebesség-idő grafikonban legnagyobb a mindenkor érintő meredeksége. a 2. ábra alapján ez  $t \approx 3$  s pillanatban következik be. Ekkor a motorkerékpáros gyorsulásának közelítő értékét az ábráról leolvasható értékek segítségével határozhatjuk meg. Az ábráról leolvasható adatok pontosságát a felrajzolt négyzetrács határozza meg. A gyorsulás meghatározásához szükséges sebességek értékét a szomszédos  $t_1 = 2$  s és  $t_2 = 4$  s időpillanatokban olvashatjuk le. A sebességek értékét a  $t \approx 3$  s pillanatban húzott érintő segítségével határozhatjuk meg:  $v_1 = 2$  m/s és  $v_2 = 6$  m/s. A maximális gyorsulás tehát:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.9.2)$$



Behelyettesítés az értékeket  $\bar{a} = 2 \text{ m/s}^2$  adódik.

(c) Mivel a motorkerékpáros gyorsulását a sebesség-idő grafikon pontjaiban húzott érintők meredeksége jelzi, a vízszintes érintőjű pontok a zérus gyorsulású pillanatoknak felelnek meg. A 2. ábra egyetlen olyan pontja melyben az érintő vízszintes, a  $t = 6 \text{ s}$  pillanathoz tartozik.

(d) A motorkerékpáros a legnagyobb negatív értékű gyorsulását a  $t = 8 \text{ s}$  pillanatban éri el, mivel ebben a pillanatban a legmeredekebb a grafikon érintője. Megszerkesztve a grafikon érintőjét a (b) feladatrészhez hasonlóan megállapítható gyorsulás közelítő értéke, mely  $\bar{a}_n \approx 2 \text{ m/s}^2$ -nak adódik.

**1.10. Feladat:** (HN 2B-26) Egy gépkocsi sebessége 9 s alatt 4 m/s-ról egyenletesen 7 m/s-ra növekszik.

- Mekkora a kocsí gyorsulása?
- Ezután az autó 12 s alatt egyenletesen lassulva megáll. Mekkora a gyorsulás ezen a szakaszon?
- Összesen mekkora utat tett meg a 21 s alatt az autó?
- Mekkora az átlagsebessége?

**Megoldás:** Legyenek  $t_1 = 9 \text{ s}$ ,  $v_1 = 4 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 7 \text{ m/s}$  és  $t_2 = 12 \text{ s}$ .

- (a) A mozgás első szakaszát leíró gyorsulás

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_1} = \frac{1}{3} \text{ m/s}^2. \quad (1.10.1)$$

- (b) A sebesség időbeli változása

$$v(t) = v_2 + a_2 t_2, \quad (1.10.2)$$

amellyel a megállás tényét is figyelembe véve a

$$0 = 7 + 12a_2 \quad (1.10.3)$$

egyenlet írható fel. A második szakasz gyorsulása tehát

$$a_2 = -\frac{7}{12} \text{ m/s}^2. \quad (1.10.4)$$

- (c) A megtett út az első szakaszra

$$x_1 = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 39,5 \text{ m}, \quad (1.10.5)$$

a másodikra

$$x_2 = v_2 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 42 \text{ m}, \quad (1.10.6)$$

így az összesen megtett út 81,5 m.

(d) Az átlagsebesség

$$\bar{v} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = 3,88 \text{ m/s}. \quad (1.10.7)$$

**1.11. Feladat:** (HN 2A-32) Függőlegesen felfelé hajítunk egy labdát 12 m/s sebességgel. Hol van, mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik

(a) 1 s és

(b) 2 s időpontban az elhajítás után?

Megoldás: A függőleges felfelé hajításra vonatkozó sebesség-idő és hely-idő összefüggések:

$$v(t) = v_0 - gt \quad (1.11.1)$$

és

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.11.2)$$

Behelyettesítés után:

(a)  $v(1 \text{ s}) = 2 \text{ m/s}$  felfelé (a pozitív előjel ezt mutatja);  $y(1 \text{ s}) = 7 \text{ m}$ ;

(b)  $v(1 \text{ s}) = -8 \text{ m/s}$  lefelé (a negatív előjel ezt mutatja);  $y(1 \text{ s}) = 4 \text{ m}$ .

**1.12. Feladat:** (HN 2B-33) 50 m mély kútba követ ejtünk. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva halljuk a kő csobbanását! A hang terjedési sebessége 330 m/s.

Megoldás: A  $h$  mélységű kút aljára

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (1.12.1)$$

idő alatt ér le a kő. A  $h$  utat a hang

$$t_2 = \frac{h}{c} \quad (1.12.2)$$

idő alatt teszi meg. Így összesen

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c} = 3,31 \text{ s} \quad (1.12.3)$$

idő múlva hallható a csobbanás.

**1.13. Feladat:** (HN 2B-35) Feldobunk egy érmét 4 m/s sebességgel. Mennyi idő alatt ér fel 0,5 m magasra. Miért kapunk két eredményt?

Megoldás: Az emelkedés út-idő függvénye:

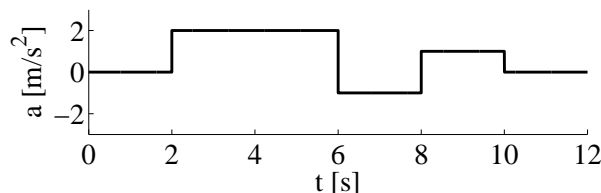
$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.13.1)$$

Az adatokat behelyettesítve a

$$0 = 5t^2 - 4t + 0,5 \quad (1.13.2)$$

másodfokú egyenlet adódik, amelynek megoldásai a  $t_1 = 0,155$  s és a  $t_2 = 0,644$  s. Azért van két megoldás mert az első időpont után még tovább emelkedik, s a lefele esésnél a második időpontban ugyancsak 0,5 m magasan lesz.

**1.14. Feladat:** (HN 2C-54) Egy, az origóból induló test a 3. ábra szerinti gyorsulással egyenesvonalú mozgást végez. Rajzoljuk meg a mozgás sebesség-idő és hely-idő függvényvénnyeket!



3. ábra.

Tüntessük fel a  $t = 2, 6, 8$  és  $10$  s időpontokhoz tartozó sebesség és helykoordináták értékét.

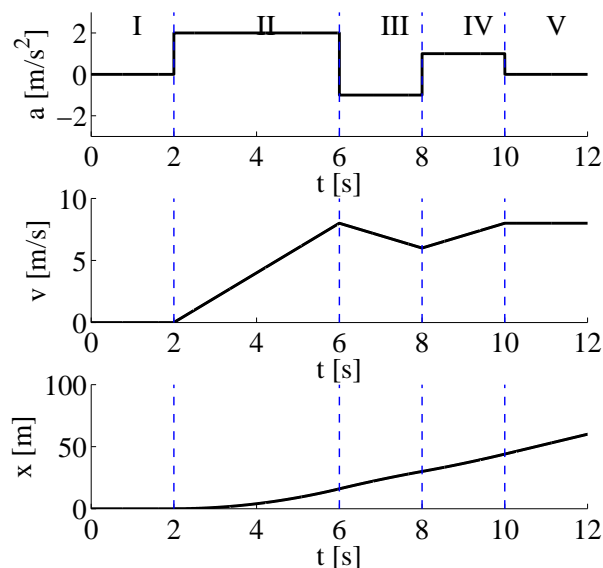
Megoldás: Egyenletesen gyorsuló mozgás esetében a gyorsulás, a sebesség és a megtett út az alábbi egyenletekkel adható meg:

$$a(t) \equiv a_0, \quad (1.14.1)$$

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0), \quad (1.14.2)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2, \quad (1.14.3)$$

ahol  $a_0$  a gyorsulás nagysága (a pozitív iránnyal ellentétesen gyorsuló mozgás esetében negatív),  $t_0$  a mozgás kezdeti időpontja,  $v_0$  a kezdősebesség,  $x_0$  pedig a tömegpont kezdeti koordinátája. A tömegpont mozgását bontsuk fel a 4. ábra alapján I,II,III,IV és V szakaszokra. Az egyes szakaszokban a  $v_0$  kezdősebesség,  $x_0$  koordináta és  $t_0$  időpont az előző szakasz végpontjában



4. ábra.

felvett értékekből határozhatóak meg. (A soron következő összefüggésekben a  $\{\xi\}$  jelölés a  $\xi$  fizikai mennyiség számértékét jelöli SI mértékegységekben.)

**I. szakasz:**  $0 < t < 2\text{s}$ . A kezdeti értékek:  $a_0 = 0 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 0 \text{ m}$ ,  $t_0 = 0 \text{ s}$ .

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig  $v(t) = 0 \text{ m/s}$  és  $x(t) = 0 \text{ m}$  adódik.

A  $t = 2 \text{ s}$  pillanatban a sebesség és kitérés értékei:  $v(2\text{s}) = 0 \text{ m/s}$  és  $x(2\text{s}) = 0 \text{ m}$ .

**II. szakasz:**  $2\text{s} < t < 6\text{s}$ . A kezdeti értékek:  $a_2 = 0 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 0 \text{ m}$ ,  $t_0 = 2 \text{ s}$ .

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig  $\{v(t)\} = 2(\{t\} - 2)$  és  $\{x(t)\} = (\{t\} - 2)^2$  adódik.

A  $t = 6 \text{ s}$  pillanatban a sebesség és kitérés értékei:  $v(6\text{s}) = 8 \text{ m/s}$  és  $x(6\text{s}) = 16 \text{ m}$ .

**III. szakasz:**  $6\text{s} < t < 8\text{s}$ . A kezdeti értékek:  $a_0 = -1 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 8 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 16 \text{ m}$ ,  $t_0 = 6 \text{ s}$ .

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig  $\{v(t)\} = 8 - (\{t\} - 6)$  és  $\{x(t)\} = 16 + 8(\{t\} - 6) - \frac{1}{2}(\{t\} - 6)^2$  adódik.

A  $t = 8 \text{ s}$  pillanatban a sebesség és kitérés értékei:  $v(8\text{s}) = 6 \text{ m/s}$  és  $x(8\text{s}) = 30 \text{ m}$ .

**IV. szakasz:**  $8\text{s} < t < 10\text{s}$ . A kezdeti értékek:  $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 6 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 30 \text{ m}$ ,  $t_0 = 8 \text{ s}$ .

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig  $\{v(t)\} = 6 + (\{t\} - 8)$  és  $\{x(t)\} = 30 + 6(\{t\} - 8) + \frac{1}{2}(\{t\} - 8)^2$  adódik.

A  $t = 10 \text{ s}$  pillanatban a sebesség és kitérés értékei:  $v(10\text{s}) = 8 \text{ m/s}$  és  $x(10\text{s}) = 44 \text{ m}$ .

**V. szakasz:**  $10\text{s} < t < 12\text{s}$ . A kezdeti értékek:  $a_0 = 0 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 8 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 44 \text{ m}$ ,  $t_0 = 10 \text{ s}$ .

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig  $\{v(t)\} = 8$  és  $\{x(t)\} = 44 + 8(\{t\} - 10)$  adódik.

A  $t = 12$  s pillanatban a sebesség és kitérés értékei:  $v(12s) = 8$  m/s és  $x(12s) = 60$  m.

**1.15. Feladat:** (HN 2C-66) Egy leejtett kődarab útjának a talajra érkezés előtti utolsó harmadát 1,0 s alatt teszi meg. Milyen magasról esett le a kő?

**Megoldás:** Jelölje  $h$  az ejtés magasságát,  $t$  a teljes esési időt és  $t_0 = 1$  s az utolsó harmadhoz tartozó időt. A szabadon eső tömegpont kinematikai összefüggései alapján:

$$h = \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.15.1)$$

Az út 2/3-át pedig  $t - t_0$  idő alatt teszi meg a kődarab:

$$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2. \quad (1.15.2)$$

A  $h$  változó eliminálásával  $t$ -re az alábbi másodfokú egyenlet adódik

$$0 = \frac{1}{6}gt^2 - gtt_0 + \frac{1}{2}gt_0^2. \quad (1.15.3)$$

A másodfokú egyenlet két megoldása  $t_1 = 5,45$  s, valamint  $t_2 = 0,55$  s. A második megoldás fizikailag nem értelmes, mivel  $t_2 < t_0$ . A  $t_1$  megoldáshoz tartozó magasság:

$$h = 148,51 \text{ m}. \quad (1.15.4)$$

**1.16. Feladat:** \* (HN 2B-40) Az  $x$  tengelyen mozgó részecske sebesség-idő függvényét a  $v(t) = 4 + 2t - 3t^2$  függvény adja meg. A  $t = 0$  időpillanatban a részecske az  $x = 8$  m helyen van.

- Mi az egyes együtthatók mértékegysége?
- Határozzuk meg a mozgás gyorsulás-idő függvényét!
- Határozzuk meg a mozgás hely-idő függvényét!
- Mekkora a részecske legnagyobb  $+x$  irányú sebessége?

**Megoldás:**

(a)  $A = 4$  m/s,  $B = 2$  m/s<sup>2</sup>,  $C = 3$  m/s<sup>3</sup>:  $v(t) = A + Bt - Ct^2$ .

(b) A gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, azaz

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = B - 2Ct = 2 - 6t. \quad (1.16.1)$$

(c) A kezdeti  $t = 0$  s időpillanatban a részecske koordinátája  $x = 8$  m. A hely-idő függvény a sebesség idő szerinti integrálásával kapható meg a kezdeti feltételek illesztése mellett. Ezt a

$$dx = v dt \quad (1.16.2)$$

összefüggésből kiindulva a

$$\int_{x_0}^x dx = x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^t (A + Bt - Ct^2) dt \quad (1.16.3)$$

határozott integrál kiszámolásával kaphatjuk. Ennek eredménye

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^t (A + Bt - Ct^2) dt = \left[ At + \frac{1}{2} Bt^2 - \frac{1}{3} Ct^3 \right]_{t_0=0}^t, \quad (1.16.4)$$

ahonnan a hely

$$x(t) = x_0 + At + \frac{1}{2} Bt^2 - \frac{1}{3} Ct^3 = 8 + 4t + t^2 - t^3. \quad (1.16.5)$$

(d) A sebesség akkor a legnagyobb, amikor a gyorsulás zérus. Ez a  $t = 1/3$  s időpillanatban következik be. A sebesség értéke ekkor  $v = 4,33$  m/s.

**1.17. Feladat:** \* (HN 2B-41) Az  $x$  tengelyen mozgó részecske helyzetét az  $x(t) = a + bt - ct^2$  függvény adja meg. Az együtthatók számértéke SI egységekben:  $\{a\} = 2$ ,  $\{b\} = 3$ ,  $\{c\} = 4$ ,

- Adjuk meg az egyes együtthatók dimenzióját!
- Határozzuk meg a sebesség-idő függvényt!
- Határozzuk meg a gyorsulás-idő függvényt!
- Határozzuk meg a részecske maximális  $x$  irányú elmozdulását és az ehhez tartozó időpontot is!

Megoldás:

(a) Az egyes együtthatók dimenziója:  $[a] = \text{m}$ ;  $[b] = \text{m/s}$ ;  $[c] = \text{m/s}^2$

(b) A sebességet a hely idő szerinti deriváltjaként határozhatjuk meg:

$$\{v(t)\} = \frac{d\{x\}}{dt} = 3 - 8t. \quad (1.17.1)$$

(c) A gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltjával egyenlő:

$$\{a(t)\} = \frac{d\{v\}}{dt} = -8. \quad (1.17.2)$$

(d) A maximális elmozdulás pillanatában a test sebessége zérus ( $\{v(t)\} = 0$ ), ami a

$$t = \frac{3}{8} \text{ s}, \quad (1.17.3)$$

pillanatban következik be. A maximális elmozdulás pedig

$$x = \frac{51}{16} \text{ m}. \quad (1.17.4)$$

## Tömegpontok síkbeli mozgása

**1.18. Feladat:** \* Jelölje egy folyó partját az  $x$  tengely. A víz a parttal párhuzamosan folyik, az  $x$  irányú sebesség a parttól való távolság függvénye, amely a  $v_x(y) = ky$  lineáris összefüggéssel adható meg, ahol  $0 < k$ ,  $y$  pedig a parttól mért távolság. (A túloldali part sokkal távolabb van, mint a távolság, melyen a sodrási sebességet leíró lineáris összefüggés érvényes.) A parton lévő úszó a parttól  $d$  távolságra lévő stéghez szeretne úszni.

(a) Mekkora távolsággal előbb kell a vízbe mennie, ha a folyásirányra merőlegesen állandó  $u$  sebességgel fog úszni?

(b) Milyen a lesz a pályagörbe alakja?

### Megoldás:

(a) Az úszó a parttól az idő függvényében

$$y(t) = ut \quad (1.18.1)$$

távolságra jut. Közben az  $x$  irányú sebessége is folyamatosan változik a

$$v_x(t) = ky = kut \quad (1.18.2)$$

összefüggésnek megfelelően. A mozgás  $x$  irányú vetülete lényegében egy állandó gyorsulású mozgással azonosítható, ahol a gyorsulás  $a_x = ku$ :

$$x = \frac{1}{2} a_x t_s^2. \quad (1.18.3)$$

A sodródás ideje

$$t_s = \frac{d}{u}, \quad (1.18.4)$$

így meghatározható az a távolság is, amellyel az úszónak előrébb kell a vízbe mennie:

$$x = \frac{1}{2} a_x t_s^2 = \frac{1}{2} kut_s^2 = \frac{1}{2} \frac{kd^2}{u}. \quad (1.18.5)$$

(b) A pályagörbe meghatározásához válasszunk olyan koordinátarendszert, hogy a stég a

$$\left[ \frac{1}{2} \frac{kd^2}{u}; d \right] \quad (1.18.6)$$

koordinátájú pontban legyen. Ekkor az origóból indulva éppen ehhez a ponthoz jut. Az (1.18.1) és (1.18.1) egyenletekből küszöböljük ki a  $t$  változót. Ekkor a pályagörbére az

$$y(x)^2 - \frac{2ux}{k} = 0 \quad (1.18.7)$$

összefüggést kapjuk, ami egy parabola egyenlete.

**1.19. Feladat:** Egy repülőgép 360 km/h sebességgel vízszintesen repül. A repülőgépből egy-egy pisztollyal felfelé és lefelé lőnek azonos pontból. Milyen messze van egymástól a két lövedék  $t = 0,8$  s múlva? Mindegyik lövedék kezdeti sebessége a repülőgéphez képest  $v_0 = 160$  m/s. (A közegellenállás elhanyagolható.)

**Megoldás:** Vízszintesen mindkét lövedék 360 km/h sebességgel halad, így ez nem befolyásolja a kettejük távolságát. A függőleges irányban mindkettőnek  $-g$  gyorsulása van, az egyiknek  $+v_0$ , a másiknak  $-v_0$  a kezdősebessége. Mivel mindkét lövedék ugyanazzal a gyorsulással esik, a távoldásukat a kezdősebességük határozzák meg. A két lövedék közötti távolság tehát

$$d = \left( v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) - \left( -v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) = 2v_0 t = 256 \text{ m.} \quad (1.19.1)$$

**1.20. Feladat:** (HN: 3B-21) Egy 25 m magas hídról vízszintes irányban hajítunk el egy követ. A kő becsapódási helyét  $45^\circ$ -os irányban látjuk.

- (a) Mekkora sebességgel hajítottuk el a követ?  
 (b) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódott a kő a vízbe?

**Megoldás:**

(a) A feladat feltétele szerint a kő becsapódási helyét a vízszinteshez képest lefelé  $45^\circ$ -os szög alatt látjuk. Ennek alapján a kő ugyanakkora távolságot tett meg vízszintesen mint függőleges irányban. Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját az eldobás pontjába. Ekkor becsapódás koordinátái:  $[x_0, H] = [25; -25]$  m. A  $v_0$  sebességgel elhajított kő mozgását leíró kinematikai egyenletek pedig

$$x(t) = v_0 t \quad (1.20.1)$$



és

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (1.20.2)$$

A becsapódás pillanatában:

$$x_0 = v_0 t \quad (1.20.3)$$

és

$$H = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (1.20.4)$$

Az két egyenletből a hajítás idejére  $t = 2,24$  s, az eldobás sebességére pedig  $v_0 = 11,18$  m/s adódik.

(b) Az eldobott kő mindenkori sebességének komponensei

$$v_x(t) = v_0 \quad (1.20.5)$$

és

$$v_y(t) = -gt. \quad (1.20.6)$$

A  $t = 2,2$  s repülési időt behelyettesítve a sebesség vektora  $\mathbf{v} = [11,18; 22,36]$  m/s-nak adódik.

A becsapódás  $\alpha$  szöge a sebességkomponensek segítségével meghatározható a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = 2 \quad (1.20.7)$$

egyenlet segítségével, amiből  $\alpha = 63,44^\circ$  adódik.

**1.21. Feladat:** Egy  $h = 35$ m magas torony tetejéről, a vízszinteshez képest  $\alpha = 25^\circ$ -os szög alatt ferdén felfelé egy labdát hajítunk el  $v_0 = 80$  m/s kezdősebességgel.

- Határozzuk meg a földetérésig eltelt időt!
- Határozzuk meg a labda földetérési helyének távolságát a toronytól!
- Határozzuk meg a labda becsapódási sebességének nagyságát és irányát!

### Megoldás:

(a) Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját a torony lábához. A labda  $x$  és  $y$  koordinátái az idő függvényében ekkor az

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha \quad (1.21.1)$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 + h \quad (1.21.2)$$

összefüggésekkel adhatóak meg. A repülés teljes ideje a

$$0 = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt_0^2 + h \quad (1.21.3)$$

egyenletből határozható meg. A másodfokú egyenlet fizikailag értelmes megoldása

$$t_0 = 7,67 \text{ s.} \quad (1.21.4)$$

(b) A repülési időt behelyettesítve az (1.21.1) egyenletbe megkapjuk a becsapódás távolságát, ami

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos \alpha. \quad (1.21.5)$$

Behelyettesítve az értékeket  $d \approx 556,1 \text{ m}$  adódik.

(c) A becsapódás pillanatában sebességvektor komponensei

$$v_x(t_0) = v_0 \cos \alpha \approx 72,5 \text{ m/s} \quad (1.21.6)$$

és

$$v_y(t_0) = v_0 \sin \alpha - gt_0 \approx -42,9 \text{ m/s.} \quad (1.21.7)$$

A sebesség nagysága pedig az egyes komponensek segítségével számolható ki a  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  összefüggéssel. Behelyettesítve a számadatokat  $v \approx 84,2 \text{ m/s}$  adódik. A becsapódás szöge pedig

$$\beta = \arctg \frac{v_y}{v_x} = -30,61^\circ. \quad (1.21.8)$$

**1.22. Feladat:** A talajról a vízszintessel  $\alpha = 30^\circ$ -os szöget bezáró szögben  $v_0 = 50 \text{ m/s}$  nagyságú kezdősebességgel kilövünk egy lövedéket. A lövedék a szemközt lévő függőleges falba csapódik. Milyen magasan van a becsapódás helye, ha a fal  $d = 80 \text{ m}$  távolságra van a kilövés helyétől?

**Megoldás:** A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes és függőleges komponensei a

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (1.22.1)$$

és

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (1.22.2)$$

összefüggésekkel adhatóak meg. Helyezzük koordináta-rendszer kezdőpontját a kilövés pontjába. Ekkor a lövedék koordinátái az idő függvényében

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t \quad (1.22.3)$$

és

$$y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.22.4)$$

A lövedék repülésének időtartama a

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos \alpha, \quad (1.22.5)$$

egyenlettel határozható meg. Az emelkedési magasság pedig

$$h = y(t_0) = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_0^2. \quad (1.22.6)$$

Az (1.22.5) egyenletből a

$$t = \frac{d}{v_0 \cos \alpha} \quad (1.22.7)$$

repülési időt kifejezve és behelyettesítve az (1.22.6) egyenletbe  $h \approx 29,14$  m emelkedési magasság adódik.

**1.23. Feladat:** (HN: 3C-29) A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg egy a vízszintes síkhoz képest  $\theta$  szög alatt,  $v_0$  kezdősebességgel kilőtt lövedék röppályájának egyenletét és az  $R$  lőtávolságot!

**Megoldás:** Az elhajított test gyorsulásvektora  $\mathbf{a} = (0; -g)$ , a  $t = 0$  kezdőpillanathoz tartozó sebesség vektora pedig  $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \theta; v_0 \sin \theta)$ . A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes komponense

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta, \quad (1.23.1)$$

míg a függőleges komponense

$$v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt. \quad (1.23.2)$$

A koordináta-rendszer kezdőpontját a hajítás pontjába választva, az eldobott test  $\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t))$  helyvektorának komponensei

$$x(t) = v_0 t \cos \theta, \quad (1.23.3)$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.23.4)$$

A pálya általános egyenletét megkapjuk, ha a fenti két egyenletből (melyeket a röppálya paraméteres egyenleteinek is nevezhetünk) kiküszöböljük a  $t$  paramétert. Ekkor a röppálya általános egyenlete:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.23.5)$$

Az 1.23.5 egy száraival lefelé álló parabolát ír le, amely átmege az origón. A lőtávolságnak megfelelő  $x = R$  koordinátában az  $y$  emelkedési magasság zérus, vagyis a lőtávolságot az  $y(x = R) = 0$  egyenlet megoldásával kaphatjuk meg:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \quad (1.23.6)$$

**1.24. Feladat:** (HN: 3C-30) A ferde hajítás röppálya egyenletének differenciálásával mutassuk meg, hogy a maximális lőtávolságot  $\theta = 45^\circ$  kilövési szög esetén érjük el!

**Megoldás:** A hajítási távolság mint a  $\theta$  kilövési szög függvénye az (1.23.6) egyenlettel adott. A függvénynek szélsőértéke van, ha az elsőrendű derivált nulla, azaz

$$\frac{dR}{d\theta} = 0. \quad (1.24.1)$$

A differenciálás műveletét elvégezve:

$$0 = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta. \quad (1.24.2)$$

Az egyenletet megoldva, a hajítási szögre  $\theta = 45^\circ$  adódik. Egy függvény szélsőértéke azonban a lokális maximum mellett jelenthet lokális minimumot is. Ahhoz, hogy biztosan állíthassuk, hogy egy függvény szélsőértéke lokális maximumnak felel meg, meg kell vizsgálnunk a függvény másodrendű deriváltját is a kérdéses pontban.

$$\frac{d^2R}{d\theta^2} = -4 \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \quad (1.24.3)$$

A másodrendű derivált a  $\theta = 45^\circ$  helyettesítési értékben negatív, ezért a talált szélsőérték valóban egy lokális (esetünkben globális) maximumot találtunk.

**1.25. Feladat:** (HN: 3C-32) Határozzuk meg, hogy milyen  $\theta$  kilövési szög esetén lesz egy lövedék  $D$  lőtávolsága egyenlő a  $H$  emelkedési magassággal?

**Megoldás:** A lövedék  $y(x)$  röppályája az (1.23.5) egyenlettel adható meg, a hajítás távolságát pedig az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg egy korábbi feladatban. Az emelkedés  $H$  magasságát a  $H = y(\frac{D}{2})$  összefüggés adja meg, azaz

$$H = \frac{D}{2} \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{4v_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.25.1)$$

A feladat szövegének megfelelően a  $D = H$  feltételből a

$$\cos \theta = \frac{1}{4} \sin \theta \quad (1.25.2)$$

trigonometriai egyenlet adódik. Ennek fizikailag értelmes megoldása:

$$\theta = 76^\circ. \quad (1.25.3)$$

**1.26. Feladat:** (HN: 3C-38) Egy szöcske vízszintes irányban legfeljebb  $R_{max} = 1$  m távolságra tud elugrani. Feltételezve, hogy az elugráshoz szükséges idő elhanyagolható, határozzuk meg, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel halad a szöcske, ha mindig a maximális távolságra ugrik!

**Megoldás:** A vízszintes hajítás  $R$  távolságát egy korábbi feladatban az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg. A hajítási távolság a maximális értékét (a röppálya szimmetria-tulajdonságai miatt) a  $\theta = 45^\circ$  hajítási szög mellett veszi fel:

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (1.26.1)$$

Ebből az ugrás sebessége

$$v_0 = \sqrt{R_{max}g}. \quad (1.26.2)$$

A szöcske vízszintes haladási sebességét a  $v_0$  sebesség vízszintes komponense adja meg. Mivel a hajítási szög  $\theta = 45^\circ$ , így

$$v_x = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{R_{max}g}{2}} \quad (1.26.3)$$

adódik.

**1.27. Feladat:** (HN 3C-39) Egy lövedéket  $\theta$  kilövési szöggel lövünk ki. Határozzuk meg, hogy a lövedék röppályájának tetőpontja mekkora  $\varphi$  szög alatt látszik a kilövési pontból!

**Megoldás:** A korábbi feladatok megoldásaiból tekintsük a hajítási röppálya (1.23.5 egyenletét és az (1.23.6) egyenlettel adott hajítási távolságot). A pálya szimmetria-tulajdonságai miatt a röppálya tetőpontjának  $x$  koordinátája

$$x = \frac{D}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta. \quad (1.27.1)$$

Az ehhez tartozó  $y = H$  emelkedési magasság pedig

$$H = y \left( \frac{D}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \theta. \quad (1.27.2)$$

Az (1.27.1) és (1.27.2) egyenletek segítségével

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta \quad (1.27.3)$$

adódik a keresett szögre.

**1.28. Feladat:** \*\* A falhoz támasztott  $L$  hosszúságú létra földdel érintkező  $P$  pontját  $v_0$  állandó sebességgel mozgatjuk az  $x$  tengely mentés, pozitív irányban. Az  $xy$  sík merőleges a falra, az  $x$  koordináta pedig a faltól mért távolságot méri. A  $P$  pont a  $t = 0$  időpillanatban legyen az  $x_0$  koordinátájú helyen.

- (a) Adjuk meg a létra felső  $A$  pontjának sebességét és  
 (b) gyorsulását az idő függvényében!

Megoldás:

(a) Az alsó pont helye az idő függvényében:  $x_P(t) = v_0 t + x_0$ . Ha az  $A$  pont nem válik el a faltól, az  $A$  pont  $y_A(t)$  koordinátája és a  $P$  pont vízszintes  $x_P(t)$  koordinátája között az alábbi összefüggés érvényes:

$$x_P^2(t) + y_A^2(t) = L^2, \quad (1.28.1)$$

ahonnan  $y_A(t) = \sqrt{L^2 - x_P^2(t)}$  adja meg a legfelső pont talajtól mért távolságát. Az  $A$  pont sebességét az (1.28.1) egyenletet idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$x_P(t)x_P'(t) + y_A(t)y_A'(t) = 0 \quad (1.28.2)$$

Az egyenletben az  $A$  pont sebessége  $v_A(t) = y_A'(t)$  a  $P$  pont sebessége pedig  $v_P(t) = x_P'(t) \equiv v_0$ . A felső pont sebessége tehát

$$v_A(t) = y_A'(t) = -\frac{x_P(t)x_P'(t)}{y_A(t)} = -\frac{(v_0 t + x_0)v_0}{\sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2}}. \quad (1.28.3)$$

*Megjegyzés:* Az  $y(t) = \sqrt{L^2 - x^2(t)}$  függvény explicit idő szerinti deriválásával hasonlóan a fenti végeredményhez juthatunk.

(b) Az  $A$  pont gyorsulását az

$$a_P(t) = \frac{d}{dt} v_y(t) = -\frac{v_0^2 \sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2} + \frac{(v_0 t + x_0)^2 v_0^2}{\sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2}}}{L^2 - (v_0 t + x_0)^2} \quad (1.28.4)$$

összefüggéssel számolhatjuk ki.

**1.29. Feladat:** \*\* Egy kétágú létra egyik szárának alsó pontját (az origóban) rögzítjük, a másik szár alsó pontját pedig állandó  $v_0$  sebességgel vízszintesen mozgatjuk az  $x$  tengely mentén, pozitív irányba. Ennek következtében a létra szétnyílik. A mozgó alsó  $P$  pont a  $t = 0$  időpillanatban legyen az  $x_0$  koordinátájú helyen. Mekkora a létra felső  $A$  pontjának  $\mathbf{v}_A$  sebessége az idő függvényében? A létra szárai  $L$  hosszúságúak.

**Megoldás:** A  $P$  pont  $x$  koordinátája az idő függvényében:  $x_P(t) = v_0 t + x_0$ . A létra szimmetria-tulajdonságai miatt az  $A$  pont mozgásának  $x$  irányú vetülete  $v_0/2$  sebességű mozgással írható le:

$$x_A(t) = \frac{1}{2}(v_0 t + x_0). \quad (1.29.1)$$

Mivel a létra baloldali szára nem nyúlik meg:

$$x_A^2(t) + y_A^2(t) = L^2 \quad (1.29.2)$$

ahol  $y(t) = \sqrt{L^2 - x_f^2(t)}$  a felső pont talajtól való távolsága. Az (1.29.2) egyenletet idő szerint deriválva kapjuk a

$$x_A(t)x_A'(t) + y_A(t)y_A'(t) = 0 \quad (1.29.3)$$

egyenletet, ahol az  $A$  pont  $x$  irányú sebessége  $v_x(t) = x_A'(t) = v_0/2$ , valamint az  $y$  irányú sebessége

$$v_y(t) = y_A'(t) = -\frac{x_A(t)x_A'(t)}{y_A(t)} = -\frac{\frac{1}{4}(v_0 t + x_0)v_0}{\sqrt{L^2 - \frac{1}{4}(v_0 t + x_0)^2}}. \quad (1.29.4)$$

**1.30. Feladat:** \*\* Egy  $2l$  szélességű folyó az  $x$  tengely mentén helyezkedik el úgy, hogy az  $x$  tengely a folyó geometriai középvonala. A folyó sebességprofilja a partvonalra merőleges  $y$  koordináta függvényében

$$V(y) = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right). \quad (1.30.1)$$

Az koordináta-rendszer origójából (a folyó közepéről) a partra merőleges irányban, állandó  $u$  sebességgel kezd el úszni egy ember.

- Mekkora távolsággal sodródik le az úszó a folyó mentén?
- Milyen az úszó mozgásának pályagörbéje?

**Megoldás:**

(a) Az úszó  $y$  koordinátája az idő függvényében

$$y = ut, \quad (1.30.2)$$

így az  $x$  tengely irányú sebesség az idő függvényében

$$v_x(t) = V(y(t)) = v_0 \left(1 - \frac{u^2 t^2}{l^2}\right) \quad (1.30.3)$$

összefüggéssel adható meg. A part eléréséhez  $t_0 = l/u$  idő szükséges. Az  $x$  tengely irányú  $d$  elmozdulás az  $x$  irányú sebességkomponens integrálásával kapjuk meg:

$$x(t) = \int_0^t v_x(t') dt' = \int_0^t v_0 \left(1 - \frac{u^2 t'^2}{l^2}\right) dt' = \left[ v_0 t' - \frac{1}{3} v_0 \frac{u^2 t'^3}{l^2} \right]_0^t = v_0 t' - \frac{1}{3} v_0 \frac{u^2 t'^3}{l^2}. \quad (1.30.4)$$

A partra úszás alatt az úszó  $d = x(t_0)$  távolsággal sodródik le a folyó mentén. Rövid számolással

$$d = \frac{2}{3} \frac{lv_0}{u} \quad (1.30.5)$$

adódik.

(b) Az úszó pályájának paraméteres egyenletét az (1.30.2) és (1.30.4) egyenletek adják meg. A pályagörbe általános egyenletét a  $t$  paraméter kiküszöbölésével határozhatjuk meg.

$$x(y) = v_0 \frac{y}{u} - \frac{1}{3} v_0 \frac{y^3}{ul^2} \quad (1.30.6)$$

\* *Megjegyzés:* Általános esetben egy görbe egyenlete  $f(x, y) = 0$  implicit formában adható meg.

**1.31. Feladat:** Egy kocszi vízszintes pályán  $v = 30$  m/s állandó sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A mozgó kocsiról egy lövedéket lőnek ki úgy, hogy miután a kocszi  $s = 80$  m-t megtett, a lövedék visszaesik a kocsira.

(a) Mennyi a repülési idő?

(b) A kocsrhoz képest mekkora relatív sebességgel és a vízszinteshez képest mekkora szög alatt kellett a lövedéket kilőni?

Megoldás:

(a) A lövedék repülési ideje

$$t_0 = \frac{s}{v}. \quad (1.31.1)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $t_0 \approx 2,67$  s adódik.

(b) A lövedéknek a kocsrhoz képest csak függőleges irányú sebessége lehetett. Mivel  $t_0$  idő múltán ismét a kocsira esett vissza a lövedék,  $t_0$  idő elteltével a lövedék  $y$  koordinátája nulla lesz:

$$y(t_0) = 0 = v_y t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2. \quad (1.31.2)$$

Ebből a lövedék sebességének függőleges komponense:

$$v_y = \frac{1}{2} g t_0. \quad (1.31.3)$$

adódik. Behelyettesítve a számadatokat  $v_y = 13,3$  m/s adódik.

**1.32. Feladat:** Egy lövedéket  $v = 330$  m/s vízszintes irányú kezdősebességgel egy  $h = 80$  m magas szikla tetejéről lőnek ki.



- (a) Mennyi ideig tart, amíg a lövedék a Föld felszínére érkezik?  
 (b) A szikla aljától mekkora távolságban érkezik a Földre?  
 (c) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódik a talajba?

**Megoldás:**

- (a) A lövedék függőleges irányban egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A repülés ideje

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1.32.1)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $t_0 \approx 4$  s adódik.

- (b) A lövedék a szikla aljától

$$x = vt_0 \quad (1.32.2)$$

távolságban érkezik a Földre. Behelyettesítve a számadatokat  $x \approx 132$  m adódik.

- (c) A becsapódás pillanatában a sebességkomponensek  $v_x = 330$  m/s, valamint  $v_y = gt_0 = 40$  m/s. Így a sebesség nagysága

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 332,4 \text{ m/s}, \quad (1.32.3)$$

míg a becsapódás szöge

$$\alpha = \arctg \frac{v_y}{v_x} \approx 6,9^\circ. \quad (1.32.4)$$

## 2. Feladatok körmozgás tárgyköréből

### Kerületi sebesség

**2.1. Feladat:** (HN 11C-14) Egy kerék a vízszintes talajon csúszás nélkül  $v = 6$  m/s sebességgel gördül. Határozzuk meg a kerületén lévő részecske talajhoz viszonyított pillanatnyi sebességét, mikor a részecske a kerék elülső pontjában van!

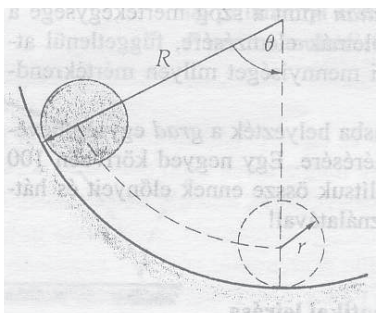
**Megoldás:** A haladó mozgásból eredően a kerék minden egyes pontja rendelkezik  $v_x = 6$  m/s vízszintes irányú haladómozgással. Ugyanakkor a kerületi pontok ugyancsak  $v_k = 6$  m/s sebességgel mozognak a kerék középpontja körül. Az elülső pont kerületi sebességének iránya lefelé mutat, azaz  $v_y = -6$  m/s. A részecske pillanatnyi sebességvektora tehát

$$\mathbf{v} = (v_x; v_y) = (6; -6) \text{ m/s}. \quad (2.1.1)$$

*Megjegyzés:* A tiszta gördülés feltétele, hogy a kerék legalsó pontja ne mozogjon a talajhoz képest. A legalsó pont kerületi sebessége épp ellentétes irányú, de azonos nagyságú, mint a

kerék haladó mozgásából származó sebessége. A két mozgás „összegének” eredménye, hogy a kerék legalsó pontjának sebessége zérus a talajhoz képest.

**2.2. Feladat:** (HN 11C-15) Egy  $r$  sugarú henger csúszás nélkül gördül egy függőleges síkban lévő  $R$  sugarú körpályáján az 5. ábra szerint. Mutassuk meg, hogy a henger saját tengelye körüli  $\delta$  elfordulási szöge és a henger tengelyének  $\theta$  szögelfordulása között fennáll, hogy  $\delta = (R-r)\theta/r!$



5. ábra.

**Megoldás:** Az  $r$  sugarú henger középponja által sűrt  $s$  ív hosszúságát kétféle módon határozhatjuk meg. Egyrészt a  $\theta$  szöget felhasználva

$$s = (R-r)\theta, \quad (2.2.1)$$

adódik, másrészt a  $\delta$  szög- segítségével

$$s = r\delta. \quad (2.2.2)$$

A két egyenletből

$$\delta = \frac{(R-r)\theta}{r}, \quad (2.2.3)$$

adódik, ami éppen a feladat állítása.

## Szöggyorsulás

**2.3. Feladat:** Egy  $R = 30$  cm sugarú kerékre szíjat csévélünk. Míg a kerék  $f = 2,0$  1/s-os fordulatszámról egyenletesen lassulva leáll,  $s = 25$  m szíj tekeredik le róla.

- A folyamat alatt hány fordulatot tesz mega kerék?
- Mekkora a kerék szöggyorsulása?

**Megoldás:** Legyen a kezdeti szögsebesség  $\omega_0 = 2\pi f \approx 12,56$  rad/s.

(a) A fordulatok  $N$  száma az

$$N = \frac{s}{2R\pi} \quad (2.3.1)$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat  $N \approx 13,26$  adódik.

(b) Az  $N$  fordulat megtétele alatt a kerék

$$\varphi_0 = 41,67 \text{ rad} \quad (2.3.2)$$

szöget fordul el. A forgásra vonatkozó kinematikai egyenletek segítségével felírhatjuk a mindenkori

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \quad (2.3.3)$$

szögsebességet és az elfordulás

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \quad (2.3.4)$$

szögét. A megállás pillanatában  $\omega(t) = 0$ , ekkor  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  rad. A

$$0 = \omega_0 + \beta t \quad (2.3.5)$$

és a

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \quad (2.3.6)$$

egyenletrendszert megoldva a  $\beta$  és  $t$  ismeretlenekre, megkaphatjuk a szöggyorsulás értékét:

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\varphi} \approx -1,89 \text{ rad/s}^2. \quad (2.3.7)$$

**2.4. Feladat:** Egy autó egyenletesen gyorsulva álló helyzetből 15 m/s-os sebességre tesz szert 20 s alatt.

(a) Mekkora a kerék szöggyorsulása, ha egy kerekének sugara 1/3 m és tisztán gördül a gyorsulás alatt?

(b) Hány fordulatot tett meg a kerék a folyamat alatt?

**Megoldás:**

(a) Az autó gyorsulása

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0,75 \text{ m/s}^2. \quad (2.4.1)$$

Mivel  $a = R\beta$  (a kerék tisztán gördül), a szöggyorsulás értéke

$$\beta = 2,25 \text{ rad/s}^2. \quad (2.4.2)$$

(b) A szögelfordulás nagysága pedig

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2 = 450 \text{ rad}, \quad (2.4.3)$$

amelyből a megett fordulatok száma

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = 71,6. \quad (2.4.4)$$

## Centripetális és tangenciális gyorsulások

**2.5. Feladat:** (HN: 4C-25) Egy versenyautó  $v_0 = 210 \text{ km/h}$  sebességgel mozog a  $s = 2 \text{ km}$  kerületű körpályán, majd egy teljes kört megtéve egyenletesen lassítva megáll.

- Mekkora az autó tangenciális gyorsulása?
- Mekkora a centripetális gyorsulás  $d = 1 \text{ km}$ -rel a megállás előtt?
- Mekkora ebben a pillanatban az eredő gyorsulás?

### Megoldás:

(a) Az egyenletes kerületi ( $a_t$  tangenciális) gyorsulás hatására a versenyautó

$$t_0 = \frac{v_0}{|a_t|} \quad (2.5.1)$$

idő alatt áll meg. Ez alatt az idő alatt a versenyautó

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2}|a_t|t_0^2 = \frac{v_0^2}{2|a_t|}, \quad (2.5.2)$$

utat tesz meg. A mozgás során az autó gyorsulása ezért:

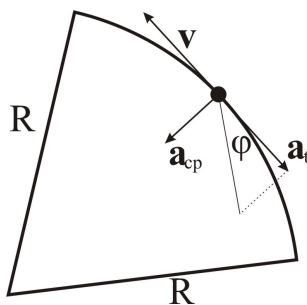
$$|a_t| = \frac{v_0^2}{2s} \approx 0,85 \text{ m/s}^2. \quad (2.5.3)$$

Mivel az autó sebessége 0-ra csökken a mozgás során, a megszokott konvenciókkal  $a_t \approx -0,85 \text{ m/s}^2$ .

(b) Abban a pillanatban, amikor az autónak még  $d$  távolságot kell megtennie a megállásig, a hátralévő út megtételéhez még további

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d}{|a_t|}}, \quad (2.5.4)$$

idő szükséges. A megálláshoz szükséges időt úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbb módon, ha a lassulás folyamatát időben visszafelé tekintjük. Ekkor egy álló helyzetből,  $-a_t$  gyorsulással



6. ábra.

mozgó autó mozgását követjük nyomon. A  $d$  távolság megtételéig éppen  $t_0$  idő szükséges. A versenayutó sebességét is hasonló gondolatmenettel számolhatjuk ki ebben a pillanatban:

$$v = |a_t|t_0 \approx 41,3 \text{ m/s}. \quad (2.5.5)$$

Ebben a pillanatban a centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{2\pi v^2}{d} \approx 5,36 \text{ m/s}^2. \quad (2.5.6)$$

(c) Az eredő gyorsulás pedig

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} \approx 5,43 \text{ m/s}^2. \quad (2.5.7)$$

**2.6. Feladat:** (HN: 4C-26) Egy  $R = 300$  m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó  $a_t = -1,2$   $\text{m/s}^2$  gyorsulással fékezni kezd. Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége  $v = 15$   $\text{m/s}$ . Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére!

Megoldás: A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \approx 0,75 \text{ m/s}^2. \quad (2.6.1)$$

Az autó  $a_t$  gyorsulása a tangenciális gyorsulás, iránya pedig a  $v$  sebességgel ellentétes. A tangenciális és centripetális gyorsulás egymásra merőlegesek. Az eredő gyorsulás érintő irányával bezárt  $\varphi$  szögére érvényes (lásd a 6. ábrát), hogy

$$\text{tg } \varphi = \left| \frac{a_t}{a_{cp}} \right| = 1,6. \quad (2.6.2)$$

Így az eredő gyorsulás  $\varphi = 58^\circ$  szöget zár be az érintővel, nagysága pedig  $|a| = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} \approx 2 \text{ m/s}^2$ .

**2.7. Feladat:** (HN: 4C-27) A fonálra kötött labdát  $R = 0,3$  m sugarú, a talaj felett  $h = 1,2$  m magasban levő, vízszintes síkú körpályán állandó sebességgel pörgetünk. A fonal hirtelen elszakad és a labda attól a ponttól  $s = 2$  m távolságban ér talajt, amelyet úgy kapunk, hogy az elszakadás pillanatában elfoglalt helyzetét függőlegesen a talajra vetítjük. Mekkora volt a labda centripetális gyorsulása, amíg körmozgást végzett?

**Megoldás:** A köté elszakadásának pillanatában a labda vízszintes irányú sebessége  $v = R\omega$ , ahol  $\omega$  a körmozgás körfrekvenciája. A fonál elszakadása után a labda  $s$  m utat tesz meg

$$t_0 = \frac{s}{R\omega} \quad (2.7.1)$$

idő alatt. Másrészt a labda függőleges irányban  $h$  m magasságból szabadon esik, ezért

$$h = \frac{1}{2}gt_0^2 = \frac{gs^2}{2\omega^2R^2}. \quad (2.7.2)$$

A fonál elszakadásáig körmozgás körfrekvenciája tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{gs^2}{2hR^2}} \quad (2.7.3)$$

volt. Ebből a centripetális gyorsulás könnyen meghatározható:

$$a_{cp} = R\omega^2 = \frac{gs^2}{2hR} \approx 55,6 \text{ m/s}^2. \quad (2.7.4)$$

**2.8. Feladat:** (HN 4C-28) Egy lövedéket a vízszintes síkhoz képest  $\theta$  szög alatt  $v_0$  sebességgel lövünk ki. Fejezzük ki a röppálya tetőpontjához tartozó  $R$  görbületi sugarat a  $v_0$ ,  $\theta$  és  $g$  függvényében!

**Megoldás:** A pálya tetőpontján a pályát érintő sebességkomponens  $v_x = v_0 \cos \theta$ . A lövedék centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = \frac{v_x^2}{R}. \quad (2.8.1)$$

A centripetális gyorsulást a nehézségi gyorsulás biztosítja, ezért  $a_{cp} = g$ . A két összefüggésből a görbületi sugár kifejezhető:

$$R = \frac{v_x^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g}. \quad (2.8.2)$$

### 3. Feladatok a dinamika tárgyköréből

#### Newton három törvénye

**3.1. Feladat:** Három azonos  $m$  tömegű gyöngyszemet fonálra fűzünk, egymástól kis távolságokban a fonálhoz rögzítünk, és az elhanyagolható tömegű fonál végét ujjunkkal fogva függőlegesen lógatunk a  $g$  homogén nehézségi erőterben. Majd a  $t_0$  időpillanattól kezdve  $a$  gyorsulással emeljük a fonál végét. Mekkora erő ébred az egyes fonalszakaszokban?

**Megoldás:** Számozzuk meg a gyöngyszemeket. A legalsó legyen az 1-es, a középső a 2-es, a felső a 3-as. A koordináta-rendszer  $y$  tengelye mutasson felfele. Mindhárom gyöngyszem  $a$  gyorsulással mozog felfele, így a koordináta-rendszerben pozitív értékű. A nehézségi gyorsulás lefele mutat, így negatív:  $-g$ .

Az 1-es testre a  $K_1$  kötél-erő (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) hat felfele; a 2-es testre hat a  $-K_1$  kötél-erő lefele (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) és a  $K_2$  kötél-erő felfele (a 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon); a 3-as testre hat a  $-K_2$  kötél-erő lefele (az 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon) és az  $F$  kötél-erő felfele (ezt mi fejtjük ki).

A mozgásegyenletek rendre (1-2-3 testre):

$$ma = K_1 - mg, \quad (3.1.1)$$

$$ma = K_2 - K_1 - mg, \quad (3.1.2)$$

$$ma = F - K_2 - mg. \quad (3.1.3)$$

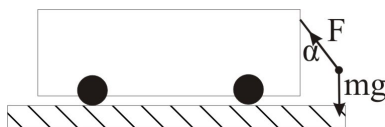
Az egyenletrendszerből a keresett kötél-erők:

$$K_1 = m(a + g), \quad (3.1.4)$$

$$K_2 = ma + K_1 + mg = 2m(a + g), \quad (3.1.5)$$

$$F = ma + K_2 + mg = 3m(a + g). \quad (3.1.6)$$

Megjegyzés: Gyakorlásként általánosítsa a feladatot különböző számú és tömegű gyöngyszemekre!



7. ábra.

**3.2. Feladat:** Egy mozgó kocsin rögzített fonál végén egy  $m = 2$  kg tömegű test lóg. A fonál szakítási szilárdsága  $F_{max} = 30$  N. Mekkora egyenletes gyorsulással mozoghat a kocsi, hogy a fonál még éppen el ne szakadjon?

**Megoldás:** Jelölje  $\alpha$  azt a szöveget, amelyet a gyorsítás alatt a kötél bezár a függőlegessel (lásd a 7. ábrát). Ekkor az  $F$  kötélrő vízszintes komponense gyorsítja a testet

$$ma = F \sin \alpha, \quad (3.2.1)$$

míg a függőleges komponens a súlyerővel tart egyensúlyt

$$mg = F \cos \alpha. \quad (3.2.2)$$

A két egyenletből a gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = \sqrt{\frac{F_{max}^2}{m^2} - g^2}. \quad (3.2.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $a_{max} \approx 11,18$  m/s<sup>2</sup> adódik.

**3.3. Feladat:** (HN 5B-19) Nyugalomból induló test súrlódásmentesen csúszik le a vízszintessel  $\alpha = 30^\circ$ -os szöveget bezáró lejtőn.

- (a) Határozzuk meg azt a  $t_0$  időpillanatot amikor a test eléri a  $v_0 = 50$  m/s-os sebességet?  
 (b) Mekkora  $s$  távolságba jut el ezalatt a test?

**Megoldás:**

(a) Az  $m$  tömegű test mozgásegyenlete

$$ma = mg \sin \alpha, \quad (3.3.1)$$

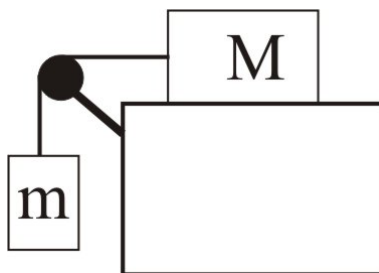
amiből a test gyorsulása

$$a = g \sin \alpha. \quad (3.3.2)$$

A test sebessége az idő függvényében

$$v(t) = g \sin \alpha t. \quad (3.3.3)$$





8. ábra.

A  $t_0$  időpillanatban a test eléri a  $v_0$  sebességet, azaz  $v(t_0) = v_0$ . A sebesség eléréséhez szükséges idő pedig  $t_0 = v_0/(g \sin \alpha)$ . Behelyettesítve a számadatokat  $t_0 = 10$  s adódik.

(b) A  $t_0$  idő alatt megtett út

$$s = \frac{1}{2}gt_0^2 \sin \alpha. \quad (3.3.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $s = 250$  m adódik.

**3.4. Feladat:** (HN: 5B-33) Az  $m$  és  $M = 8$  kg tömegű hasábokat az 8. ábrán látható elrendezésben fonallal kötünk össze. A csiga tengelysúrlódása és az érintkező felületek közötti súrlódás elhanyagolható.

(a) Mekkora az alsó test  $m$  tömege, ha a testek gyorsulása  $a = 2$  m/s<sup>2</sup>?

(b) Mekkora  $K$  erő feszíti a fonalat?

Megoldás:

(a) Mivel a hasábokat összekötő kötélnem nyúlik meg, mindkét hasáb gyorsulása ugyanakkora (lásd a 9. ábrát.) Az egyes hasábok mozgásegyenletei

$$ma = mg - K \quad (3.4.1)$$

és

$$Ma = K. \quad (3.4.2)$$

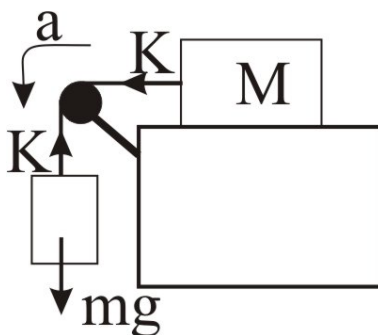
E két egyenletből

$$m = \frac{Ma}{g - a} = 2 \text{ kg} \quad (3.4.3)$$

adódik.

(b) A kötelet feszítő erő pedig

$$K = \frac{mM}{m + M}g = 16 \text{ N}. \quad (3.4.4)$$



9. ábra.

## Centripetális erő

**3.5. Feladat:** Egy  $m = 70$  kg tömegű pilóta repülőgéppel  $R = 1$  km sugarú függőleges síkú pályán  $v = 1080$  km/h egyenletes sebességgel köröz. A repülőnek állandóan a teteje néz a körpálya középpontja felé. Mekkora erővel nyomja a pilóta az ülést a körpálya legfelső pontján?

**Megoldás:** A körpálya legfelső pontjában a pilóta körmozgását az  $mg$  súlyerő és a kör közepe felé mutató  $N$  támaszerő biztosítja:

$$m \frac{v^2}{R} = mg + N \quad (3.5.1)$$

Ebből az egyenletből az  $N$  támaszerő könnyen kifejezhető:

$$N = m \frac{v^2}{R} - mg = 5600 \text{ N.} \quad (3.5.2)$$

A pilóta az ülést ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú erővel nyomja. (A nyomóerő a pilóta súlyának nyolcszorosa.)

**3.6. Feladat:** (HN 5B-20) Egy gépkocsi  $R = 18$  m sugarú, függőleges síkú, kör alakú domboldalon mozog felfelé. A domb tetején a vezető azt tapasztalja, hogy éppen csak érinti az ülést. Mekkora sebességgel haladt a gépkocsi?

**Megoldás:** A domb tetején két erő hat a vezetőre, melyek biztosítják a vezető körpályán történő mozgását. A kör közepe felé mutató  $mg$  súlyerő, valamint az ülés által kifejtett, ellentétes irányú  $N$  támaszerő határozzák meg a vezető gyorsulását, mely (feltéve, hogy az autó nem válik el az úttesttől) a centripetális gyorsulással egyenlő:

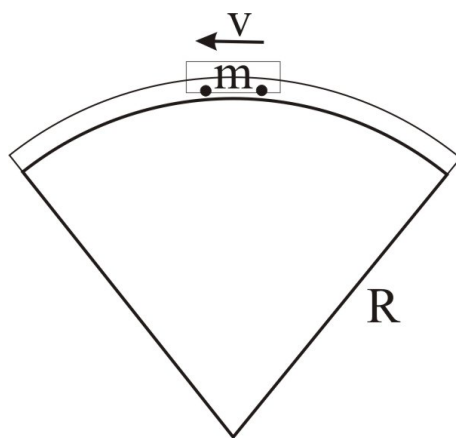
$$m \frac{v^2}{R} = mg - N. \quad (3.6.1)$$

Határesetben, amikor a vezető éppen csak érinti az ülést,  $N \rightarrow 0$ . A határesethez tartozó sebesség:

$$v = \sqrt{Rg} \approx 13,41 \text{ m/s.} \quad (3.6.2)$$

**3.7. Feladat:** (HN 5B-21) A hullámvasút kocsija állandó  $v = 6 \text{ m/s}$ -os sebességgel halad át a pálya  $R = 6 \text{ m}$  sugarú, függőleges síkú részének tetőpontján a 10. ábrán látható módon. A kocsi és az utasok együttes tömege  $m = 1350 \text{ kg}$ .

- Mekkora és milyen irányú a kocsi gyorsulása a tetőponton?
- Mekkora eredő erő hat ebben a pillanatban a kocsira és az utasokra összesen?
- Mekkora erővel nyomja a pálya a kocsit a tetőponton?



10. ábra.

Megoldás:

(a) A kocsi gyorsulása a kör közepe felé (azaz lefelé) mutató centripetális gyorsulással egyenlő, melynek nagysága

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 6 \text{ m/s}^2. \quad (3.7.1)$$

(b) A kocsira ható erők eredőjét a kocsi gyorsulása határozza meg:

$$F = ma_{cp} = 8100 \text{ N.} \quad (3.7.2)$$

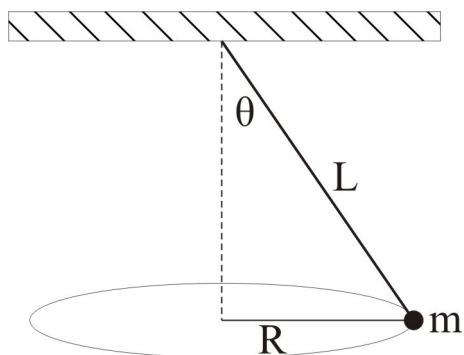
(c) A kocsira ható erők eredője a hullámvasút  $N$  támaszerejének és a kocsira ható súlyerőnek a különbsége:

$$F = mg - N. \quad (3.7.3)$$

Felhasználva a centripetális gyorsulás a (3.7.1) kifejezését, valamint a (3.7.2) egyenletet:

$$N = mg - ma_{cp} = 5400 \text{ N.} \quad (3.7.4)$$

**3.8. Feladat:** (HN 5B-31) Egy  $L$  hosszúságú fonállal a mennyezethez erősített testet a 11. ábrán látható módon úgy hozunk mozgásba, hogy a test vízszintes síkú,  $R$  sugarú körpályán mozog, miközben a fonál a függőlegessel  $\theta$  szöget zár be. Fejezzük ki egy fordulat idejét az  $L$  és  $\theta$  paraméterek függvényében!

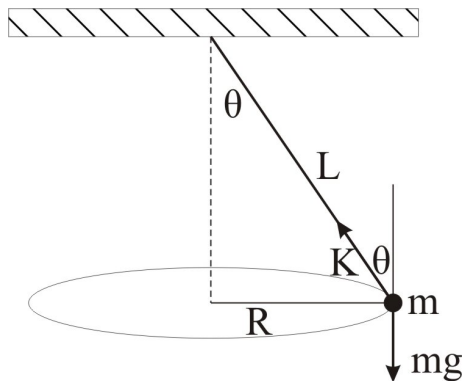


11. ábra.

**Megoldás:** Jelölje  $K$  az  $m$  tömegű testre ható kötél erő nagyságát (lásd a 12. ábrát). Mivel a tömegpont nem mozdul el függőlegesen, a súlyerő egyensúlyt tart a kötél erő függőleges komponensével:

$$K \cos \theta = mg, \quad (3.8.1)$$

míg a vízszintes komponens a körpályán történő mozgáshoz biztosítja a szükséges centripetális



12. ábra.

gyorsulást:

$$K \sin \theta = m \frac{v^2}{R}. \quad (3.8.2)$$

A két egyenletből a tömegpont sebessége (felhasználva, hogy  $R = L \sin \theta$ )

$$v = \sqrt{gL \sin \theta \operatorname{tg} \theta}. \quad (3.8.3)$$

Egy fordulat ideje

$$T = \frac{2R\pi}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}. \quad (3.8.4)$$

**3.9. Feladat:** (HN: 5B-32) Egy  $L = 1,4$  m hosszú fonálinga függőleges síkban mozog. Amikor az ingatest sebessége  $v = 2,2$  m/s, akkor a fonál  $\alpha = 20^\circ$ -os szöget zár be a függőlegessel. Határozzuk meg ebben a pillanatban

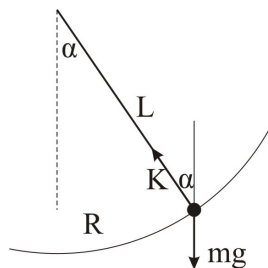
- az ingatest  $a_{cp}$  centripetális gyorsulását,
- az ingatest  $a_t$  tangenciális gyorsulását,
- a fonalat feszítő  $K$  erőt, ha az ingatest tömege  $m = 600$  g!

Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás nagysága:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{L} \approx 3,45 \text{ m/s}^2. \quad (3.9.1)$$

(b) A tangenciális gyorsulást a súlyerő tangenciális komponense határozza meg (a kötél erő merőleges a körpálya érintőjére, ahogy azt a 13. ábra mutatja):



13. ábra.

$$a_t = g \sin \alpha \approx 3,40 \text{ m/s}^2. \quad (3.9.2)$$

A körmozgást a  $K$  kötél erő és a súlyerő fonálirányú komponense —  $mg \cos \alpha$  — különbsége biztosítja. A mozgásegyenlet a radiális komponensekre

$$m \frac{v^2}{L} = K - mg \cos \alpha. \quad (3.9.3)$$

Az egyenletből kifejezhető a  $K$  kötél erő:

$$K = m \frac{v^2}{L} + mg \cos \alpha \approx 7,7 \text{ N}. \quad (3.9.4)$$

## Súrlódási erő

**3.10. Feladat:** Vízszintes asztallapon két téglá fekszik egymáson. Minimálisan mekkora  $F$  erővel kell hatni az alsó téglára, hogy az kicsússzon a felső alól? A súrlódási tényező az asztallap és a téglá, valamint a két téglá között  $\mu = 0,4$ , a két téglá össztömege pedig  $m = 5$  kg.

**Megoldás:** Jelölje a felső test tömegét  $m_1$ , az alsó test tömegét pedig  $m_2$ . Ekkor  $m = m_1 + m_2 = 5$  kg. Legyen ezen felül  $a_1$  a felső test,  $a_2$  pedig az alsó test gyorsulása. A felső téglára  $F_{s1} = \mu m_1 g$  súrlódási erő hat, mellyel a téglá mozgásegyenlete:

$$m_1 a_1 = F_{s1} = \mu m_1 g \quad (3.10.1)$$

Az alsó téglára a felső téglá által kifejtett  $F_{s1}$  súrlódási erő mellett, az alsó téglá és asztallap között fellépő  $F_{s2} = \mu(m_1 + m_2)g$  súrlódási erő is hat, melyek fékezni próbálják az alsó téglá mozgását. Az alsó téglá mozgásegyenlete:

$$m_2 a_2 = F - \mu m_1 g - \mu(m_1 + m_2)g = F - \mu m_1 g - \mu m g. \quad (3.10.2)$$

Az első egyenletből kifejezve az  $a_1$  gyorsulást

$$a_1 = \mu g \quad (3.10.3)$$

adódik, amely az  $m_1$  test maximális gyorsulását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a minimális  $F$  erő esetén még nem válnak el, és  $a = a_1 = a_2$  írható. Ezzel a második mozgásegyenletbe a  $\mu m_1 g$  helyére  $m_1 a$ -t helyettesítve

$$m_2 a = F - m_1 a - \mu(m_1 + m_2)g. \quad (3.10.4)$$

Ezt az  $F$  erőre átrendezve a minimális erő

$$F = (m_1 + m_2)a + \mu(m_1 + m_2)g = ma + \mu m g = 40 \text{ N}. \quad (3.10.5)$$

**Megjegyzés:** A feladatmegoldásból látszik, hogy a kérdés megválaszolásához csak az össztömegekre volt szükség. Kisebb vagy nagyobb erő alkalmazásakor az egyenletekből levont következtetések módosulhatnak! Ezeknek diszkussziója gyakorló feladat.

**3.11. Feladat:** Egy autó az országúton nagy sebességgel halad. Az autógumi és az úttest felülete között a tapadási súrlódási együttható  $\mu = 0,9$ . Az  $R = 100$  m sugarú, vízszinten kanyarban mekkora lehet a jármű maximális sebessége, hogy ne sodródjon ki?

**Megoldás:** A kanyarban az  $F$  tapadási súrlódási erő biztosítja az autónak a körmozgáshoz szükséges centripetális gyorsulást:

$$m \frac{v^2}{R} = F. \quad (3.11.1)$$

A maximális tapadási erő  $F_{max} = \mu mg$  felső határt szab az autó maximális sebességének is, mely az alábbi egyenlőtlenséggel fejezhető ki:

$$m \frac{v^2}{R} \leq F_{max} = \mu mg. \quad (3.11.2)$$

Maximális sebesség esetén egyenlőség áll fenn az egyenlet két oldala között, ezért a maximális sebesség nagysága:

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R}. \quad (3.11.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $v_{max} = 30$  m/s adódik.

**3.12. Feladat:** (HN 5B-43) Egy gyerek a parttól  $s = 12$  m-re áll a befagyott tavacska jegén. Csizmája és a jég közötti tapadási súrlódási együttható  $\mu = 0,05$ . Határozzuk meg azt a minimális időt, amely alatt kisétálhat a partra, ha megcsúszás nélkül lépked?

**Megoldás:** A gyerek  $F = \mu mg$  erővel nyomja a jeget, ezért csúszás nélkül legfeljebb  $a = \mu g$  gyorsulásra képes. Az  $s$  út megtételéhez ezért legkevesebb

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{\mu g}} = 6,93 \text{ s} \quad (3.12.1)$$

idő szükséges.

**3.13. Feladat:** (HN 5B-44) Egy rakodórámpán láda nyugszik. Ha a rámpa szöge  $\alpha_1 = 30^\circ$ -os, akkor a láda megcsúszik. Amennyiben a csúszó láda alatt a lejtő hajlásszöge  $\alpha_2 = 20^\circ$ -ra csökken, akkor a láda mozgása egyenletessé válik. Határozzuk meg a lejtő és a láda közötti csúszási és tapadási súrlódási együttható értékét!

**Megoldás:** A feladatban jelölje  $\mu_t$  a tapadási és  $\mu_{cs}$  a csúszási súrlódási együtthatót. Nyugalmi helyzetben a tapadási súrlódási erő egyensúlyt tart a súlyerő lejtővel párhuzamos komponensével, ezért

$$ma = 0 = mg \sin \alpha_1 - \mu_t g \cos \alpha_1. \quad (3.13.1)$$

Az egyenletből

$$\mu_t = \operatorname{tg} \alpha_1 \approx 0,577 \quad (3.13.2)$$

tapadási súrlódási együttható adódik. Egyenletes gyorsulás esetén a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense a csúszási súrlódási együtthatóval tart egyensúlyt:

$$ma = 0 = mg \sin \alpha_2 - \mu_{cs} g \cos \alpha_2. \quad (3.13.3)$$

Az egyenletből

$$\mu_{cs} = \operatorname{tg} \alpha_2 \approx 0,364. \quad (3.13.4)$$

csúszási súrlódási együttható adódik.

**3.14. Feladat:** (HN 5B-46) Az  $m = 5$  kg-os tömegű test lecsúszik a vízszintessel  $\alpha = 41^\circ$  szöget bezáró lejtőn. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható  $\mu = 0,3$ .

- Határozzuk meg a súrlódási erő nagyságát!
- Mekkora gyorsulással csúszik le a test?

**Megoldás:**

(a) A lejtőn lecsúszó testre ható  $N$  támaszerő (kényszererő) egyensúlyt tart a súlyerő lejtőre merőleges komponensével, ezért  $N = mg \cos \alpha$ . A csúszási súrlódási erő pedig

$$F_s = \mu N = \mu mg \cos \alpha \approx 11,32 \text{ N}. \quad (3.14.1)$$

(b) A test lejtővel párhuzamos mozgását a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense és a súrlódási erő határozzák meg:

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (3.14.2)$$

ahonnan a test gyorsulása

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \approx 4,3 \text{ m/s}^2. \quad (3.14.3)$$



**3.15. Feladat:** (HN 5B-47) A vízszintessel  $\alpha = 60^\circ$ -os szöget bezáró lejtőn egy test  $a = g/2$  gyorsulással csúszik le. Mekkora a csúszó súrlódási együttható?

**Megoldás:** A lejtővel párhuzamos mozgást leíró dinamikai egyenlet:

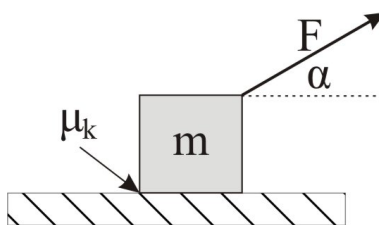
$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha. \quad (3.15.1)$$

Behelyettesítve a gyorsulás értékét a súrlódási együttható az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\mu = \frac{\sin \alpha - \frac{1}{2}}{\cos \alpha}. \quad (3.15.2)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $\mu \approx 0,732$  adódik a súrlódási együttható értékére.

**3.16. Feladat:** (HN 5B-52) Egy  $m = 4$  kg tömegű testet a 14. ábrának megfelelően  $F = 20$  N erővel húzunk ( $\alpha = 30^\circ$ ). Mekkora a test gyorsulása, ha a test és talaj közötti csúszási súrlódási együttható  $\mu_k = 0,2$ ?



14. ábra.

**Megoldás:** Mivel a test nem emelkedik fel a talajról a függőleges gyorsulása zérus. Ezért

$$0 = N + F \sin \alpha - mg, \quad (3.16.1)$$

ahol  $N$  a testre ható támaszerő. Írjuk fel a mozgás vízszintes vetületére vonatkozó mozgásegyenletet!

$$ma = F \cos \alpha - F_s, \quad (3.16.2)$$

ahol  $F_s$  a testre ható súrlódási erő, melyet az  $N$  támaszerő segítségével határozhatunk meg:

$$F_s = \mu_k N. \quad (3.16.3)$$

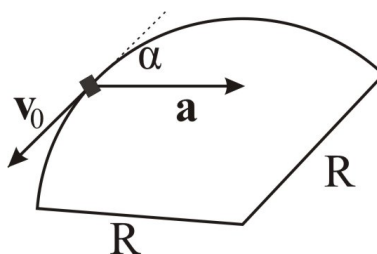
Az egyenletrendszer megoldásából a test gyorsulása meghatározható:

$$a = \frac{F(\cos \alpha + \mu_k \sin \alpha)}{m} - \mu_k g. \quad (3.16.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $a \approx 2,83$  m/s<sup>2</sup> adódik.

**3.17. Feladat:** (HN 5B-58) Egy gépkocsi  $R = 80$  m sugarú vízszintes körpályán mozog. A 15. ábra azt a pillanatot mutatja, amikor az autó sebessége éppen  $v_0 = 10$  m/s és a gyorsulása  $\mathbf{a}$ , mely a körpálya érintőjével  $\alpha = 35^\circ$ -os szöget zár be.

- (a) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása?  
 (b) Mekkora a tangenciális gyorsulás?  
 (c) Mekkora utat tesz meg a gépkocsi a megállásig, ha az érintő menti gyorsulása állandó?  
 (d) Az úttest vízszintes, azaz a kanyarban nem túlemelt pálya. Mekkora minimális nyugalmi súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy az ábrán mutatott pillantban a gépkocsi ne csússzon meg?



15. ábra.

### Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás az autó sebességének és a kanyar görbületi sugarának segítségével határozható meg:

$$a_{cp} = \frac{v_0^2}{R}. \quad (3.17.1)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $a_{cp} = 1,25$  m/s<sup>2</sup> adódik.

(b) Az ábra segítségével meghatározhatjuk az  $\mathbf{a}$  gyorsulásvektor nagyságát is. Felhasználva, hogy az  $\mathbf{a}$  vektor sugár irányú vetülete éppen a centripetális gyorsulás, az eredő gyorsulás nagysága

$$a = |\mathbf{a}| = \frac{a_{cp}}{\sin \alpha}. \quad (3.17.2)$$

A tangenciális gyorsulás pedig az

$$a_t = a \cos \alpha = \frac{a_{cp}}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (3.17.3)$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat  $a_t \approx 1,79$  m/s<sup>2</sup> adódik.

(c) Amennyiben a kocsi lassul, de a tangenciális gyorsulása állandó, a kocsi megállásáig megtett út meghatározható az alábbi összefüggésből:

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2} a_t t_0^2, \quad (3.17.4)$$

ahol  $t_0 = v_0/a_t$  a megállásig eltelt idő. Behelyettesítve a számadatokat  $s \approx 27,9$  m adódik a megállásig megtett út hosszára.

(d) A dinamika alapegyenlete szerint

$$ma = F_s = \mu mg, \quad (3.17.5)$$

amelyből a minimális súrlódási együttható, mely mellett a kocsى még épp nem csúszik meg,  $\mu \approx 0,218$ .

**3.18. Feladat:** \* A vízszintes asztalon  $m$  tömegű test nyugszik. A test és az asztallap közötti súrlódási együttható  $\mu$ . (A tapadási és csúszási súrlódási együttható legyen azonos.) A testre a  $t = 0$  időpillanattól kezdve  $F(t) = f_0 t$  erővel hatunk.

- Mi az  $f_0$  együttható mértékegysége?
- Mikor indul el a test?
- Mekkora lesz a test sebessége a  $t$  időpillanatban?

Megoldás:

(a) Az  $f_0$  együttható mértékegysége N/s, mivel idő dimenziójú mennyiséggel megszorozva erő dimenziójú mennyiséget kell, hogy kapjunk.

(b) A test abban a  $t_0$  pillanatban indul el, amikor a rá ható erő eléri a tapadási erő maximumát, azaz  $F(t_0) = f_0 t_0 = \mu mg$ , ahonnan

$$t_0 = \frac{\mu mg}{f_0}. \quad (3.18.1)$$

(c) A test mozgásegyenlete a megmozdulás pillanatát követő  $t \geq t_0$  időintervallumban:

$$ma = f_0 t - \mu mg \quad (3.18.2)$$

Az egyenletből kifejezhetjük a gyorsulást az idő függvényében:

$$a(t) = \frac{f_0}{m} t - \mu g. \quad (3.18.3)$$

A sebességet a gyorsulás idő szerinti integrálásával határozhatjuk meg:

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t') dt' = \int_{t_0}^t \left( \frac{f_0}{m} t' - \mu g \right) dt' = \frac{1}{2} \frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 m g^2}{f_0}. \quad (3.18.4)$$

Tehát a test sebessége:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha: } t \leq t_0 \\ \frac{1}{2} \frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 m g^2}{f_0} & \text{ha: } t > t_0 \end{cases}. \quad (3.18.5)$$

**3.19. Feladat:** Egy függőleges tengelyű korong  $\omega_0$  szögsebességgel forog. A korong közepétől  $R$  távolságban  $m$  tömegű test helyezkedik el. A korong és a test között  $\mu$  tapadási súrlódási együttható van. A korong egyenletes lassulásba kezd. Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, hogy a test ne csússzon meg?

Megoldás: A korong szögsebessége az

$$\omega(t) = \omega_0 - \beta t \quad (3.19.1)$$

függvény szerint változik. Ezért a korongon lévő test centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = R\omega(t)^2 = R(\omega_0 - \beta t)^2. \quad (3.19.2)$$

A test tangenciális gyorsulása pedig

$$a_t = R\beta. \quad (3.19.3)$$

A test eredő gyorsulása

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}, \quad (3.19.4)$$

melyet a tapadási erő biztosít a test számára. A tapadás feltétele, hogy

$$\mu mg \geq ma = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}. \quad (3.19.5)$$

A tapadási súrlódási együttható ezért:

$$\mu \geq \frac{\sqrt{R^2(\omega_0 - \beta t)^4 + (R\beta)^2}}{g}. \quad (3.19.6)$$

A legnagyobb tapadás a lassulás kezdeti pillanatában szükséges, ezért a minimális tapadási együttható

$$\mu_{min} = R \frac{\sqrt{\omega_0^4 + \beta^2}}{g}. \quad (3.19.7)$$

**3.20. Feladat:** Egy  $\omega_0 = 6$  1/s szögsebességű,  $R = 0,2$  m sugarú függőleges tengelyű korong peremén van egy  $m$  tömegű test. A korong  $\beta = 2$  1/s<sup>2</sup> szöggyorsulással lassul, majd megáll.

- Mennyi idő alatt állt meg?
- Mennyi volt a korong szögelfordulása?
- Mennyi utat tett meg az  $m$  tömegű test?
- Legalább mekkora  $\mu$  súrlódási együttható kell, hogy legyen a korong és az  $m$  tömegű test között, hogy a test ne csússzon le a korongról?

Megoldás:

(a) Az

$$\omega_0 = \beta t \quad (3.20.1)$$

összefüggésből következik, hogy a megállás ideje  $t = 3$  s.(b) Ezalatt a  $\varphi$  szögelfordulás

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2} \beta t^2 = 9 \text{ rad.} \quad (3.20.2)$$

(c) A megtett út

$$s = R\varphi = 1,8 \text{ m.} \quad (3.20.3)$$

(d) A test gyorsulása az  $a_t = R\beta$  tangenciális és az  $a_{cp} = R\omega^2$  centripetális gyorsulásból áll. Ez utóbbi a kezdeti idopontban a legnagyobb, így a maximális súrlódási együttható kiszámolásánál ezzel az értékkel kell számolni. Az eredő gyorsulás nagysága:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{R^2\beta^2 + R^2\omega^4}. \quad (3.20.4)$$

A testet a súrlódási erő mozgatja, így

$$ma = \mu mg, \quad (3.20.5)$$

amelybe behelyettesítve kapjuk:

$$\mu = \frac{1}{g} \sqrt{R^2\beta^2 + R^2\omega^4} = 0,72. \quad (3.20.6)$$

**3.21. Feladat:** Tuskót helyezünk állóhelyzetből felgyorsuló vízszintes forgóasztalra tengelyétől 10 cm távolságban. A forgóasztal 2/3 s alatt éri el a 2 rad/s szögsebességet és ekkor a tuskó csúszni kezd. Mekkora a tapadási súrlódási erő a tuskó és az asztal között?

Megoldás: A tuskó szöggyorsulása

$$\beta = \frac{\omega}{t} = 3 \text{ rad/s}^2, \quad (3.21.1)$$

a kerületi sebessége

$$v = R\omega = 0,2 \text{ m/s.} \quad (3.21.2)$$

A test eredő gyorsulása a centripetális és tangenciális gyorsulásokból tevődik össze:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2}. \quad (3.21.3)$$

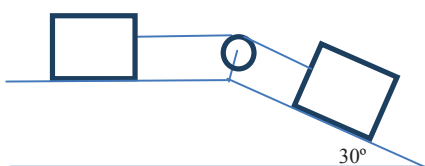
Ezt a gyorsulást a  $\mu mg$  tapadási súrlódási erő biztosítja:

$$\mu mg = ma = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = m\sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2}. \quad (3.21.4)$$

Innen a tapadási súrlódási együttható:

$$\mu = \frac{1}{g}\sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2} = 0,05. \quad (3.21.5)$$

**3.22. Feladat:** A 16. ábrán két, egyenként  $m = 40$  kg tömegű test van összekapcsolva. A súrlódási együttható mindkét testre  $\mu = 0,15$ . Határozzuk meg a testek gyorsulását és a fonálban ébredő  $K$  kötélerőt!



16. ábra.

**Megoldás:** Jelölje  $a$  a testek gyorsulását. (Mivel a kötel nem nyúlik meg, mindkét test azonos gyorsulással mozog) A baloldali test mozgásegyenlete

$$ma = K - \mu mg, \quad (3.22.1)$$

míg a lejtőn fekvő test mozgásegyenlete

$$ma = mg \sin \alpha - K - \mu mg \cos \alpha \quad (3.22.2)$$

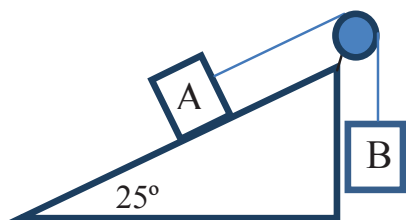
A két egyenletből meghatározható a testek gyorsulása:

$$a = \frac{1}{2}(g \sin \alpha - \mu g - \mu g \cos \alpha). \quad (3.22.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $a \approx 1,1$  m/s<sup>2</sup> adódik. A kötélterőt a (3.22.1) egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$K = ma + \mu mg = \frac{\sin \alpha + \mu - \mu \cos \alpha}{2} mg. \quad (3.22.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $K \approx 104$  N adódik.



17. ábra.

**3.23. Feladat:** A vízszintessel  $\alpha = 25^\circ$ -os szöget bezáró lejtőn nyugalmi helyzetből indulva  $m_A = 30$  kg tömegű testet a 17. ábrán látható módon  $m_B = 20$  kg tömegű test húz felfelé. A súrlódási együttható  $\mu = 0,2$ .

- (a) Számoljuk ki a testek gyorsulását!  
 (b) Számoljuk ki a testek által  $t_0 = 2$  s alatt megtett utat!

Megoldás:

(a) Jelölje  $K$  a kötélet feszítő erőt és  $a$  a testek gyorsulását. A testek mozgásegyenlete:

$$m_A a = K - m_A g \sin \alpha - \mu m_A g \cos \alpha \quad (3.23.1)$$

és

$$m_B a = m_B g - K. \quad (3.23.2)$$

E két egyenletből a gyorsulás kifejezhető:

$$a = \frac{m_B - m_A \sin \alpha - \mu m_A \cos \alpha}{m_A + m_B} g. \quad (3.23.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $a \approx 0,0376$  m/s<sup>2</sup> adódik.

(b) A testek által megtett út  $t_0$  idő alatt, amennyiben a testek nyugalmi helyzetből indulnak:

$$s = \frac{1}{2} a t_0^2. \quad (3.23.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $s \approx 7,5$  cm adódik.

**3.24. Feladat:** Az  $\alpha$  hajlásszögű lejtőn  $a$  gyorsulással lefele csúszik a  $k$  direkciónerejű rugóval összekötött  $m_1$  és  $m_2$  tömegű testekből álló rendszer, mégpedig úgy, hogy az  $m_1$  megy elől. A lejtő és a testek közötti súrlódási tényező rendre  $\mu_1$  és  $\mu_2$ .

- (a) Fejezzük ki a rendszer gyorsulását.  
 (b) Mekkora a rugó megnyúlása?

**Megoldás:** Jelölje  $F_r$  az ebredő rugóerőt. Legyen a koordinátarendszer  $x$  tengelye lejtőirányú.

(a) E koordinátarendszer irányítás mellett két test mozgásegyenlete sorban

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha - F_r \quad (3.24.1)$$

és

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha + F_r. \quad (3.24.2)$$

A két egyenletből a

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \alpha - (\mu_1 m_1 g \cos \alpha + \mu_2 m_2 g \cos \alpha)}{m_1 + m_2}. \quad (3.24.3)$$

gyorsulás adódik.

(b) A gyorsulás visszahelyettesítésével a kapott rugóerő

$$F_r = (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \alpha. \quad (3.24.4)$$

Ezzel a rugó megnyúlása

$$\Delta l = \frac{F_r}{k} = \frac{1}{k} (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \alpha. \quad (3.24.5)$$

Látható, hogy ha  $\mu_2 > \mu_1$ , akkor a rugó megnyúlik, mert  $\Delta l > 0$ ; ellenkező esetben összenyomódik. Ha a kettő egyenlő egymással, akkor a megnyúlás zérus.

## Közegellenállási erők

**3.25. Feladat:** Az  $R$  sugarú vasgolyó vízben süllyed. Ismeretes, hogy hosszabb idő elteltével közegben a testek állandó sebességgel esnek. Sebességgel arányos közegellenállást feltételezve mekkora lesz a vasgolyó  $v$  végsebessége? Az arányossági tényező legyen:  $c = 6\pi\eta R$  (Stokes-féle ellenállás; kis sebességek eseteire), ahol  $\eta$  a közeg viszkozitása,  $R$  a közegben mozgó golyó sugara.

**Megoldás:** Jelölje  $\rho_{Fe}$  a vas, míg  $\rho_{H_2O}$  a víz sűrűségét. A koordinátatengely mutasson lefele! (Ez a pozitív irány.) A testre három erő hat. Az

$$mg = \rho_{Fe} \frac{4R^3 \pi}{3} g$$

nehézségi erő, amely most pozitív; a pillanatnyi sebességgel ellentétes közegellenállás, amely – mivel a test süllyed, tehát  $v$  pozitív –, azért a közegellenállási erő negatív:

$$-cv = -6\pi\eta Rv;$$



valamint a felhajtó erő, amely felfele mutat

$$-\rho_{H_2O} \frac{4R^3\pi}{3} g,$$

így most negatív. Mivel azt az esetet vizsgáljuk, amikor a test már állandó sebességgel süllyed, így tudjuk, hogy a testre ható erők eredője zérus. Felírhatjuk tehát a következő egyenletet

$$0 = \rho_{Fe} \frac{4R^3\pi}{3} g - 6\pi\eta Rv - \rho_{H_2O} \frac{4R^3\pi}{3} g, \quad (3.25.1)$$

amelyből a kért  $v$  sebesség

$$v = (\rho_{Fe} - \rho_{H_2O}) \frac{2R^2}{9\eta} g. \quad (3.25.2)$$

Megjegyzés: Ez a számolás az alapja annak a módszernek, amellyel a folyadékok viszkozitását meg lehet határozni.

**3.26. Feladat:** Az  $m$  tömegű golyó levegőben esik a homogén nehézségi erőterben. A golyóra a sebesség négyzetével arányos közegellenállás hat. (Az arányossági tényezőt jelöljük  $c'$ -vel.) Mekkora a golyó végsebessége? (A felhajtóerőtől tekintsünk el.)

**Megoldás:** Amikor a test eléri végsebességét, akkor a ráható erők eredője zérus, így — lefele mutató koordinátatengely irányítást véve — a

$$0 = mg - c'v^2 \quad (3.26.1)$$

összefüggés írható fel. Ebből a végsebesség

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c'}}. \quad (3.26.2)$$

**3.27. Feladat:** \*\* Az  $m$  tömegű testet a koordinátarendszer origójából  $v_0$  sebességgel a vízszinteshez képest  $\alpha$  szöggel elhajítunk a homogén nehézségi erőterben. A testre az  $\mathbf{F}_k = -cv$  sebességgel arányos közegellenállás is hat, ahol  $c$  konstans arányossági tényező.)

- Írjuk fel a mozgásegyenletet!
- Határozzuk meg a sebességkomponensek időbeli változását!
- Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!
- Határozzuk meg a pálya alakját!

**Megoldás:** Amennyiben az  $y$  tengely pozitív irányba felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás vektora

a  $\mathbf{g} = (0, -g)$  alakban adható meg. A gyorsulás és sebesség vektorok pedig rendre  $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$  és  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  alakúak. A  $t_0 = 0$  időpillanatban a kezdeti sebességkomponensek  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$  valamint  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ . Mivel a koordináta-rendszer origóját a hajítás helyére tesszük, a kezdeti pozíció koordinátáit jelöljük  $x_0 = 0$  és  $y_0 = 0$ .

(a) Az elhajított testre két erő hat, az  $m\mathbf{g}$  súlyerő valamint a  $-c\mathbf{v}$  közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - c\mathbf{v}. \quad (3.27.1)$$

Írjuk fel az  $\mathbf{a}$  vektor  $x$  és  $y$  komponenseire vonatkozó skaláregyenleteket. Felhasználva, hogy  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$  és  $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ , az

$$ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = -cv_x \quad (3.27.2)$$

és

$$ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = -mg - cv_y \quad (3.27.3)$$

egyenleteket kapjuk.

(b) A (3.27.2) és (3.27.3) egyenletek egymástól függetlenek (azaz nem csatolt differenciálegyenlet-rendszert írnak le), aminek köszönhetően szeparált egyenleteket kapunk a mozgás  $x$  és  $y$  vetületére. A (3.27.2) egyenletben szeparálva a változókat és idő szerint integrálva az egyenletet:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{c}{m} \int_{t_0=0}^t dt'. \quad (3.27.4)$$

Az integrálás elvégzése után

$$\ln \frac{v_x(t)}{v_{0x}} = -\frac{c}{m} t \quad (3.27.5)$$

adódik, ahonnan a sebesség  $x$  komponense

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\frac{c}{m} t}. \quad (3.27.6)$$

Hasonló módon a (3.27.3) egyenletben is szeparáljuk az integrálási változókat:

$$m \int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{dv_y}{mg + cv_y} = - \int_{t_0=0}^t dt'. \quad (3.27.7)$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c} \ln \frac{mg + cv_y(t)}{mg + cv_{0y}} = -t, \quad (3.27.8)$$

összefüggéshez jutunk, melyből az  $y$  irányú sebességkomponens

$$v_y(t) = \frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m} t} - \frac{mg}{c}. \quad (3.27.9)$$

*Megjegyzés:* Belátható, hogy a  $c \rightarrow 0$  határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes  $v_x(t) = v_{0x}$  illetve  $v_y(t) = v_{0y} - gt$  megoldásokba tartanak. Ennek igazolását az olvasóra bízuk.

(c) A test helykoordinátáit a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$x(t) = \int_{t_0=0}^t v_{0x} e^{-\frac{c}{m}t'} dt' = \left[ -\frac{m}{c} v_{0x} e^{-\frac{c}{m}t'} \right]_{t_0=0}^t = \frac{m}{c} v_{0x} (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) \quad (3.27.10)$$

és

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0=0}^t \left( \frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} \right) dt' = \left[ -\frac{m}{c} \frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} t \right]_{t_0=0}^t \\ &= \frac{m}{c} \frac{mg + cv_{0y}}{c} \left( 1 - e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c} t \right). \end{aligned} \quad (3.27.11)$$

*Megjegyzés:* Belátható, hogy a  $c \rightarrow 0$  határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes  $x(t) = v_{0x}t$  illetve  $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$  megoldásokhoz tartanak. Ezeknek igazolását az olvasóra bízuk.

(d) A pályagörbe alakját megkapjuk, ha a (3.27.10) egyenletből kiküszöböljük a  $t$  időváltozót:

$$t = -\frac{m}{c} \ln \left( 1 - \frac{cx}{mv_{0x}} \right). \quad (3.27.12)$$

Ezt behelyettesítve a (3.27.11) egyenletbe

$$y(x) = \frac{mg + cv_{0y}}{cv_{0x}} x + \frac{m^2 g}{c^2} \ln \left( 1 - \frac{cx}{mv_{0x}} \right) \quad (3.27.13)$$

adódik. Ezt a pályáját ballisztikus pályának nevezik. *Megjegyzés:* Belátható, hogy a  $c \rightarrow 0$  határesetben a megoldás egy parabola pálya. Másfelől a logaritmus függvény argumentumát megvizsgálva látható, hogy a

$$1 > \frac{cx}{mv_{0x}} \quad (3.27.14)$$

relációnak fenn kell állnia. Innen következik, hogy

$$x < \frac{mv_{0x}}{c}, \quad (3.27.15)$$

azaz ennél az  $x$  távolságnál soha nem megy messzebb a test.

**3.28. Feladat:** \*\* Az  $m$  tömegű testet  $h$  magasságban elejtjük. A testre az  $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$  sebességgel arányos közegellenállás is hat. (A  $c$  konstans arányossági tényező.)

(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!

(b) Határozzuk meg a sebességének időbeli változását!

(c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!

**Megoldás:** Amennyiben a függőleges tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás a negatív irányba gyorsítja az elejtett testet, melyre két erő hat, az  $mg$  súlyerő valamint a  $-cv$  közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$ma = -mg - cv. \quad (3.28.1)$$

Felhasználva, hogy  $a = \frac{dv}{dt}$ , az

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -mg - cv \quad (3.28.2)$$

egyenletet kapjuk.

(a) Szeparáljuk a (3.28.2) egyenletben az integrálási változókat, majd végezzük el az integrálás műveletét:

$$m \int_0^v \frac{dv}{mg + cv} = - \int_{t_0=0}^t dt'. \quad (3.28.3)$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c} \ln \frac{mg + cv(t)}{mg} = -t, \quad (3.28.4)$$

összefüggéshez jutunk, melyből a sebesség kifejezhető:

$$v(t) = \frac{mg}{c} e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \quad (3.28.5)$$

(b) A test helykoordinátáját a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{t_0=0}^t \left( \frac{mg}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} \right) dt' = \left[ -\frac{m}{c} \frac{mg}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} t \right]_{t_0=0}^t \\ &= \frac{m}{c} \frac{mg}{c} (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) - \frac{mg}{c} t. \end{aligned} \quad (3.28.6)$$

## 4. Feladatok munkavégzés és konzervatív erők tárgyköréből. Munkatétel

### Munkavégzés, teljesítmény

**4.1. Feladat:** (HN 6B-8) Egy rúgót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

**Megoldás:** Két megnyúlás van. Az első  $\Delta l = l_1 - l_0 = 10$  cm, amelyre felírható, hogy

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \quad (4.1.1)$$

Innen a  $k$  rugóállandó értéke kifejezhető

$$k = \frac{2W}{(\Delta l)^2} = 800 \text{ N/m}. \quad (4.1.2)$$

A további  $l_2 = 10$  cm nyújtáshoz szükséges munkavégzés

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(l_2 + \Delta l)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 12 \text{ J}. \quad (4.1.3)$$

**4.2. Feladat:** (HN 6B-10) Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az  $F = -kx^3$  törvény szerint változik, ahol  $k = 200 \text{ N/m}^3$ . Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

**Megoldás:** A rugó végét  $F'(x) = kx^3$  erővel kell húznunk, így a munka definíciója alapján az általunk végzett munka:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = \int_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} kx^3 dx = \left[ \frac{1}{4}kx^4 \right]_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} = 0,4 \text{ J} \quad (4.2.1)$$

integrállal számolható ki.

**4.3. Feladat:** (HN 6B-27) \* A 200 N súlyú gyerek nyugalmi helyzetben lévő, 3 m-es kötelű hintán ül. A gyerek barátja húzza oldalra, hogy a hinta kötele  $36^\circ$ -os szöget alkosson a függőlegessel. Határozzuk meg mekkora munkára volt ehhez szükség! A feladatot a munka definíciójának felhasználásával oldja meg!

**Megoldás:** Jelölje  $K$  a kötélert,  $\alpha$  a kötel függőlegessel bezárt szögét,  $m$  a gyerek tömegét. Első lépésként azt a szögfüggő erőt kell meghatározni, amellyel a barátja  $F$  erővel vízszintes irányban húzza. Mivel egyensúlyi állapotokon keresztüli mozgásról van szó az erők felírhatjuk, hogy a függőleges komponensekre

$$K \cos \alpha = mg, \quad (4.3.1)$$

a vízszintes komponensekre

$$K \sin \alpha = F. \quad (4.3.2)$$

Innen az  $F$  erő:

$$F = mg \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.3.3)$$

A vízszintes irányú elmozdulás két szöghöz  $\alpha + d\alpha$  és az  $\alpha$  szögekhez tartozó tartozó  $x$  koordináták különbsége, azaz

$$dx = l \sin(\alpha + d\alpha) - l \sin \alpha = l \cos \alpha \cdot d\alpha, \quad (4.3.4)$$

ahol felhasználtuk, hogy kis szögekre érvényesek a

$$\cos(d\alpha) = 1, \quad (4.3.5)$$

$$\sin(d\alpha) = d\alpha \quad (4.3.6)$$

közelítések. Az elemi munka kifejezése

$$dW = mg \operatorname{tg} \alpha \cdot l \cos \alpha \cdot d\alpha = mgl \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (4.3.7)$$

amellyel a teljes végzett munka:

$$W = \int_0^\alpha mgl \sin \alpha \cdot d\alpha = mgl(1 - \cos \alpha). \quad (4.3.8)$$

**4.4. Feladat:** (HN 6B-39) Egy 48 km/h sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

Megoldás: A teljesítmény

$$P = \frac{dW}{dt}, \quad (4.4.1)$$

ahol a  $dW$  elemi munka

$$dW = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (4.4.2)$$

Ezt behelyettesítve a teljesítmény

$$P = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{v} = 12000 \text{ W}. \quad (4.4.3)$$

**4.5. Feladat:** (HN 6C-57) Egy testet a koordinátarendszer origójából egyenes vonalban állandó  $\mathbf{F} = f_1 \hat{\mathbf{x}} + f_2 \hat{\mathbf{y}}$  ( $f_1 = 2\text{N}$ ;  $f_2 = 4\text{N}$ ) erővel az  $\mathbf{r} = s_1 \hat{\mathbf{x}} + s_2 \hat{\mathbf{y}}$  ( $s_1 = 1\text{m}$ ;  $s_2 = 5\text{m}$ ) helyre viszünk. (Az egyenesvonalú egyenletes mozgás fenntartásához természetesen egyéb kényszererők is fellépnek.) Határozzuk meg az  $\mathbf{F}$  erő munkáját

(a) közvetlenül az  $\mathbf{F} \Delta \mathbf{r}$  skaláris szorzattal,

(b) az  $|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$  szorzattal!

### Megoldás:

(a) A munkát a skaláris szorzattal számolva

$$W = f_1s_1 + f_2s_2 = 22\text{ J} \quad (4.5.1)$$

adódik.

(b) Az erő nagysága  $|\mathbf{F}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{20}$  N, míg az elmozdulás nagysága  $|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{26}$  m. A két vektor által bezárt szög

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}}{|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|} = \frac{22}{\sqrt{20}\sqrt{26}}. \quad (4.5.2)$$

A kiszámolt értékeket összeszorozva  $W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta = 22$  J.

**4.6. Feladat:** (HN 6C-58) Egy fiú a  $m_0 = 3$  kg tömegű,  $l_0 = 2$  m hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy a másik vége éppen a leér a földre.

(a) Határozzuk meg, hogy miként változik a gyerek által kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel  $s$  távolsággal lejjebb eresztli!

(b) A  $W = \sum_i \mathbf{F}_i \Delta\mathbf{s}_i$  összegzés vagy a  $W = \int \mathbf{F}d\mathbf{s}$  integrál felhasználásával számítsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez, míg a teljes láncot a földre eresztli!

### Megoldás:

(a) Jelölje  $\lambda = \frac{m_0}{l_0}$  a hosszegységenkénti tömeget. Az  $s$  távolsággal lejjebb eresztett lánc azon részének tömege, amelyet még tartani kell:

$$m(s) = m_0 - \lambda s = m_0 - \frac{m_0}{l_0}s. \quad (4.6.1)$$

Az ehhez szükséges erő:

$$F(s) = \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0}s\right)g, \quad (4.6.2)$$

amely felfele mutat.

(b) ( $\alpha$ ) A gyerek által végzett munka a görbe alatti terület kiszámolásával. Mivel az  $F(s)$  erő az  $s$  távolság lineáris függvénye, így az  $F(s)$  egyenes, valamint az  $x$  és az  $y$  tengely által határolt derékszögű háromszög területét kell kiszámolni. A háromszög alapja  $l_0$ , a magassága  $F(s=0) = m_0g$ , így a terület  $\frac{1}{2}m_0gl_0$ . Figyelembe véve, hogy az elmozdulás a ható erővel ellentétes előjelű a végzett munka:

$$W = -\frac{1}{2}m_0gl_0. \quad (4.6.3)$$

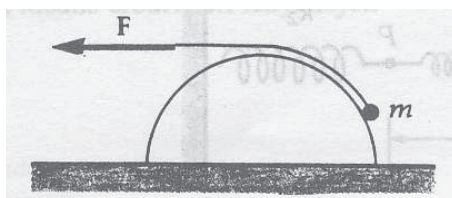
( $\beta$ ) A gyerek által végzett munka integrállal:

$$W = - \int_0^{l_0} F(s) ds = - \int_0^{l_0} \left( m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g ds = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \quad (4.6.4)$$

**4.7. Feladat:** (HN 6C-59) \* A 18. ábrán látható súrlódásmentes félhenger aljáról a tetejére húzunk fel egy  $m$  tömegű testet a henger tetején átvett kötél segítségével.

(a) Határozzuk meg a kötél erőt a hely függvényében!

(b) Az  $\int \mathbf{F} ds$  integrál segítségével határozzuk meg azt a munkát, ami a testnek a henger aljáról a tetejéig való egyenletes sebességű felhúzásához szükséges! A henger sugara  $R$ .



18. ábra.

### Megoldás:

(a) Jelölje  $\varphi$  a tömegponthoz húzott sugár és az  $x$  tengely által bezárt szöget. Az  $mg$  súlyerő mindig  $y$  irányú, az ébredő  $N$  támaszerő kifelé mutató radiális irányú, a  $K$  kötél erő érintő irányú. Így  $v$  sebességű mozgás esetén a radiális komponensekre az

$$ma_{cp} = m \frac{v^2}{R} = mg \sin \varphi - N, \quad (4.7.1)$$

míg az érintő irányú komponensekre az

$$ma_t = K - mg \cos \varphi \quad (4.7.2)$$

összefüggések állnak fenn.

( $\alpha$ ) Amennyiben a  $v$  sebesség állandó, azaz az  $a_t$  tangenciális gyorsulás zérus, így az utóbbi egyenletből a kötél erő:

$$K(\varphi) = mg \cos \varphi. \quad (4.7.3)$$

( $\beta$ ) Ha a tangenciális gyorsulás nem zérus  $a = \frac{dv}{dt} \neq 0$ , úgy a kötél erő

$$K(\varphi) = mg \cos \varphi + ma_t = mg \cos \varphi + m \frac{dv}{dt} \quad (4.7.4)$$



(b) Az elmozdulás a henger felületén (a keresztmetszetet tekintve a kör kerületén) lehetséges, amely kis  $d\varphi$  szög esetén

$$ds = R d\varphi. \quad (4.7.5)$$

A végzett munkát a  $W = \int F_s ds$  definíció alapján számoljuk.

( $\alpha$ ) Abban az esetben amikor egyenletes mozgást feltételünk a

$$W = \int_0^{90^\circ} K(\varphi) R d\varphi = \int_0^{90^\circ} mgR \cos \varphi d\varphi = mgR, \quad (4.7.6)$$

integrál adja. Ez az eredmény várható volt, hiszen ez a helyzeti energia megváltozását adja.

( $\beta$ ) Ha figyelembe vesszük, hogy a sebesség nem feltétlenül állandó, akkor a végzett munka a (4.7.4) második tagjának integráltjával

$$W' = \int m \frac{dv}{dt} ds \quad (4.7.7)$$

több. Mivel  $ds = v dt$ , így

$$W' = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dv}{dt} v dt = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2, \quad (4.7.8)$$

ahol  $t_1$  a kezdeti,  $t_2$  a végső időpont, míg  $v_1$  a kezdő-,  $v_2$  a végsebesség. Így az összes végzett munka a nem egyenletes sebességű esetben

$$W = mgR + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (4.7.9)$$

**4.8. Feladat:** (HN 6C-73) \* A 4 kg tömegű, nyugalomban lévő testet a rá ható változó erő az  $x = 2t - 3t^2 + t^3$  függvény szerint mozgat. (Az  $x$ -et méterben, a  $t$ -t másodpercben mérjük.) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez ez az erő a mozgás első három másodpercében!

Megoldás: A test sebessége, mint az idő függvénye:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2 - 6t + 3t^2. \quad (4.8.1)$$

A 3. másodpercben a sebesség  $v(3s) = 11$  m/s. A végzett munka – figyelembe véve, hogy a test nyugalomból indult –

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = 242 \text{ J}. \quad (4.8.2)$$

**4.9. Feladat:** (HN 6C-75) Az  $m$  tömegű test a nehézségi erő hatására szabadon esik. Mutassuk meg, hogy  $h$  távolság megtétele alatt a nehézségi erő átlagos teljesítménye:  $P_{\text{átl}} = m\sqrt{g^3h/2}$ !

Megoldás: Az eső test sebessége  $v = gt$ , kinetikus energiája

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2. \quad (4.9.1)$$

A  $h$  magasságból történő eséshez tartozó idő  $t = \sqrt{2h/g}$ . A teljesítmény – a behelyettesítések elvégzése után –

$$P = \frac{E}{t} = m\sqrt{\frac{g^3h}{2}}. \quad (4.9.2)$$

Ez igazolja a feladat állítását.

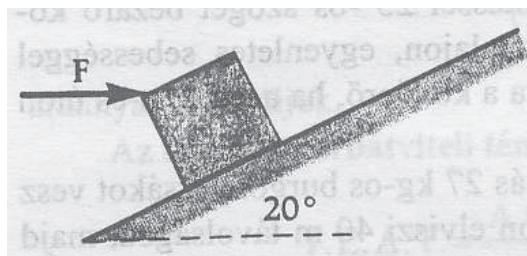
## Munkatétel

**4.10. Feladat:** (HN 6B-23) A 19. ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes 27 N nagyságú erővel tolnunk fel egy  $20^\circ$ -os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180.

(a) Mekkora a test gyorsulása?

(b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé!

(c) Válaszoljunk a (b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!



19. ábra.

Megoldás: Jelölések:  $m = 2$  kg;  $F = 27$  N;  $\alpha = 20^\circ$  és  $\mu = 0,180$ .

(a) A mozgásegyenletek felírásához bontsuk fel az  $F$  erőt lejtőirányú, felfele mutató ( $F \cos \alpha$ ) és lejtőre merőlegesen lefele mutató ( $F \sin \alpha$ ) komponensekre. A felfele mozgást pozitív előjelűnek tekintve a lejtő irányú mozgásegyenlet

$$ma = F \cos \alpha - mg \sin \alpha - \mu N. \quad (4.10.1)$$

A  $N$  támaszerő a

$$0 = N - mg \cos \alpha - F \sin \alpha \quad (4.10.2)$$

egyenletből fejezhető ki. A két egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{m} - g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha = 6,74 \text{ m/s}^2. \quad (4.10.3)$$

(b) Az  $s$  út megtétele utáni sebesség

$$v = \sqrt{2sa} = 6,36 \text{ m/s}. \quad (4.10.4)$$

(c) A testre ható lejtőirányú (felfele mutató) eredő erő

$$F' = F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (4.10.5)$$

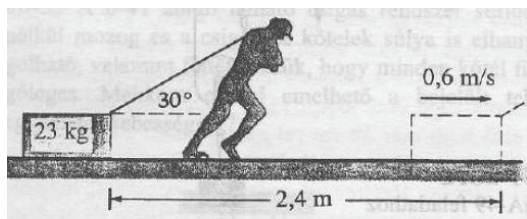
amelynek munkája változtatja meg a test mozgási energiáját

$$\frac{1}{2}mv^2 = F's = (F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha)s. \quad (4.10.6)$$

Innen a  $v$  sebesség

$$v = 6,36 \text{ m/s}. \quad (4.10.7)$$

**4.11. Feladat:** (HN 6B-28) A 20. ábrán látható ember nyugalmi helyzetből indulva 2,4 m távolságra húz el egy 23 kg-os ládát az érdes ( $\mu = 0,5$ ) padlón. A láda végsebessége 0,6 m/s. A munkatétel alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt fejtett ki az ember?



20. ábra.

**Megoldás:** A testre ható erő – ez végzi a gyorsítást – vízszintes komponense:

$$F \cos \alpha - \mu N, \quad (4.11.1)$$

ahol  $N$  az asztaltól a testre ható támaszerő:

$$N = mg - F \sin \alpha. \quad (4.11.2)$$

A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W, \quad (4.11.3)$$

ahol  $W$  a testen végzett munka,  $v_1$  a kezdeti,  $v_2$  végsebesség. A munka kifejezése most

$$W = (F \cos \alpha - \mu N)s, \quad (4.11.4)$$

ahol az  $s = 2,4$  m a megtett út. Figyelembe véve, hogy  $v_1 = 0$ , a fenti kifejezésekből a hatóerőre

$$F = \frac{\mu mgs + \frac{1}{2}mv_2^2}{s(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = 104,6\text{N} \quad (4.11.5)$$

adódik.

**4.12. Feladat:** (HN 8B-29) Egy 5 g tömegű 700 m/s sebességű golyó behatol egy rögzített fakockába és megáll benne. Tegyük fel, hogy a fakocka  $8 \cdot 10^3$  N nagyságú állandó erőt fejt ki a golyóra, míg az meg nem áll. Határozzuk meg

- mennyi idő alatt áll meg a golyó?
- milyen mélyen hatol be a fába?
- mennyi munkát végez a fakocka, amíg a golyó meg nem áll?
- mennyivel változik meg a golyó mozgási energiája?

**Megoldás:** A koordinátarendszer tengelye mutasson balról jobbra. Jelöljük az adatokat:  $m = 5$  g;  $v_0 = 700$  m/s (tételezzük fel, hogy a golyó balról jobbra halad) és így  $F = -8 \cdot 10^3$  N.

(a) Először a golyó gyorsulását számoljuk, amely

$$a = \frac{F}{m} = -1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}^2. \quad (4.12.1)$$

A megállásig eltelt idő a  $v(t) = 0 = at + v_0$  összefüggésből

$$t = \frac{v_0}{-a} = 4,375 \cdot 10^{-4} \text{ s}. \quad (4.12.2)$$

(b) A kiszámolt adatok felhasználásával a megtett út

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0,153 \text{ m}. \quad (4.12.3)$$

(c) A fakocka által végzett munka

$$W = F \cdot s = -1225 \text{ J.} \quad (4.12.4)$$

(d) A golyó kinetikus energiájának megváltozása

$$\Delta E_k = W = -1225 \text{ J.} \quad (4.12.5)$$

**4.13. Feladat:** A  $d$  vastagságú deszkába  $m$  tömegű  $v_0$  sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék  $v$  sebessége, ha

(a) a deszkában állandó a ható  $F$  erő,

(b) a deszkában a behatolási mélységtől függő  $F(x) = cx^2$  erő fékezi? (A  $c$  konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W, \quad (4.13.1)$$

ahol  $W$  a testen végzett munka. Ami az a, esetben:

$$W = -Fd, \quad (4.13.2)$$

és a b, esetben:

$$W = -\int_0^d cx^2 dx = -\frac{1}{3}cd^3. \quad (4.13.3)$$

Ezekkel a sebességek: a,

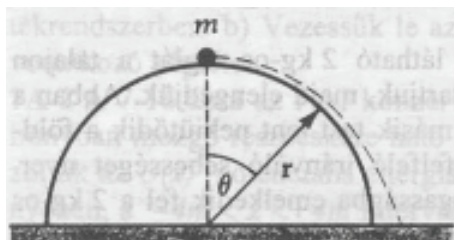
$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{1}{2}mv_0^2 - Fd \right)}, \quad (4.13.4)$$

és b,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{3}cd^3 \right)}. \quad (4.13.5)$$

## Munkavégzés konzervatív erőterben. Potenciális energia

**4.14. Feladat:** (HN 7B-18) Egy kicsiny,  $m$  tömegű test a sima,  $r$  sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetéből kissé kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. Mekkora a függőlegessel bezárt szög, amikor a test elhagyja a gömb felszínét?



21. ábra.

**Megoldás:** A potenciális energia zérus szintje legyen a félgömb alján. Így a helyzeti energia mozgás kezdetén  $E_{p_1} = mgr$ , a kinetikus energia  $E_{k_1} = 0$  mivel a test áll. A felülettől történő elválás pillanatában:  $E_{p_2} = mgr \cos \theta$ , a mozgási energia  $E_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2$ . A mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, így a mechanikai energia megmaradó mennyiség, azaz írhatjuk:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \quad (4.14.1)$$

Behelyettesítés után:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgr \cos \theta. \quad (4.14.2)$$

A körmozgás feltétele:

$$\frac{mv^2}{r} = mg \cos \theta - N, \quad (4.14.3)$$

ahol a jobboldal első tagja a súlyerő radiális komponense, az  $N$  a támaszerő. Az elválás pillanatában:

$$N = 0. \quad (4.14.4)$$

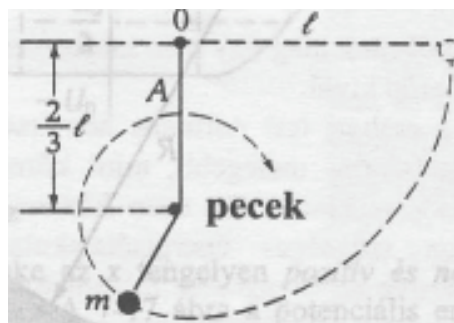
Az egyenletek megoldása:

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \rightarrow \theta = 48^\circ. \quad (4.14.5)$$

**4.15. Feladat:** (HN 7B-21) Egy  $m$  tömegű testet  $l$  hosszúságú kötélre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. Az  $O$  felfüggesztési ponttól  $2/3l$  távolságban kicsiny pöcköt helyeztünk el, melybe a kötéllengése során beakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy  $1/3l$  sugarú függőleges körpályára tér át. Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az  $A$  pontban, ami a pöckök elérése utáni legmagasabb helye a testnek!

**Megoldás:** A potenciális energia zérus szintje legyen az  $A$  pont magasságában. Így a mechanikai energia megmaradás tétele miatt egyszerűen

$$mg \frac{1}{3}l = \frac{1}{2}mv^2. \quad (4.15.1)$$



22. ábra.

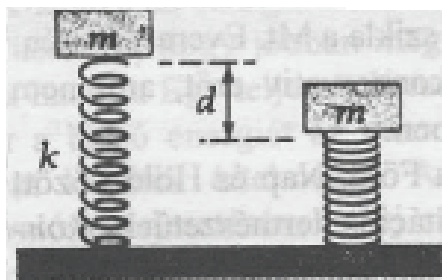
Másrészt a pecek körüli körmozgásra az  $A$  pontban az

$$m \frac{v^2}{\frac{1}{3}l} = K + mg \quad (4.15.2)$$

összefüggés írható, ahol  $K$  a kötél erő. A két egyenletből

$$K = mg. \quad (4.15.3)$$

**4.16. Feladat:** (HN 7A-10) Egy  $m$  tömegű téglát úgy van felerősítve, hogy a  $k$  rugóállandójú rugót éppen csak érinti. A téglát ekkor elengedjük nyugalmi helyzetéből. Határozzuk meg, hogy



23. ábra.

milyen  $d$  távolságra jut el a téglát az elengedés után!

**Megoldás:** Mivel a mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, a mechanikai energia megmarad. Azaz a kezdeti kinetikus energia  $E_{k_1}$  és potenciális energia  $E_{p_1}$  összege egyenlő a tekintett mozgás végi kinetikus  $E_{k_2}$  és potenciális energia  $E_{p_2}$  összegével:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \quad (4.16.1)$$

Mivel a test kezdetben és az alsó helyzetben is áll, így  $E_{k_1} = 0$  és  $E_{k_2} = 0$ . A helyzeti energia zérus pontját a talajra helyezve  $E_{p_1} = mgh$ , ahol  $h$  a téglát talajtól való távolsága. Az  $E_{p_2}$  a téglát alsó

helyzethez tartozó helyzeti energiájából és a rugalmas energiából áll, azaz  $E_{p_2} = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2$ .

A fenti egyenletbe helyettesítve:

$$mgh = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2. \quad (4.16.2)$$

Ebből a  $d$  összenyomódás mértéke:

$$d = \frac{2mg}{k}. \quad (4.16.3)$$

(Megjegyzés: Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha pl. a felső helyzetet választjuk a potenciális energia zérus pontjának.)

**4.17. Feladat:** A völgy fölött  $h$  magasságban átvezető viaduktról gumiköteleken ugrálnak alá (bungee jumping). Milyen  $L$  hosszúságúnak válassza az  $m$  tömegű ugró a  $k$  irány erejű gumikötelet, hogy a talajt éppen érintse? (Az ugró kiterjedése legyen pontszerű.)

**Megoldás:** Az ugró a mozgás elején és a talaj érintése pillanatában áll, így mozgási energiája mindkét esetben zérus. Így a kezdeti  $mgh$  helyzeti energia – a völgy alját zérus szintnek véve – a gumikötélben tárolódó rugalmas energiává alakul, azaz:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-L)^2. \quad (4.17.1)$$

Itt a  $h-L$  a gumikötél megnyúlása. Az egyenlet megoldása:

$$L = h \pm \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \quad (4.17.2)$$

Innen a fizikailag értelmes megoldás, így a kezdeti (beállítandó) hossz:

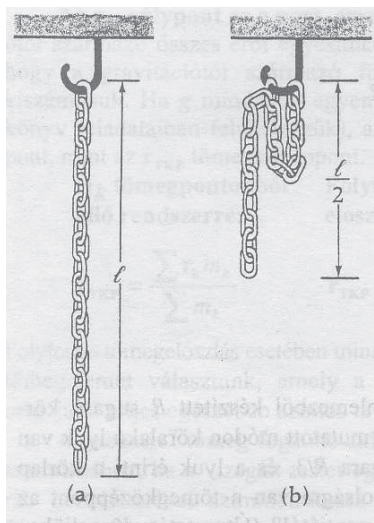
$$L = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \quad (4.17.3)$$

**4.18. Feladat:** (HN 10B-11) Az  $m$  tömegű,  $l$  hosszúságú lánc kampón lóg a 24. ábra szerint. Számítsuk ki azt a munkát, amely a lánc középső láncszemének a kampóra történő felakasztásához szükséges!

**Megoldás:** Legyen a potenciális energia zérus pontja a teljesen leengedett lánc legalsó pontja (24a ábra). Ennek megfelelően az  $m$  tömegű lánc tömegközéppontja  $\frac{1}{2}l$  magasságban van, így  $E_1$  helyzeti energiája

$$E_1 = mg\frac{1}{2}l. \quad (4.18.1)$$





24. ábra.

A felakasztott lánc egyes darabjainak energiái összege a 24.b ábrán balról jobbra haladva

$$E_2 = \frac{1}{2}mg\frac{3}{4}l + \frac{1}{4}mg\frac{7}{8}l + \frac{1}{4}mg\frac{7}{8}l = \frac{13}{16}mgl. \quad (4.18.2)$$

A szükséges munka a két potenciális energia különbsége

$$W = E_2 - E_1 = \frac{5}{16}mgl. \quad (4.18.3)$$

**4.19. Feladat:** \* Az  $m_0$  tömegű  $l_0$  hosszúságú lánc a földön hever. A végét elkezdjük állandó  $v_0$  sebességgel emelni. a, Mekkora erőt kell ehhez kifejteni? b, Mekkora a végzett összes munka, amikor a kötéel vége éppen elhagyja a talajt?

**Megoldás:** a, Tekintsük a közbenső  $t$  időpontot, amikor már  $v_0t$  hossz felemelkedett és  $v_0$  sebességű. E pillanatban az  $m$  tömegű darabnak a helyzeti energiája:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}mgh = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_0}{l_0}v_0t}_m g \underbrace{v_0t}_h \quad (4.19.1)$$

tömegű darabra. Másrészt ennek az  $m$  tömegű darabnak a kinetikus energiája:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0 t v_0^2. \quad (4.19.2)$$

A teljes energia:

$$E(t) = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t^2 g + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^3 t, \quad (4.19.3)$$

amelyből a  $P(t)$  teljesítmény:

$$P(t) = \frac{dE}{dt} = \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t g + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^3. \quad (4.19.4)$$

A  $P(t) = F v$  összefüggésből a láncra

$$F(t) = \frac{P(t)}{v_0} = \frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 \quad (4.19.5)$$

erővel kell hatni. b, A végzett munka egyszerűen kiszámolható úgy, hogy a lánc tömegközéppontja  $\frac{l_0}{2}$  magasságra emelkedett, másrészt a lánc sebessége  $v_0$ . A helyzeti energiája  $\frac{m_0 g l_0}{2}$ , a mozgási energiája  $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$ , azaz

$$W = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \quad (4.19.6)$$

*Megjegyzés:* E munka a következőképpen is kiszámolható. A felemeléshez szükséges idő:  $t_f = \frac{l_0}{v_0}$ . A munka  $W = \int F dx = \int F v dt$  alapján:

$$W = \int_0^{\frac{l_0}{v_0}} \left( \frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 \right) v_0 dt = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \quad (4.19.7)$$

## Energiatétel

**4.20. Feladat:** Egy 60 kg-os láda 4 m magasról lecsúszik egy a vízszintessel  $30^\circ$ -os szöget bezáró lejtőn. Mekkora a súrlódási erő munkája ezalatt, ha a láda 5 m/s sebességet ér el?

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 60$  kg,  $h = 4$  m,  $\alpha = 30^\circ$  és  $v = 5$  m/s. A mechanikai energia megmaradást "elrontó" disszipatív erő munkáját a következőképpen tudjuk figyelembe venni:

$$U_{p_2} + E_{k_2} = U_{p_1} + E_{k_1} + W, \quad (4.20.1)$$

ahol végső potenciális és kinetikus energiát összegét (mechanikai energia) úgy kapjuk, hogy a kezdeti potenciális és kinetikus energiához hozzáadjuk a súrlódási végzett munkát. Mivel a kezdeti mechanikai energia nagyobb mint a végső, biztosak lehetünk benne, hogy  $W$  negatív. A potenciális energia zérus szintjét a lejtő aljára a jelen esetre a következő egyenlet írható:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h + W. \quad (4.20.2)$$

Az adatok behelyettesítése után

$$W = -1650 \text{ J}. \quad (4.20.3)$$

**4.21. Feladat:** Az  $\alpha$  hajlásszögű,  $\mu$  súrlódási együtthatójú lejtő alján felfelé lökünk  $v_0$  sebességgel egy  $m$  tömegű testet. A test a mozgás tetőpontját elérve visszacsúszik. Mekkora lesz a sebessége a lejtő alján? A feladatot oldjuk meg a

- (a) dinamikai egyenletek megoldásával és
- (b) az energiatétel felhasználásával!

Megoldás:

(a) A felfele mozgásnál legyen a koordinátatengely irányítása pozitív a felfele irányban. Ekkor a test lejtőirányú mozgásegyenlete

$$ma_{fel} = -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (4.21.1)$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{fel} = -g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha. \quad (4.21.2)$$

A felfele mozgás ideje a  $0 = v_0 + a_{fel}t$  egyenletből

$$t_{fel} = \frac{v_0}{-a_{fel}}, \quad (4.21.3)$$

amellyel a idő alatt a megtett út

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (4.21.4)$$

A lefele csúszásnál fordítsuk meg a koordinátatengelyt, a pozitív irányítás mutasson lefele. Ekkor a mozgásegyenlet

$$ma_{le} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (4.21.5)$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{le} = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha. \quad (4.21.6)$$

A lefele mozgás ideje a  $v = a_{le}t$  egyenletből

$$t_{le} = \frac{v}{a_{le}}, \quad (4.21.7)$$

amely idő alatt a megtett  $s$  út

$$s = \frac{1}{2}a_{le}t^2 = \frac{v^2}{2a_{le}}. \quad (4.21.8)$$

E két egyenletből a sebesség a lejtő alján

$$v = \sqrt{2sa_{le}}. \quad (4.21.9)$$

Az  $s$  és  $a_{le}$  korábban kapott kifejezéseit behelyettesítve a sebességre a

$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} \quad (4.21.10)$$

eredmény adódik.

(b) Az energiatétel azt állítja, hogy a végső kinetikus és potenciális energia összege egyenlő a kezdeti kinetikus és potenciális energia összegével plusz a testen végzett munkával, azaz

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W. \quad (4.21.11)$$

A felfele mozgásnál  $U_{p1} = 0$ ;  $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2$ ;  $U_{p2} = mgs \sin \alpha$ ;  $E_{k2} = 0$  és  $W = -\mu mgs \cos \alpha$ . Egy egyenletbe összeírva

$$mgs \sin \alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgs \cos \alpha. \quad (4.21.12)$$

Ebből az  $s$  út

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (4.21.13)$$

A lefele csúszásnál

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W, \quad (4.21.14)$$

ahol  $U_{p1} = mgs \sin \alpha$ ;  $E_{k1} = 0$ ;  $U_{p2} = 0$ ;  $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$  és  $W = -\mu mgs \cos \alpha$ . Egy egyenletbe írva

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs \sin \alpha - \mu mgs \cos \alpha. \quad (4.21.15)$$

Az  $s$  utat a (4.21.13) egyenletből behelyettesítve a sebességre a fentiekkel egyező

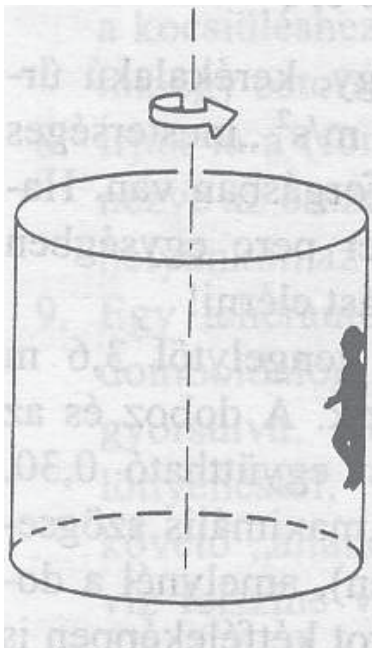
$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} \quad (4.21.16)$$

eredményt kapjuk.

## 5. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből

### Centrifugális erő

**5.1. Feladat:** (HN 13B-20) Egy népszerű vidámparki mutatványnál a látogatók egy függőleges tengely körül forgó henger belső falának támaszkodnak a 25. ábrának megfelelően. Ezután a padlót lesüllyesztenek, és hagyják, hogy a látogatók a centrifugális erőből a falhoz "odaszögezve" és a súrlódási erő következtében a lecsúszástól védve a falon maradjanak. A henger  $R$  sugarának, az  $\omega$  szögsebességnek és a  $g$  nehézségi gyorsulásának függvényében határozzuk meg azt



25. ábra.

a legkisebb  $\mu$  nyugalmi súrlódási együtthatót, amely a lecsúszást megakadályozza. A feladatot forgó vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!

**Megoldás:** A forgó vonatkoztatási rendszerben a falhoz "odaszögezett" látogatóra négy erő hat. A centrifugális erő (tehetetlenségi erő), amely radiálisan kifelé mutat és nagysága  $F_{cf} = mR\omega^2$ . A falon radiálisan befelé mutat az  $N$  támaszerő, amelynek nagysága pontosan  $mR\omega^2$ . Függőlegesen lefelé hat az  $mg$  súlyerő, ezzel ellentétesen az  $F_s$  súrlódási erő, és a kettő egymással egyenlő. Az fentieket matematikailag összefoglalva:

$$mg = F_s = \mu N = \mu mR\omega^2, \quad (5.1.1)$$

ahonnan

$$\mu = \frac{g}{R\omega^2}. \quad (5.1.2)$$

**5.2. Feladat:** Egy  $M = 1,499 \cdot 10^{25}$  kg tömegű,  $R = 10000$  km sugarú bolygó északi sarkán  $k = 100$  N/m direkciós erejű rugóra  $m = 1$  kg tömegű testet lógatunk. A bolygó  $\omega = 10^{-4}$  1/s szögsebességgel forog.

(a) Mekkora a rugó megnyúlása?

(b) Ezt követően a mérést az egyenlítőn megismételjük. Mennyi ekkor a rugó megnyúlása?

**Megoldás:**

(a) A bolygó északi sarkán végzett mérés során

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = k\Delta x, \quad (5.2.1)$$

ahol  $\Delta x$  a rugó megnyúlása, amely

$$\Delta x = \gamma \frac{mM}{kR^2} = 0,1 \text{ m} = 100 \text{ mm}. \quad (5.2.2)$$

(b) Az egyenlítőn figyelembe kell vennünk a centrifugális erőt, amellyel az egyenlet úgy módosul, hogy

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - mR\omega^2 = k\Delta x'. \quad (5.2.3)$$

Innen a  $\Delta x'$  megnyúlás

$$\Delta x' = \gamma \frac{mM}{kR^2} - \frac{mR\omega^2}{k} = 0,099 \text{ m} = 99 \text{ mm}, \quad (5.2.4)$$

azaz a rugó megnyúlása 1 mm-rel kevesebb.

**5.3. Feladat:** (HN 14C-39) Az  $\omega$  szögsebességgel forgó ringlispíl középpontjától  $r$  távolságra lévő helyen  $h$  magasságból egy tárgyat ejtenek a padlóra. A mozgást a ringlispíl vonatkoztatási rendszeréből vizsgálva mutassuk meg, hogy az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság jó közelítéssel  $\omega^2 rh/g$ . Milyen feltételezésekkel kell élni a feladat megoldása során?

Megoldás: A tárgy

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5.3.1)$$

idő alatt esik. A forgó vonatkoztatási rendszerben az

$$a_{cf} = r\omega^2 \quad (5.3.2)$$

centrifugális gyorsulása lesz, amely kifelé mutató radiális irányú. E gyorsulással az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_{cf} (\Delta t)^2 = \frac{\omega^2 rh}{g}. \quad (5.3.3)$$

A forgás közbeni szögelfordulás

$$\Delta \varphi = \omega \Delta t. \quad (5.3.4)$$

Ha azt tekintjük, hogy a test az álló rendszerből nézve érintő irányban  $r\omega$  sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az elejtés után, akkor az ehhez tartozó elmozdulás

$$\Delta x = r\omega\Delta t. \quad (5.3.5)$$

Az ehhez az elmozduláshoz tartozó  $\alpha$  központi szög

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{r} = \omega\Delta t. \quad (5.3.6)$$

Ahhoz, hogy  $\varphi$  és  $\alpha$  közelítőleg megegyezzenek egymással, az  $\omega\Delta t \ll 1$  feltétel teljesülése szükséges.

## Coriolis-erő

**5.4. Feladat:** (HN 14C-30) Írjuk le, hogyan tudna egy személy a forgásban lévő ringlispíl lapján járni úgy, hogy a rá ható Coriolis-erő és a centrifugális erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú legyen! (A ringlispíl forogjon az óra járásával ellentétesen.)

**Megoldás:** Az  $\omega$  szögsebességgel forgó ringlispíl origótól való  $R$  távolságú pontjában a személyre radiális kifelé mutató  $F_{cf} = mR\omega^2$  centrifugális erő hat. Ahhoz, hogy a Coriolis-erő radiális befelé mutató legyen, ahhoz az óra járásával egyezően, az  $R$  sugarú kör érintője irányában kell  $v$  sebességgel haladnia. A Coriolis erő nagysága  $F_{Co} = 2m\omega v$ . A kettő

$$F_{cf} = mR\omega^2 = 2m\omega v = F_{Co} \quad (5.4.1)$$

egyenlőségéből a sebességre a

$$v = \frac{R\omega}{2} \quad (5.4.2)$$

adódik.

**5.5. Feladat:** Egy forgótárcsa szélén álló ember eldob egy testet vízszintesen a függőleges forgástengely irányába 10 m/s kezdősebességgel. A tárcsa percnként 600-at fordul. Mekkora a tárcsa vonatkoztatási rendszerében a test pályájának kezdeti görbületi sugara?

**Megoldás:** Jelölések:  $v = 10$  m/s és  $f = 600$  1/perc = 10 1/s. A tárcsa szögsebessége  $\omega = 2\pi f = 62,8$  rad/s. A forgó rendszerben a testet a Coriolis-erő téríti el, amelyhez tartozó gyorsulás nagysága

$$a_{Co} = 2\omega v. \quad (5.5.1)$$

Az indulás pillanatában körpályán mozog a test, amely esetén gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (5.5.2)$$

A kettő egyenlőségéből a görbületi sugár

$$R = \frac{v}{2\omega} = 0,159 \text{ m}. \quad (5.5.3)$$

**5.6. Feladat:** (HN 14C-33) A mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső a vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége 1,5 rad/s abban a pillanatban, amikor az 5 g tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből.

- (a) A forgó rendszerben mekkora Coriolis-erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában?  
 (b) Milyen irányú ez az erő?

**Megoldás:** Jelölések:  $\omega = 1,5 \text{ rad/s}$ ;  $m = 5 \text{ g}$  és  $v = 500 \text{ m/s}$ .

(a) A puska csőve az óra járásának megfelelően fordul el, így az  $\omega$  szögsebességvektor függőlegesen lefele mutat. A Coriolis-erő a  $\omega$  szögsebességvektor és a  $\mathbf{v}$  sebességvektorokkal

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (5.6.1)$$

amelynek nagysága – figyelembe véve, hogy  $\boldsymbol{\omega}$  és  $\mathbf{v}$  egymásra merőlegesek

$$F = 2m\omega v = 7,5 \text{ N}. \quad (5.6.2)$$

(b) Az erő iránya jobbról balra mutat.

**5.7. Feladat:** (HN 14C-38) A percnként tízet forgó ringlispál szélén álló kislány 10 m/s vízszintes kezdősebességgel labdát dob a forgástengely felé. Úgy látja, hogy a pályagörbe jobbra kanyarodik.

- (a) Számítsuk ki a pályagörbe kezdeti vízszintes görbületi sugarát!  
 (b) Amikor a labdát dobó kislány a ringlispál közepe felé néz, jobbra vagy balra látja elmozdulni a távoli tájat?

**Megoldás:** Jelölések: A fordulatszám  $f = 10 \text{ 1/perc} = 1/6 \text{ 1/s}$ , amellyel a szögsebesség  $\omega = 2\pi f = 1,047 \text{ rad/s}$ ;  $v = 10 \text{ m/s}$ .

(a) A labda Coriolis-gyorsulása

$$a_{Co} = 2\omega v, \quad (5.7.1)$$



amely éppen az elkanyarodás

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (5.7.2)$$

gyorsulása. Itt  $r$  a pályagörbe görbületi sugara. A két gyorsulás egyenlőségéből

$$r = \frac{v}{2\omega} = 9,55 \text{ m}. \quad (5.7.3)$$

(b) Mivel a pályagörbe jobbra kanyarodik, így a ringlispól az óra járásával ellentétes irányban forog. Az ilyen irányban forgó rendszerből nézve a táj balról jobbra látszik mozogni.

**5.8. Feladat:** A Föld napi forgása következtében az eső testek kelet felé elhajlanak.

(a) Mekkora az Egyenlítőre szabadon eső test keleti irányú gyorsulása?

(b) Számítsuk ki, hogy a becsapódás pillanatában mekkora a keleti irányú sebessége annak a testnek, amely  $h = 100 \text{ m}$  magasból esik szabadon az Egyenlítőre!

Megoldás:

(a) Az Egyenlítőn szabadon eső testnek a Coriolis-erő következményeként – figyelembe véve, hogy a Föld  $\omega$  szögsebessége és a leeső test  $v$  sebessége egymásra merőleges –

$$a(t) = 2\omega v = 2\omega gt \quad (5.8.1)$$

keleti irányú gyorsulása van.

(b) A  $t$  időtartamú esés során az  $a(t) = 2\omega gt$  egyenes alatti terület éppen a keleti irányú sebesség:

$$v(t) = \omega gt^2. \quad (5.8.2)$$

Más úton:

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t 2\omega gt dt = \omega gt^2. \quad (5.8.3)$$

Az esés ideje  $4,47 \text{ s}$ ,  $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$  adatokkal számolva:

$$v_{kelet} = 1.45 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}. \quad (5.8.4)$$

## 6. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből

### Impulzustétel, impulzusmegmaradás törvénye

**6.1. Feladat:** Egy  $m = 4$  kg tömegű kalapács  $v_0 = 6$  m/s sebességgel érkezik a szög fejéhez és  $\Delta t = 0,002$  s alatt fékeződik le, miközben a szög behatol a fába. (A szög tömege elhanyagolható a kalapács tömegéhez viszonyítva.)

- Számítsuk ki az átlagos fékező erőt!
- Számítsuk ki a szög útját a fában!
- Mekkora munkát végzett a fa a szögön?

Megoldás:

- A szögre ható átlagos fékező erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -12000 \text{ N}, \quad (6.1.1)$$

ahol a negatív előjel a fékező hatást fejezi ki.

- A szög átlagos gyorsulása a sebességváltozásával számolható ki. Amennyiben a szög nem deformálódott az ütés alatt, a kezdeti sebessége meg kell hogy egyezzen a kalapács sebességével. Ezért a sebesség megváltozása  $\Delta v = -v_0$ . A szög gyorsulása ezért

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -3000 \text{ m/s}^2, \quad (6.1.2)$$

amit felhasználhatunk a szög által megtett út meghatározásához.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0,006 \text{ m} = 6 \text{ mm}. \quad (6.1.3)$$

- A fa által végzett munka a szögön:

$$W = F s = -72 \text{ J}. \quad (6.1.4)$$

**6.2. Feladat:** (HN 8B-27) A kezdetben nyugalomban lévő 5 kg tömegű testre 5 másodpercig 6 N állandó erő hat, majd az erő 3 s alatt egyenletesen zérusra csökken. Mekkora sebességet ér el a test?

Megoldás: Jelölések:  $m = 5$  kg;  $t_1 = 5$  s;  $F = 6$  N és  $t_2 = 8$  s a második időintervallum vége.

A test impulzusváltozását kell kiszámoljuk. A  $0 \leq t \leq t_1 = 5$  s időintervallumban az impulzusváltozás

$$\Delta I_1 = F t_1 = 30 \text{ kgm/s}. \quad (6.2.1)$$

A második szakaszon az erő időbeli függése

$$F(t) = \frac{F}{t_2 - t_1} (t_2 - t). \quad (6.2.2)$$

A második időintervallumon történő impulzusváltozás az egyenes alatti területtel egyszerűen számolható, amely

$$\Delta I_2 = \frac{F}{2}(t_2 - t_1) = 9 \text{ kgm/s.} \quad (6.2.3)$$

A teljes impulzusváltozás

$$\Delta I = \Delta I_1 + \Delta I_2 = 39 \text{ kgm/s,} \quad (6.2.4)$$

amelyet a tömeggel osztva a végsebességet kapjuk:

$$v = \frac{\Delta I}{m} = 7,8 \text{ m/s.} \quad (6.2.5)$$

**6.3. Feladat:** (HN 8C-42) \* Egy 8 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva  $F = At - Bt^2$  erő hatására gyorsul, ahol  $A = 24 \text{ N/s}$  és  $B = 1,2 \text{ N/s}^2$ .

(a) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet ér el a tömeg mielőtt újra megállna!

(b) Mennyi idő múlva következik ez be?

Megoldás:

(a) A test impulzusváltozása

$$\Delta I = \int_0^t F(t) dt = \int_0^t (At - Bt^2) dt = \frac{1}{2} At^2 - \frac{1}{3} Bt^3. \quad (6.3.1)$$

Innen a sebesség

$$v(t) = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{2} At^2 - \frac{1}{3} Bt^3 \right). \quad (6.3.2)$$

A sebesség maximuma akkor van, ha a gyorsulás zérus, azaz most

$$t = \frac{A}{B}. \quad (6.3.3)$$

A behelyettesítések után a maximális sebesség

$$v_{max} = \frac{1}{6m} \frac{A^3}{B^2} = 6,94 \text{ m/s.} \quad (6.3.4)$$

(b) A maximális sebesség elérése  $t = 20 \text{ s}$  idő múlva következik ez be.

**6.4. Feladat:** (HN 8C-43) \* A 2,5 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva  $F = At^2$  erő hatására gyorsul, ahol  $A = 0,75 \text{ N/s}^2$ .

(a) Határozzuk meg a test sebességét 15 másodperccel az erő alkalmazása után!

(b) Mekkora állandó erővel lehetne elérni ezt a sebességet?

Megoldás:

(a) A test gyorsulása

$$a = \frac{1}{m}At^2, \quad (6.4.1)$$

amellyel a sebesség

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t \frac{1}{m}At^2 dt = \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{3}At^3 \right]_0^{15} = 337,5 \text{ m/s}. \quad (6.4.2)$$

(b) Ha az erő állandó, akkor

$$v = at = \frac{F}{m}t, \quad (6.4.3)$$

ahonnan az erő

$$F = \frac{mv}{t} = 56,25 \text{ N} \quad (6.4.4)$$

kell legyen ekkora sebesség eléréséhez.

**6.5. Feladat:** Egy  $M = 80 \text{ kg}$  tömegű ember jégen egy helyben állva eldob vízszintes irányban egy  $m = 20 \text{ kg}$  tömegű golyót. A golyó az embertől mérve  $v_0 = 20 \text{ m/s}$  sebességgel távolodik. Mekkora az ember  $v_M$  sebessége a jéghez viszonyítva? (A jég és az ember közötti súrlódási erő elhanyagolhatóan kicsi.)

Megoldás: Jelölje  $v_m$  a golyó jéghez viszonyított sebességét. Az impulzus megmaradás miatt

$$Mv_M = mv_m. \quad (6.5.1)$$

A golyó és az ember relatív sebessége pedig

$$v_0 = v_m + v_M \quad (6.5.2)$$

A két egyenletből

$$v_M = \frac{m}{m+M} v_0 \quad (6.5.3)$$

Behelyettesítve a számértékeket  $v_M = 4 \text{ m/s}$  adódik.

## Rugalmatlan ütközések

**6.6. Feladat:** Az  $m$  tömegű  $v_0$  sebességű test tökéletesen rugalmatlanul ütközik az  $M$  tömegű álló testtel. Mekkora lesz az ütközés utáni együttes sebességük? Mekkora átlagos erőhatás lép fel köztük, ha az ütközés ideje (a becsapódástól számítva az összeragadásig)  $t$ .

Megoldás: Az impulzus megmaradás miatt:

$$mv_0 = (m+M)v, \quad (6.6.1)$$

ahol  $v$  az összeragadt testek együttes sebessége. Az ütközés utáni együttes sebesség ezért

$$v = \frac{m}{m+M}v_0. \quad (6.6.2)$$

Az ütközés közben fellépő átlagos erőhatás pedig:  $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ , ahol  $\Delta P$  az  $m$  tömegű test impulzusimpulzusváltozása:

$$\Delta P = mv - mv_0 = \frac{m^2}{m+M}v_0 - mv_0 = -\frac{mM}{m+M}v_0. \quad (6.6.3)$$

A negatív előjel arra utal, hogy a  $m$  tömegű test impulzusa csökken. Az  $F$  erő nagysága így

$$F = -\frac{mM}{m+M} \frac{v_0}{t}. \quad (6.6.4)$$

Hasonló megfontolásokból az  $M$  tömegű testre

$$F = \frac{mM}{m+M} \frac{v_0}{t} \quad (6.6.5)$$

erő hat, amely eredmény pont azt mutatja, hogy a kölcsönható erők párosával lépnek fel: azonos nagyságúak és ellentétes irányúak.

**6.7. Feladat:** Két azonos  $m$  tömegű test azonos nagyságú  $v_0$  sebességgel halad, az egyik az  $y$  tengelyen, a másik az  $x$  tengelyen, mindkét esetben a pozitív irányban. Az origóban a testek tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz az együttes sebességvektoruk és annak nagysága?

Megoldás: Az  $y$  tengelyen mozgó test impulzusvektora

$$\mathbf{p}_y = m(0; v_0), \quad (6.7.1)$$

az  $x$  tengelyen mozgó test impulzusvektora pedig

$$\mathbf{p}_x = m(v_0; 0). \quad (6.7.2)$$

Az ütközés utáni  $2m$  tömegű együttes test impulzusa e két impulzusvektor összege, azaz

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_y + \mathbf{p}_x = m(v_0; v_0). \quad (6.7.3)$$

Az összeragadt test sebességvektora pedig

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{2m} = \left( \frac{v_0}{2}; \frac{v_0}{2} \right). \quad (6.7.4)$$

a sebesség nagysága:

$$V = |\mathbf{V}| = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0. \quad (6.7.5)$$

**6.8. Feladat:** (HN 8A-4) Egy  $m$  tömegű  $v_0$  sebességgel mozgó test vele egyenlő tömegű, eredetileg nyugalomban lévő testbe ütközik és összeragad vele. Határozzuk meg a kinetikus energia  $(K - K_0)/K_0$  relatív megváltozását!

**Megoldás:** Az ütközés tökéletes rugalmatlan, így az impulzus megmarad, a kinetikus energia viszont nem. Az impusumegmaradás az

$$mv_0 = 2mv \quad (6.8.1)$$

egyenlettel fejezhető ki, amelyben  $v$  az összeragadt testek végső együttes sebessége. Innen

$$v = \frac{v_0}{2}. \quad (6.8.2)$$

A kezdeti  $K_0$  kinetikus energia

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (6.8.3)$$

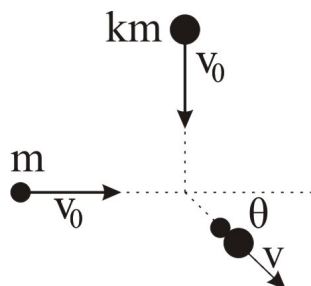
A végső kinetikus energia pedig:

$$K = \frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{4}mv_0^2. \quad (6.8.4)$$

A kinetikus energia  $(K - K_0)/K_0$  relatív megváltozása:

$$\frac{K - K_0}{K_0} = -\frac{1}{2}. \quad (6.8.5)$$

A negatív előjel arra utal, hogy az ütközés mechanikai energiaveszteséggel jár.



26. ábra.

**6.9. Feladat:** (HN 8B-11) Két,  $m$  illetve  $km$  ( $k$  állandó) tömegű test egyenlő  $v_0$  sebességgel halad merőleges irányból a 26. ábrán látható módon közeledik egymáshoz, összeütközik, és összeragadva moognak együtt tovább. Fejezzük ki a végsebességük irányát meghatározó  $\theta$  szöget a  $k$  segítségével!

**Megoldás:** Az ütközés közben megmarad a testek lendülete az  $x$  és  $y$  irányban egyránt. Az összeragadt testek össz lendülete

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} mv_0 \\ kmv_0 \end{pmatrix}. \quad (6.9.1)$$

Az összeragadt testek össz lendületéből meghatározható azok sebességvektora is:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{m(1+k)} = \frac{v_0}{1+k} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}. \quad (6.9.2)$$

A 26. ábrán jelölt  $\theta$  szög meghatározható a  $\mathbf{V}$  sebességvektor komponenseivel:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_y}{V_x} = k. \quad (6.9.3)$$

**6.10. Feladat:** (HN 8B-14) Két,  $m$  illetve  $km$  ( $k$  állandó) tömegű test egyenlő  $v_0$  sebességgel halad a  $+x$  és  $-x$  irányban. Ütközésük után összeragadva haladnak tovább.

(a) Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében, hogy mekkora az összeragadt testek  $v$  sebességének nagysága és iránya?

(b) Mekkora a  $v/v_0$  arány, ha  $k = 2$ ?

**Megoldás:**

(a) Az ütközés folyamatára érvényes a lendületmegmaradás törvénye:

$$mv_0 - kmv_0 = (1+k)mv. \quad (6.10.1)$$

Az egyenlet bal oldala a részrendszerek ütközés előtti lendületeinek összegét írja le, míg a jobb oldal az összeragadt testek összlendületét jelöli. Az egyenletből meghatározható az összeragadt testek együttes sebessége:

$$v = \frac{1+k}{1-k}v_0. \quad (6.10.2)$$

Az eredményből látható, hogy  $k > 1$  esetben az összeragadt testek  $-x$  irányba haladnak, míg  $k < 1$  esetben az ellenkező irányba.

(b)  $k = 2$  esetben a sebességek aránya

$$\frac{v}{v_0} = -3. \quad (6.10.3)$$

**6.11. Feladat:** (HN 9B-7) Fából készült  $M = 800$  g tömegű ballisztikus ingatestbe vízszintes irányból  $m = 20$  g tömegű ólomsörétet lőttünk. A lengésbe jövő ingatest  $h = 10$  cm magasba emelkedik.

(a) Mekkora  $v$  közös sebességgel indul az ingatest-sörét rendszer?

(b) Mekkora  $v_0$  sebességgel csapódik az ingába a golyó? A sörét  $K$  kinetikus energiájának hányadrésze veszett el, azaz fordítódott a fa deformálására, ill. felmelegítésére?

### Megoldás:

(a) Az összeragadt inga-sörét rendszer össz mozgási energiája teljes egészében átalakul helyzeti energiává miközben  $h$  magasságba emelkedik:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh, \quad (6.11.1)$$

mely egyenletből az együttes sebesség

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (6.11.2)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $v \approx 1,414$  m/s adódik.

(b) A golyó becsapódására az impulzus megmaradás tételét alkalmazhatjuk a sörétszemek sebességének meghatározására:

$$mv_0 = (m+M)v. \quad (6.11.3)$$

Az egyenlet segítségével meghatározhatjuk a sörétszemek sebességét:

$$v_0 = \frac{m+M}{m}v. \quad (6.11.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $v_0 \approx 57,98$  m/s adódik. A kezdeti kinetikus energia

$$K = E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 \approx 33,62\text{J}, \quad (6.11.5)$$



míg az ütközés után

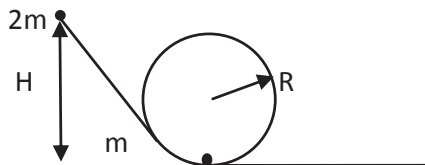
$$E_2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 \approx 0,82\text{J}. \quad (6.11.6)$$

A mechanikai energiának az ütközés során a

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \approx 97,6\%. \quad (6.11.7)$$

része veszett el, illetve alakult át hőenergiává.

**6.12. Feladat:** Egy  $2m$  tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedő lejtőn a 27. ábrának megfelelően. Mekkora  $H$  magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmas ütközés után a pálya alján lévő  $m$  tömegű test végighaladjon a hurkon?



27. ábra.

**Megoldás:** A test mozgását három szakaszra oszthatjuk:

(a) A  $2m$  tömegű test lecsúszik a hurok aljára az ütközés előtti pillanatig. A  $2m$  tömegű test  $H$  magasságból való lecsúszására a

$$2mgH = \frac{1}{2}2mv_0^2 \quad (6.12.1)$$

mechanikai energia-megmaradást kifejező egyenlet írható fel, amelyből az ütközés előtti sebesség

$$v_0 = \sqrt{2gH}. \quad (6.12.2)$$

(b) Ezután a  $2m$  tömegű test rugalmatlanul ütközik az  $m$  tömegű testtel, majd összetapadva mozognak tovább. Az  $m$  tömegű testtel való tökéletesen rugalmatlan ütközésre az impulzus megmaradásának tételét alkalmazzuk

$$2mv_0 = 3mv_1, \quad (6.12.3)$$

ahonnan az ütközés utáni  $v_1$  sebesség

$$v_1 = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2gH}. \quad (6.12.4)$$

(c) Végül az összetapadt  $3m$  tömegű test feljut a hurok tetejére és éppen áthalad a tetőponton. A  $2R$  magas hurok tetején az összeragadt  $3m$  tömegű test  $v_2$  sebessége az

$$\frac{1}{2}3mv_1^2 = \frac{1}{2}3mv_2^2 + 3mg \cdot 2R \quad (6.12.5)$$

egyenletből határozható meg. Innen a  $v_2$  tetőponti sebesség

$$v_2 = \sqrt{\frac{8}{9}gH - 2gR}. \quad (6.12.6)$$

A tetőponton való áthaladáshoz szükséges minimális sebességet a test és a hurok között fellépő nyomási erő eltűnése határozza meg. Ekkor a testet csak a súlyerő tartja körpályán, azaz

$$3m \frac{v_2^2}{R} = 3mg. \quad (6.12.7)$$

Behelyettesítés után a minimális indítási magasság

$$H = \frac{27}{8}R. \quad (6.12.8)$$

## Rugalmas ütközések

**6.13. Feladat:** Mutassa meg, hogy a kemény asztallapon pattogó  $m$  tömegű golyó hosszú idő átlagában  $mg$  erővel nyomja az asztallapot!

**Megoldás:** Ha a golyót  $h$  magasságból leejtjük, az  $v = \sqrt{2gh}$  sebességgel csapódik be az asztallapba. Tökéletesen rugalmas ütközéskor a sebesség nagysága nem, csupán az iránya változik meg az ellenkezőjére. Ennek megfelelően a golyó impulzusváltozása

$$\Delta P = mv - (-mv) = 2mv = 2m\sqrt{2gh}. \quad (6.13.1)$$

Két ütközés között eltelt  $\Delta t$  idő (mely a mozgás során fellépő átlagos erőhatás kiszámolásához szükséges) kétszerese a szabadon eső test  $h$  magasságból történő esési idejének, azaz

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6.13.2)$$

Így az átlagos erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2\sqrt{\frac{2h}{g}}} = mg, \quad (6.13.3)$$

ami a feladat állításával megegyezik.

**6.14. Feladat:** Egy  $L$  oldalélű hasámban az oldallal párhuzamosan,  $v_0$  sebességgel mozog egy  $m$  tömegű részecske.

- Mekkora átlagos erővel nyomja a részecske a szembenlévő falakat?
- Mekkora az átlagos nyomás, ha a mozgásra merőleges lapok felülete  $A$ ?
- Hogyan változik a megoldás, ha  $N$  részecske teszi ezt?

Megoldás:

(a) A részecske impulzusváltozása a fallal való ütközés során  $\Delta P = 2mv_0$ . Két egymást követő ütközés között eltelt idő pedig  $\Delta t = \frac{2L}{v_0}$ . Az ütközések során fellépő átlagos erő tehát

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\frac{2L}{v_0}} = \frac{mv_0^2}{L}. \quad (6.14.1)$$

(b) A falakon ébredő átlagos nyomás:

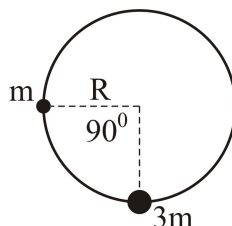
$$p = \frac{F}{A} = \frac{mv_0^2}{LA}. \quad (6.14.2)$$

(c)  $N$  részecske esetén a falakat nyomó  $F_N$  erő, illetve  $p_N$  nyomás megsokszorozódnak:

$$F_N = N \frac{mv_0^2}{L}, \quad p_N = N \frac{mv_0^2}{LA}. \quad (6.14.3)$$

(Megjegyzés: Utóbbi eredmények szolgálnak a kinetikus gázelmélet alapjául!)

**6.15. Feladat:** (HN 9C-32) Függőleges síkú,  $R$  sugarú körre hajlított, merev huzalon a rá fűzött  $m$  tömegű gyöngy a 28. ábrán látható módon lecsúszik. A körpálya oldalsó pontjából nyugalomban



28. ábra.

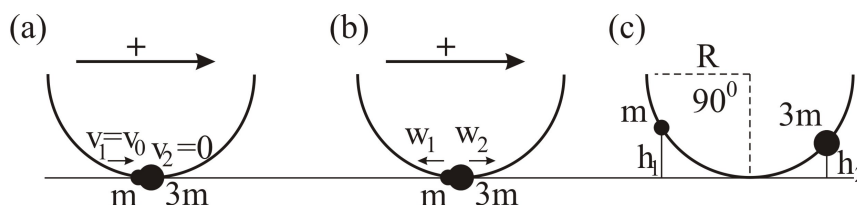
ban lévő gyöngy pusztán a gravitáció hatására lecsúszik és rugalmasan ütközik a kör legmélyebb pontjában nyugalomban lévő  $3m$  tömegű másik gyönggyel.

(a) Az  $R$  sugárral kifejezve határozzuk meg, hogy milyen magasra emelkednek a gyöngyök az ütközés után!

(b) Az ütközés után a gyöngyök súrlódámentesen folyamatosan tovább mozognak és újra rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg, hogy mennyi a gyöngyök sebessége közvetlenül a második ütközés után!

### Megoldás:

(a) A 29.(a) ábra az  $R$  magasságból lecsúszó  $v_0$  sebességű és  $m$  tömegű gyöngy a  $3m$  tömegű



29. ábra.

gyönggyel való ütközésének pillanatát mutatja. Az ütközés pillanatáig az  $R$  magasságból lecsúszó gyöngy potenciális energiája átalakul mozgási energiává:

$$mgR = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (6.15.1)$$

Ezért az  $m$  tömegű gyöngy sebessége  $v_0 = \sqrt{2gR}$ . A rugalmas ütközés folyamatára az impulzus megmaradás mellett fennáll a mechanikai energia-megmaradása is. A 29.(a) és 29.(b) ábrákon bejelölt pozitív irányok alapján felírhatjuk az ütközés előtti és utáni lendületek mérlegét.

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1w_1 + m_2w_2. \quad (6.15.2)$$

A mechanikai energia-megmaradása pedig a

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2 \quad (6.15.3)$$

egyenlettel fejezhető ki. A (6.15.2) és (6.15.3) egyenletek egy általános, egyenes menti rugalmas ütközést írnak le. Esetünkben  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 3m$ ,  $v_1 = v_0$ ,  $v_2 = 0$  és  $w_1$ , valamint  $w_2$  ismeretlen paraméterek. Átalakítva a (6.15.2) és (6.15.3) egyenleteket:

$$m_1(v_1 + w_1) = m_2(w_2 + v_2), \quad (6.15.4)$$

és

$$m_1(v_1^2 - w_1^2) = m_2(w_2^2 - v_2^2) \quad (6.15.5)$$

adódnak. Elosztva egymással a két egyenletet és felhasználva az  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  azonosságot

$$v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \quad (6.15.6)$$

adódik. A (6.15.6) és (6.15.2) egyenletekből kiküszöbölve a  $w_2$  sebességet,

$$w_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_1. \quad (6.15.7)$$

adódik. Analóg módon

$$w_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_2. \quad (6.15.8)$$

Esetünkben az ütközés utáni sebességek (lásd a 29.(b) ábrát)  $w_1 = w_2 = \frac{v_0}{2}$ -nek adódnak. Mivel a gyöngyök sebessége az ütközés után azonos, a gyöngyök tömegüktől függetlenül ugyanolyan  $h_1 = h_2 = h$  magasba emelkednek (lásd a 29.(c) ábrát). Az emelkedési magasságot a mechanikai energia-megmaradás segítségével számolhatjuk ki. Az  $m$  tömegű gyöngy esetében

$$mgh = \frac{1}{2}mw_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mv_0^2 = \frac{1}{4}mgR. \quad (6.15.9)$$

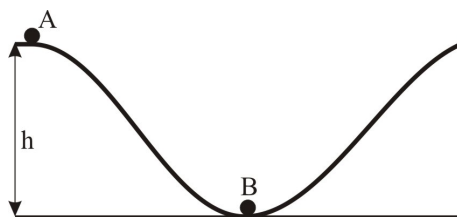
Az emelkedési magasság tehát  $h = R/4$ .

(b) A (6.15.7) és (6.15.8) egyenleteket felhasználhatjuk a második ütközés utáni sebességek meghatározásához is. Ebben az esetben a „beérkező” sebességek nagysága megegyezik az első ütközés utáni sebességek nagyságával. Behelyettesítve az értékeket, a második ütközés után  $w_1 = v_0$  és  $w_2 = 0$  adódik rendre az  $m$  és  $3m$  tömegű gyöngyök sebességére. A sebességek nagysága pont akkora, mint amekkora sebességgel közvetlenül az első ütközés előtt találkoztak a gyöngyök. Ez az eredmény nem meglepő, hiszen a (6.15.2) és (6.15.3) egyenleteknek két független megoldása van, melyek mindegyike kielégíti a lendület és energia-megmaradás törvényit.

**6.16. Feladat:** A 30. ábrán látható súrlódásmentes pálya A pontjából elengedünk egy testet. Végigcsúszva a B pontban ütközik egy másik testtel.

(a) Mekkora  $v$  sebességgel ér az A pontból indított test a B pontban lévő testhez?

(b) Milyen magasra emelkedik a másik test, ha az ütközés tökéletesen rugalmas ( $m_A = m_B/2$ ,  $h = 1.8$  m)?



30. ábra.

[Megoldás:](#)

(a) A  $h$  m magasból kezdő sebesség nélkül induló, súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége felhasználva az energia-megmaradás elvét  $v = \sqrt{2gh} = 6$  m/s.

(b) A tökéletesen rugalmas ütközés esetében az

$$m_A v = m_A v_A + m_B v_B \quad (6.16.1)$$

impulzus-megmaradás mellett érvényes a mechanikai energia megmaradása is:

$$\frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2. \quad (6.16.2)$$

Az egyenletekben  $v_A$  és  $v_B$  az  $A$  illetve  $B$  testek ütközés utáni sebességét jelöli. Figyelembe véve, hogy  $m_A = m_B/2$ , e két egyenlettel a  $B$  test ütközés utáni sebessége:

$$v_B = \frac{2}{3} v = \frac{2}{3} \sqrt{2gh} = 4 \text{ m/s}. \quad (6.16.3)$$

A  $B$  test emelkedési magassága pedig

$$h_B = \frac{v_B^2}{2g} = 0,8 \text{ m}. \quad (6.16.4)$$

## Általános ütközések

**6.17. Feladat:**  $h_1 = 1,25$  m magasból  $m = 1$  kg tömegű golyó a  $\Delta t = 0,05$  s időtartamú kölcsönhatás után  $h_2 = 80$  cm magasra pattan vissza. Mekkora átlagos erőt fejtett ki a talaj a golyóra ezen ütközés alatt?

Megoldás: A  $h_1$  magasságból eső test

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \quad (6.17.1)$$

sebességgel csapódik be, míg a  $h_2$  magasságba feljutó test a talajról

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} \quad (6.17.2)$$

sebességgel pattan vissza. Az ütközés alatt a teljes impulzusváltozás

$$\Delta P = mv_1 - (-mv_2). \quad (6.17.3)$$

A talaj és a golyó közt ébredő erő ezért

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2})}{\Delta t}. \quad (6.17.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $F = 180$  N adódik.

## Folytonos közegek impulzusváltozása

**6.18. Feladat:** (HN 8A-33) A 600 l/perc hozamú és 20 m/s sebességű vízszintes irányú vízszög függőleges falba ütközik, s számottevő freccsenés nélkül szétterül rajta. Mekkora erőt fejt ki a vízszög a falra? (A víz sűrűsége  $1000 \text{ kg/m}^3$ .)

**Megoldás:** Jelölések:  $\eta = 600 \text{ l/perc} = 10 \text{ l/s} = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $v = 20 \text{ m/s}$  és  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . A falra  $\Delta t$  idő alatt

$$\Delta m = \eta \rho \Delta t \quad (6.18.1)$$

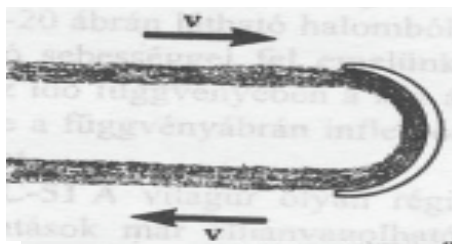
tömeg esik és áll meg. A beérkező víz teljes impulzusváltozása

$$\Delta P = v \Delta m = v \eta \rho \Delta t. \quad (6.18.2)$$

A falon ébredő erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = v \eta \rho = 200 \text{ N}. \quad (6.18.3)$$

**6.19. Feladat:** (HN 8A-34) Egy nyugvó turbinalapátba vízszög ütközik. A lapát a vízszög irányát az 31. ábrán látható módon megfordítja. A víz sebessége mind az ütközés előtt, mind



31. ábra.

az ütközés után  $v$ . Határozzuk meg a lapátra ható erőt, ha az időegységént becsapódó víz tömege  $\mu$ !

**Megoldás:** Az időegységént becsapódó víz tömege

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (6.19.1)$$

A beérkező víz impulzusa  $I_{\rightarrow} = mv$ , a távozóé  $I_{\leftarrow} = -mv$ . Az impulzusváltozás:

$$\Delta I = 2mv, \quad (6.19.2)$$

amellyel az ébredő erő:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta 2mv}{\Delta t} = 2v \frac{\Delta m}{\Delta t} = 2\mu v. \quad (6.19.3)$$

**6.20. Feladat:** (HN 8A-40) Egy 3000 kg tömegű rakéta meghajtású űrhajó egy helyben lebeg a Hold felszíne felett, ahol a  $g = 1,63 \text{ m/s}^2$ . Mekkora sebességgel bocsátja ki a rakéta a hajtóanyagot, ha 2 kg/s sebességgel fogyasztja a fűtőanyagot?

**Megoldás:** A kezdeti lépésben tételezzük fel, hogy a  $t$  időpillanatban az  $m$  rakéta  $v$  sebességgel halad felfelé. Ekkor az impulzusa:

$$I_1 = mv \quad (6.20.1)$$

A  $t + \Delta t$  időpillanatban a  $\Delta m$  kiáramlott gázzal kevesebb – azaz  $m - \Delta m$  –, sebessége  $\Delta v$ -vel nő – azaz  $v + \Delta v$ . Ha kiáramló gáz sebessége a rakétához képest  $u$  – lefele irányban –, akkor a  $\Delta m$  kiáramlott gáz sebessége az álló megfigyelőhöz képest:  $v - u$ . A  $t + \Delta t$  időpillanathoz tartozó impulzus:

$$I_2 = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - u). \quad (6.20.2)$$

A  $\Delta t$  alatti impulzusváltozás:

$$\Delta I = I_2 - I_1 = m\Delta v - u\Delta m. \quad (6.20.3)$$

Az  $m$  tömegű rakétára ható erő:  $F = -mg$ . Így az impulzus tétel értelmében:

$$F = -mg = \frac{\Delta I}{\Delta t} = I_2 - I_1 = m\frac{\Delta v}{\Delta t} - u\frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (6.20.4)$$

Felhasználva a feladat szövegét, hogy a rakéta áll, azaz  $\frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$ ,  $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ , valamint a rakéta tömegének időbeli változását  $m(t) = m_0 - \mu t$  ( $m_0$  a kezdeti tömeg), felírható:

$$(m_0 - \mu t)g = \mu u(t), \quad (6.20.5)$$

amelyből

$$u(t) = \frac{m_0 - \mu t}{\mu} g = 1,63 \frac{3000 - 2t}{2}. \quad (6.20.6)$$

Világos, hogy egyre kisebb kiáramlási sebességre van szükség a csökkenő tömeg miatt. A  $t = 0$  időpillanatban  $u = 2445 \text{ m/s}$ .

**6.21. Feladat:** (HN 8B-41) A 130000 kg tömegű rakéta függőlegesen helyezkedik el a kilövőálláson.



- (a) Mekkora kell lennie a hajtóművek tolóerejének ahhoz, hogy a rakéta  $17 \text{ m/s}^2$  gyorsulással induljon felfelé?
- (b) Hány  $\text{kg/s}$  a hajtóanyag fogyasztás akkor, ha a hajtógáz rakétához viszonyított sebessége  $2100 \text{ m/s}$ ?

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 130000 \text{ kg}$ ;  $a = 17 \text{ m/s}^2$  és  $u = 2100 \text{ m/s}$ .

- (a) Az indulás pillanatában

$$ma = F - mg \quad (6.21.1)$$

a rakéta mozgásegyenlete. Innen a tolóerő

$$F = m(a + g) = 3,51 \cdot 10^6 \text{ N}. \quad (6.21.2)$$

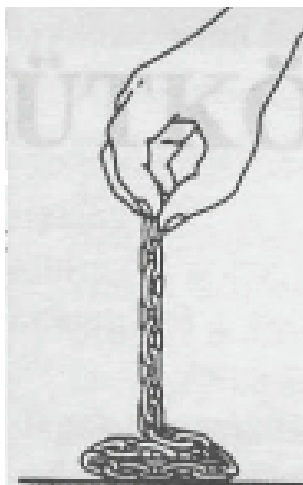
- (b) Ez a tolóerő az  $u$  sebességgel kiáramló gáz következménye, azaz

$$F \Delta t = (\Delta m)u, \quad (6.21.3)$$

amelyből a hajtóanyag fogyasztás

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{F}{u} = 1671 \text{ kg/s}. \quad (6.21.4)$$

**6.22. Feladat:** (HN 8C-48) Egy függőlegesen lógó,  $m$  tömegű hajlékony  $l$  hosszúságú láncot állandó  $v$  sebességgel engedünk le az asztalra az 32. ábrán látható módon. Adjuk meg az idő függvényében, hogy mekkora erőt fejt ki a lánc az asztalra!



32. ábra.

**Megoldás:** A hosszegységenkénti tömeget jelölje  $\lambda = \frac{m}{l}$ ; a  $t$  idő alatti süllyedés hossza  $x = vt$ . Így ennyi idő alatt  $m(t) = \lambda x = \frac{m}{l}vt$  tömeg van az asztalon, amely

$$N_1 = \frac{m}{l}vtg \quad (6.22.1)$$

erővel nyomja az asztalt. Ez az ébredő erő egyik része. A másik rész ahhoz kötődik, hogy a  $v$  sebességű  $dx$  hossz megáll. Ennek a hosszának az impulzusváltozása:

$$\Delta I = \lambda dx v = \frac{m}{l}v \Delta t v = \frac{mv^2}{l} \Delta t. \quad (6.22.2)$$

A megállításból eredő másik rész

$$N_2 = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l}. \quad (6.22.3)$$

Az összes erő tehát

$$N = \frac{m}{l}vtg + \frac{mv^2}{l}. \quad (6.22.4)$$

**6.23. Feladat:** (HN 9C-47) A Földhöz viszonyítva  $v$  sebességű és időegységenként  $\mu$  tömeget szállító vízáram csapódik a turbinalapátra. Az ütközés hatására a turbinalapát egyenesvonalú mozgásba kezd, míg a vízáram  $v/4$  sebességgel visszafelé halad a Földhöz képest.

- (a) Mekkora sebességgel mozog a turbinalapát?  
 (b) Határozzuk meg  $v$  és  $\mu$  függvényében, hogy mekkora erő hat a mozgó lapátra?

**Megoldás:**

(a) Az  $u$  sebességgel mozgó turbinalapáton fordul meg a vízáram. Figyelembe véve a relatív sebességeket fennáll, hogy

$$v - u = u + \frac{1}{4}v. \quad (6.23.1)$$

Innen a turbinalapát sebessége

$$u = \frac{3}{8}v. \quad (6.23.2)$$

(b) Ha  $m$  tömegű víz fordul meg, akkor annak impulzusváltozása

$$\Delta I = 2m(v - u) = \frac{5}{4}mv. \quad (6.23.3)$$

A  $\Delta t$  idő alatt a turbinalapátra beérkező tömeg

$$m = \mu \Delta t \frac{v - u}{v}, \quad (6.23.4)$$

amellyel az impulzusváltozás

$$\Delta I = \frac{25}{32} \mu v \Delta t. \quad (6.23.5)$$

Az ébredő erő

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{25}{32} \mu v. \quad (6.23.6)$$

## 7. Feladatok a gravitációs erő tárgyköréből. Kepler törvényei

### Centrális erőtér. Potenciális energia

**7.1. Feladat:** (HN 16B-16) A "szinkron" műhold akkora sebességgel kering körpályán, hogy a földi megfigyelő számára nyugalomban lévőknek látszik.

- (a) Magyarázzuk meg, miért csak az egyenlítő síkjában lévő pályán lehetséges az ilyen mozgás!
- (b) Határozzuk meg a pálya sugarát a Föld középpontjától mérve!
- (c) Határozzuk meg azt a legtávolabbi szélességi fokot, ahonnan ez a műhold a Földről még látható!

**Megoldás:** Jelölések:  $m$  a műhold tömege;  $M$  a Föld tömege;  $T$  a Föld forgásának periódus ideje;  $R$  a műhold távolsága a Föld középpontjától;  $R_F$  a Föld sugara.

(a) A körmozgás a Föld forgástengelye körül kell történjen, amelyhez kizárólag e tengelyre merőleges erő szükséges. A Föld a centruma felé vonzza a testeket. Az első feltétel csak akkor teljesül, ha a test az Egyenlítőn van.

(b) A műhold ún. geostacionárius pályán kering, azaz szögsebessége megegyezik a Föld forgáshoz tartozó  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  szögsebességgel. A keringő műhold mozgásegyenlete

$$mR\omega^2 = \gamma \frac{mM}{R^2}. \quad (7.1.1)$$

A szögsebesség behelyettesítése és az egyenlet átrendezése után az  $R$  sugár

$$R = \sqrt[3]{\frac{\gamma MT^2}{4\pi^2}} = 42170 \text{ km}. \quad (7.1.2)$$

(c) Az szélesség kör, ahonnan a műhold még látható

$$\cos \theta = \frac{R_F}{R} = 0,1511 \rightarrow \theta = 81,3^\circ. \quad (7.1.3)$$

**7.2. Feladat:** (HN 16B-31) Egy nem forgó gömb alakú bolygó tömege  $M$ , sugara  $R$ . A bolygó felszínéről radiális irányban egy részecskét lönek ki  $\sqrt{\gamma M/(2R)}$  sebességgel. Számítsuk ki mekkora távolságra jut el a részecske a bolygó középpontjától?

**Megoldás:** A mechanikai energia megmaradás tételét kell alkalmazni – figyelembe véve, hogy az "eljutás" zérus pillanatnyi sebességet jelent –

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} = -\gamma \frac{mM}{R'}, \quad (7.2.1)$$

ahol  $R'$  a kérdéses távolság. A sebesség behelyettesítése után

$$R' = \frac{4}{3}R. \quad (7.2.2)$$

**7.3. Feladat:** (HN 16B-34) Jelölje  $M$  illetve  $R$  a Föld tömegét illetve sugarát.

(a) Mekkora az a minimális  $v_0$  sebesség, amellyel az egyenlítőn függőlegesen kilőtt test a Föld felszínétől éppen két földugárnyi magassáig emelkedik? A Föld forgását és a légköri súrlódást ne vegyük figyelembe.

(b) A Föld forgását is számításba véve, növekszik, csökken vagy változatlan marad-e az a, kérdésre adott válasz számértéke?

**Megoldás:**

(a) A mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva

$$-\gamma \frac{mM}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma \frac{mM}{3R} \quad (7.3.1)$$

egyenlet írható fel, amelyből a kért sebesség:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma M}{R}} = 9152 \text{ m/s}. \quad (7.3.2)$$

(b) A Föld forgása csökkenti ezt az értéket, mert a kinetikus energiában a sebesség négyzete van. A forgáshoz tartozó  $v_f$  sebesség érintő irányú (a kilövésre merőleges), amivel a kezdő sebesség négyzete:  $v_0^2 + v_f^2$  mindig nagyobb mint  $v_0^2$ .

**7.4. Feladat:** (HN 16B-36) A Föld felszínén egy testet emelünk.

(a) Határozzuk meg annak a munkának a nagyságát, amivel egy 100 kg tömegű hasznos terhet

1000 km-rel a Föld felszíne felé lehet juttatni!

(b) Határozzuk meg azt a többletmunkát, ami ezen a szinten a hasznos teher körpályára állításához szükséges!

**Megoldás:** Adatok:  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ;  $m = 100 \text{ kg}$ ;  $h = 1000 \text{ km}$ . A Föld tömege:  $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ; sugara:  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

(a) Az általunk végzett munka

$$W = \int_R^{R+h} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \left[ \gamma \frac{mM}{r} \right]_R^{R+h} = \gamma \frac{mM}{R} - \gamma \frac{mM}{R+h} = 1,42 \cdot 10^8 \text{ J.} \quad (7.4.1)$$

(b) Az  $R+h$  sugárnyi távolságban keringés feltétele, hogy az

$$\gamma \frac{mM}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{R+h} \quad (7.4.2)$$

fennálljon. E keringéshez tartozó többlet energia

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R+h} = 2,7 \cdot 10^9 \text{ J.}^* \quad (7.4.3)$$

\* *Megjegyzés:* Tekintettel arra, hogy a Föld forog, és így a rakéta nem álló helyzetből indul, ennél kisebb energiára van szükség. Nem véletlen, hogy a kilövő állomásokat az Egyenlítőhöz közel igyekeznek telepíteni.

**7.5. Feladat:** (HN 16B-37) Mutassuk ki, hogy egy állandó sűrűségű bolygó felületéről a szökési sebesség a bolygó sugarával arányos!

**Megoldás:** A gömb alakú bolygó térfogata:

$$V = \frac{4R^3\pi}{3}, \quad (7.5.1)$$

tömege:

$$M = \rho \frac{4R^3\pi}{3}. \quad (7.5.2)$$

A szökéshez minimálisan szükséges kinetikus energia

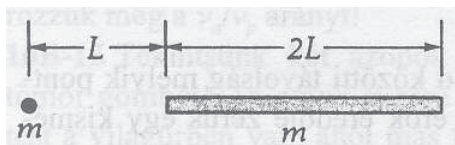
$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma \frac{mM}{R} = \gamma \frac{m\rho \frac{4R^3\pi}{3}}{R} = \gamma m\rho \frac{4R^2\pi}{3}. \quad (7.5.3)$$

Egyszerűsítések után:

$$v = \sqrt{\frac{8}{3}\gamma\rho\pi R}, \quad (7.5.4)$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

**7.6. Feladat:** (HN 16C-47) \* A 33. ábrán látható kicsiny test és vékony rúd mindegyikének tömege  $m$ . A pontszerű test a rúd vonalában fekszik. A test  $L$  távolságban van a  $2L$  hosszúságú rúd végétől. Mekkora a kicsiny  $m$  tömegű testre ható gravitációs erő?



33. ábra.

**Megoldás:** A rúd hosszegységnyi tömege  $\lambda = \frac{m}{2L}$ , így a  $dx$  hosszhoz tartozó  $dm$  tömeg

$$dm = \lambda dx. \quad (7.6.1)$$

Legyen a  $dm$  tömeg  $x$  távolságra az  $m$  tömegű testtől. A két test között ható erő nagysága

$$dF = \gamma \frac{m dm}{x^2}. \quad (7.6.2)$$

A teljes erő

$$F = \int_L^{3L} \gamma \frac{m \lambda dx}{x^2} = \gamma \frac{m^2}{2L} \left[ -\frac{1}{x} \right]_L^{3L} = \gamma \frac{m^2}{3L^2}. \quad (7.6.3)$$

**7.7. Feladat:** (HN 16C-58) Egy ember a Föld felszínén guggoló helyzetből tömegközéppontját  $h$  magassággal tudja emelni. Számítsuk ki annak a legnagyobb (a Föld átlagsűrűségével azonos sűrűségű) kisbolygónak a sugarát, amelyről ez az ember ugyanilyen sebességgel felugorva elszökhetne, azaz elhagyhatná annak vonzáskörzetét.

**Megoldás:** A  $h$  magasságba ugró ember kezdősebessége

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (7.7.1)$$

A kisbolygó  $M$  tömege a  $\rho$  sűrűséggel és az  $R$  sugárral kifejezve

$$M = \rho \frac{4R^3 \pi}{3}. \quad (7.7.2)$$

A kisbolygón  $v$  sebességgel felugró emberre a mechanikai energia megmaradás tételét alkalmazzuk azzal az ismerettel, hogy a távolban a sebessége – így a kinetikus energiája – zérus, másrészt a távoli pontban zérus a potenciális energia. Felírhatjuk tehát, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0, \quad (7.7.3)$$

amelybe a fenti tömeget behelyettesítve és az egyenletet a sugárra átrendezve kapjuk:

$$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi\gamma\rho}}. \quad (7.7.4)$$

**7.8. Feladat:** \* Az  $M$  tömegű  $R$  sugarú bolygó egyenletes  $\rho$  tömegsűrűségű.

- (a) Hogyan változik az  $m$  tömegű kicsiny testre ható erő a bolygó belsejébe való haladás során?  
 (b) Hogyan változik a potenciális energia a bolygón belül?

Megoldás:

(a) Ha az  $m$  test a bolygó belsejében, annak középpontjától  $r$  távolságra van, akkor a gravitációs erőhatásba a bolygónak csak az  $r$  sugaron belüli része ad járulékot. Ezért először ezt a tömeget kell kiszámolni. A bolygó sűrűsége

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}, \quad (7.8.1)$$

amelyből az  $r$  sugárhoz tartozó  $M(r)$  tömeg

$$M(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi} \frac{4}{3}r^3\pi = M \frac{r^3}{R^3}. \quad (7.8.2)$$

Mostmár alkalmazni tudjuk a gravitációs erőtvényt

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM(r)\mathbf{r}}{r^2} = -\gamma \frac{mM \frac{r^3}{R^3} \mathbf{r}}{r^2} = -\gamma mM \frac{r}{R^3} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (7.8.3)$$

azaz a középponttól való távolsággal lineárisan változik. (Az  $\mathbf{r}/r$  vektor a radiális egységvektor.)

(b) A bolygó felszínén a potenciális energia végtelen távoli ponthoz képest

$$U_p(R) = -\gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.8.4)$$

Ehhez az értékhez képest az  $r$  sugárnyi távolságnál

$$U_p(r) - U_p(R) = \int_R^r \gamma mM \frac{r}{R^3} dr = \left[ \frac{1}{2} \gamma mM \frac{r^2}{R^3} \right]_R^r = \frac{1}{2} \gamma mM \frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2} \gamma mM \frac{1}{R}. \quad (7.8.5)$$

Így az a gravitációs potenciál az  $r$  pontban a végtelenhez képest

$$U_p(r) = -\gamma \frac{mM}{R} + \frac{1}{2} \gamma mM \frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.8.6)$$

*Megjegyzés:* Látható, hogy – talán nem meglepő módon – a bolygó közepén is véges a potenciális energia értéke

$$U_p(0) = -\frac{3}{2} \gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.8.7)$$

**7.9. Feladat:** A *VIFIZ* nevű,  $R = 40020$  km sugarú és  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg tömegű bolygó felszínétől  $R$  távolságban  $v_0$  sebességgel keringő űrhajó pályájáról letér és a bolygó felszínébe csapódik. Mekkora a becsapódás sebessége? ( $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>)

**Megoldás:** Az űrhajó  $2R$  sugarú keringésére érvényes, hogy

$$m \frac{v_0^2}{2R} = \gamma \frac{mM}{4R^2}, \quad (7.9.1)$$

ahonnan

$$v_0^2 = \gamma \frac{M}{2R}. \quad (7.9.2)$$

Másrészt érvényes a mechanikai energia megmaradás tétele, az a kezdeti kinetikai és potenciális energiák összege egyenlő a végső kinetikai és potenciális energiák összegével, azaz

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma \frac{mM}{2R} = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.9.3)$$

Ebből és a  $v_0$  sebesség belyettesítéssel a becsapódási sebesség

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{5}{4}\gamma \frac{M}{R}} = 3535 \text{ m/s}. \quad (7.9.4)$$

## Kepler törvényei

**7.10. Feladat:**  $M$  tömegű csillag körül  $m$  tömegű bolygó kering ellipszis pályán (– a csillag rögzítettnek tekinthető) a 34. ábra szerint. Az ellipszis fél nagytengelyét jelöljük " $a$ "-val. A bolygó az  $R_0 = R_A$  naptávolban (A)  $v_0$  sebességgel halad.

- Mekkora a napközeli (B) távolság?
- Mekkora a bolygó sebessége?
- Mekkora munkát végzett a gravitációs erőter?
- Ábrázolja grafikonon a potenciális energia értékeket (A, B)!

**Megoldás:**

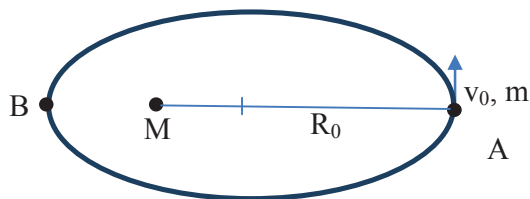
(a) Az ellipszisre nagytengelyére fennálló összefüggés

$$R_B + R_A = 2a, \quad (7.10.1)$$

ahol  $R_B$  a napközeli távolságot jelöli. Innen ez a távolság

$$R_B = 2a - R_A. \quad (7.10.2)$$





34. ábra.

(b) Centrális erőterről lévén szó, fennáll az impulzusmomentum megmaradás tétele, vagyis

$$mR_A v_0 = mR_B v_B, \quad (7.10.3)$$

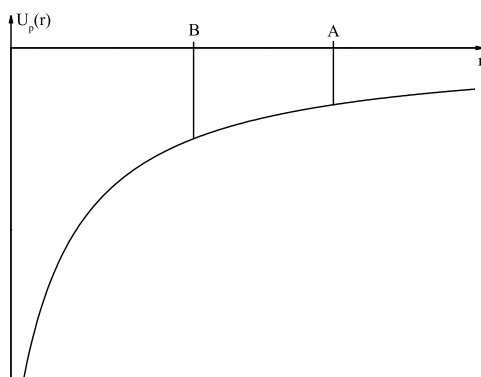
ahol  $v_B$  a  $B$  pontbeli (napközeli) sebességet jelöli. Innen

$$v_B = \frac{R_A v_0}{R_B} = \frac{R_A v_0}{2a - R_A}. \quad (7.10.4)$$

(c) Az erőter által végzett munka

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left( \frac{R_A^2}{(2a - R_A)^2} - 1 \right) > 0. \quad (7.10.5)$$

(d) Az  $A$  és  $B$  pontokbeli potenciális energia értékeket a 35. ábra mutatja.



35. ábra.

## 8. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

### Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel

**8.1. Feladat:** (HN 10B-4) Egy  $\mathbf{F} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$  ( $f_x = 2 \text{ N}$ ;  $f_y = 3 \text{ N}$ ;  $f_z = 0 \text{ N}$ ) erő hat egy testre. A test a  $z$  koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az  $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$  ( $x = 4 \text{ m}$ ;  $y = 5 \text{ m}$ ;  $z = 0 \text{ m}$ ) pontban támad. Határozzuk meg a forgatónyomaték nagyságát és irányát!

**Megoldás:** A forgatónyomaték definíciója  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  szerint a

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (yf_z - zf_y)\mathbf{i} + (zf_x - xf_z)\mathbf{j} + (xf_y - yf_x)\mathbf{k} \quad (8.1.1)$$

determináns kiszámolását kell elvégezzük. A számszerű adatok behelyettesítésével forgatónyomaték vektor

$$\mathbf{M} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad (8.1.2)$$

azaz a vektor nagysága  $2 \text{ Nm}$ , iránya a  $z$  tengely irányításával megegyezik.

**8.2. Feladat:** Egy " $L$ " hosszúságú kötélen végén  $0,2 \text{ kg}$  tömegű test függőleges síkban körmozgást végez. A pálya csúcsán a kör középpontjára vett perdület fele akkora, mint a pálya alján, ahol a tömeg kinetikus energiája  $4 \text{ J}$ . Mekkora az " $L$ "?

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 0,2 \text{ kg}$ ,  $E = 4 \text{ J}$ , valamint  $v_a$  az alsó,  $v_f$  a felső pontbeli sebességek. Mivel a pálya alsó pontján ismerjük a kinetikus energiát, így az

$$E = \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (8.2.1)$$

összefüggésből az alsó ponti sebesség

$$v_a = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{40} \text{ m/s} = 6,32 \text{ m/s}. \quad (8.2.2)$$

Az impulzusmomentum  $N = (L)mvL$  definíciójából következik, hogy a felső pontban úgy lehet a fele az alsó impulzusmomentumnak, ha a felső ponti sebesség

$$v_f = \frac{v_a}{2} = \sqrt{10} \text{ m/s} = 3,16 \text{ m/s}. \quad (8.2.3)$$

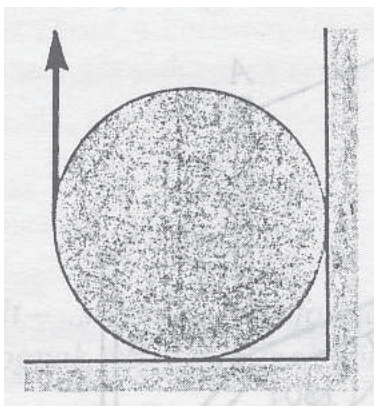
A két sebesség valamint az alsó és felső pontok magassága közötti kapcsolatot a mechanikai energia megmaradását kifejező összefüggéssel teremthetjük meg:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \cdot 2L. \quad (8.2.4)$$

Az alsó és felső pontok közötti távolság  $2L$ . A behelyettesítések után a kötélen hossza

$$L = 0,75 \text{ m}. \quad (8.2.5)$$

**8.3. Feladat:** (HN 10C-48) A 36. ábra egy  $G$  súlyú homogén hengerre függőleges irányban ható  $F$  erőt mutat. A henger és a felületek közötti nyugalmi súrlódási együttható  $\mu = 0,5$ . Fejezzük ki a  $G$  függvényében azt a legnagyobb  $F$  erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását!



36. ábra.

**Megoldás:** Jelölje  $N_1$  a alsó érintkezési ponton felfele mutató támaszerőt,  $F_{s1}$  a balról jobbra mutató súrlódási erőt ugyanitt. Legyen  $N_2$  a falnál jobbról balra mutató támaszerő, míg az itt ható felfele mutató súrlódási erő  $F_{s2}$ . E mennyiségek közötti kapcsolat

$$F_{s1} = \mu N_1 \quad (8.3.1)$$

és

$$F_{s2} = \mu N_2. \quad (8.3.2)$$

A henger akkor van egyensúlyban, ha a ható erők eredője és forgatónyomatéka zérus. Azaz előjel helyesen — pozitív az az erő, amely balról jobbra, illetve alulról felfele mutat — a függőleges irányban

$$0 = F - G + N_1 + F_{s2}, \quad (8.3.3)$$

a vízszintes irányban

$$0 = F_{s1} - N_2. \quad (8.3.4)$$

A forgatónyomatékra

$$0 = F_{s2}R + F_{s1}R - FR \quad (8.3.5)$$

A fenti öt egyenletből kell az  $F$  erőt kifejezni. A (8.3.1) és (8.3.2) súrlódási erők behelyettesítésével illetve az (8.3.5) egyenletben az  $R$ -rel való egyszerűsítés után kapjuk:

$$0 = F - G + N_1 + \mu N_2, \quad (8.3.6)$$

a vízszintes irányban

$$0 = \mu N_1 - N_2. \quad (8.3.7)$$

A forgatónyomatékra

$$0 = \mu N_2 + \mu N_1 - F \quad (8.3.8)$$

A (8.3.7) egyenletből  $N_2$ -öt kifejezve és a (8.3.6) valamint a (8.3.8) egyenletekbe helyettesítve

$$0 = F - G + (1 + \mu^2)N_1 \quad (8.3.9)$$

és

$$0 = \mu(\mu + 1)N_1 - F \quad (8.3.10)$$

adódik. Az  $N_1$  eliminálásával az  $F$  erő

$$F = \frac{\mu(\mu + 1)}{2\mu^2 + \mu + 1}G. \quad (8.3.11)$$

A  $\mu = 0,5$  behelyettesítési értékkel az  $F$  erő maximális értéke

$$F = 0,375G. \quad (8.3.12)$$

**8.4. Feladat:** (HN 13B-7) Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le az  $\alpha$  szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke  $\tan \alpha / 3$  kell, hogy legyen! (A henger tehetetlenségi nyomatéka  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ .)

**Megoldás:** A hengerre az  $mg$  súlyerő, az  $N = mg \cos \alpha$  támaszerő és az  $F_s$  tapadási súrlódási erő hat. A mozgásegyenletek a haladó mozgásra

$$ma = mg \sin \alpha - F_s, \quad (8.4.1)$$

és a forgómozgásra

$$\theta \beta = F_s R. \quad (8.4.2)$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \quad (8.4.3)$$

összefüggéssel fogalmazható meg. A három egyenletből az  $F_s$  erő alakja

$$F_s = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mR^2}{\theta}}. \quad (8.4.4)$$

Figyelembe véve, hogy a tapadási erő maximális, ha

$$F_s = \mu mg \cos \alpha, \quad (8.4.5)$$

így ezt behelyettesítve a minimális  $\mu$  tapadási együttható értékére — felhasználva a tehetetlenségi nyomaték kifejezését —

$$\mu = \frac{mg \sin \alpha}{(1 + \frac{mR^2}{\theta})mg \cos \alpha} = \frac{\text{tg} \theta}{1 + \frac{mR^2}{\theta}} = \frac{\text{tg} \theta}{3}. \quad (8.4.6)$$

adódik. Q.E.D.

**8.5. Feladat:** Egy tömör hengert és egy vékony falú csövet egyszerre engedünk el egy adott hajlásszögű lejtő tetejéről. Mindkét tárgy tisztán gördül.

- Határozza meg a henger tömegközéppontjának gyorsulását!
- Határozza meg a cső tömegközéppontjának gyorsulását!
- Milyen messze gurul el a cső, míg a henger  $s_h$  utat tesz meg?

**Megoldás:** Jelölje  $\alpha$  a lejtő hajlásszögét,  $\theta_h$  a henger és  $\theta_{cs}$  a cső tehetetlenségi nyomatékát,  $F_s$  a tapadási súrlódási erőt. Az  $m$  és  $R$  a gördülő test tömege és sugara. ( $\theta_h = \frac{1}{2}mR^2$ ;  $\theta_{cs} = mR^2$ )

A lejtőn legördülő test mozgásegyenlete a haladómozgásra

$$ma = mg \sin \alpha - F_s, \quad (8.5.1)$$

és a forgómozgásra —  $\theta$  a gördülő test tehetetlenségi nyomatéka —

$$\theta \beta = F_s R. \quad (8.5.2)$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \quad (8.5.3)$$

összefüggéssel fogalmazható meg. E három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{m}{m + \frac{\theta}{R^2}} g \sin \alpha. \quad (8.5.4)$$

- A henger gyorsulása

$$a_h = \frac{m}{m + \frac{\theta_h}{R^2}} g \sin \alpha = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \quad (8.5.5)$$

- A cső gyorsulása

$$a_{cs} = \frac{m}{m + \frac{\theta_{cs}}{R^2}} g \sin \alpha = \frac{1}{2} g \sin \alpha. \quad (8.5.6)$$

- A henger az  $s_h$  utat

$$t = \sqrt{\frac{2s_h}{a_h}} \quad (8.5.7)$$

idő alatt teszi meg. Ezalatt a cső

$$s_{cs} = \frac{1}{2} a_{cs} t^2 = \frac{1}{2} a_{cs} \frac{2s_h}{a_h} = \frac{3}{4} s_h \quad (8.5.8)$$

utat tesz meg.

**8.6. Feladat:** Egy jójó külső  $R$  sugara tízszerese belső  $r$  sugarának. A jójó orsója körüli tehetlenségi nyomatéka jó közelítéssel  $\theta = \frac{1}{2} m R^2$ , ahol  $m$  a jójó teljes tömege. A fonál vége nem mozog.

- (a) Számítsa ki a jójó tömegközéppontjának gyorsulását!  
 (b) Határozza meg a fonálban ébredő erőt!

Megoldás: Jelölés: a kötél erő  $K$  és  $r = R/10$ .

- (a) A jójó tömegközéppontja körüli forgásra vonatkozó mozgásegyenlet

$$\theta \beta = K r, \quad (8.6.1)$$

azaz a kötél erő hozza létre a  $\beta$  szöggyorsulású forgást. A haladó mozgásra felírható, hogy

$$m a = m g - K. \quad (8.6.2)$$

A haladó és forgómozgás közötti kapcsolat (tisztá gördülés)

$$a = r \beta. \quad (8.6.3)$$

A három egyenletből a gyorsulás

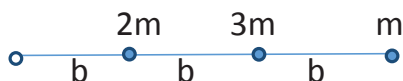
$$a = \frac{g}{\frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} + 1} = \frac{1}{51} g. \quad (8.6.4)$$

- (b) A kötél erő

$$K = \frac{50}{51} m g. \quad (8.6.5)$$

**8.7. Feladat:** Egy elhanyagolható tömegű merev rúdra három pontszerű testet erősítettek. Az egyik végén csapágyazott rúd függőleges síkban lenghet.

- (a) Mekkora a tehetlenségi nyomaték a csapágyra nézve?  
 (b) Mekkora lesz az alsó test sebessége a rúd függőleges helyzetben való áthaladásakor, ha a 37. ábrán látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük?



37. ábra.

**Megoldás:**

(a) A felfüggesztési pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\theta = \sum_i m_i r_i^2 = 2mb^2 + 3m(2b)^2 + m(3b)^2 = 23mb^2. \quad (8.7.1)$$

(b) A testek helyzeti energiájának összes megváltozása:

$$\Delta E_h = 2mgb + 3mg \cdot 2b + mg \cdot 3b = 11mgb. \quad (8.7.2)$$

E helyzeti energiaváltozás alakul forgási energiává:

$$\Delta E_h = \frac{1}{2} \theta \omega^2, \quad (8.7.3)$$

amelyből behelyettesítés után a szögsebességre kapjuk:

$$\omega = \sqrt{\frac{22g}{23b}}. \quad (8.7.4)$$

Az  $m$  tömegű test sebessége az alsó pontban:

$$v = R\omega = 3b\omega = 3\sqrt{\frac{22gb}{23}}. \quad (8.7.5)$$

**8.8. Feladat:** Homogén tömör tárcsa sugara 6 cm, tömege 1,5 kg. Nyugalomból indul a motor által kifejtett 0,6 Nm forgatónyomaték hatására. Mennyi idő alatt éri el az 1200 1/perc fordulatszámot? ( $\theta = \frac{1}{2}mr^2$ )

**Megoldás:** Jelölések:  $r = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$ ,  $m = 1,5 \text{ kg}$ ,  $M = 0,6 \text{ Nm}$  és  $f = 1200 \text{ 1/perc} = 20 \text{ 1/s}$ . A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M, \quad (8.8.1)$$

ahonnan a  $\beta$  szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M}{\theta} = \frac{2M}{mr^2} = 222,2 \text{ 1/s}^2. \quad (8.8.2)$$

A szögsebesség és a fordulatszám közötti összefüggés

$$\omega = 2\pi f, \quad (8.8.3)$$

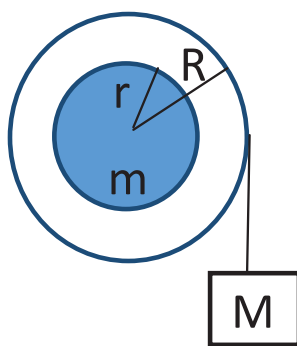
másrészt

$$\omega = \beta t. \quad (8.8.4)$$

A kérdéses fordulatszám eléréséhez szükséges idő

$$t = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = 0,565 \text{ s.} \quad (8.8.5)$$

**8.9. Feladat:** Egy  $r = 20 \text{ cm}$  "tehetetlenségi" sugarú,  $m = 40 \text{ kg}$  tömegű kerék sugara  $R = 30 \text{ cm}$ . Az  $R$  sugárhoz tartozó keréktömeget hanyagoljuk el.) Függetlenül helyeztük egy vízszintes tengelyre. Egy  $M = 2.0 \text{ kg}$  tömegű testet erősítettünk a szélére tekert kötéltre a 38. ábrának megfelelően. Határozza meg a kerék elengedés utáni kezdeti szöggyorsulását! (A kerékre:  $\theta = mr^2$ .)



38. ábra.

**Megoldás:** Jelölés: a kötelben ébredő erő  $K$ . A kerék forgómozgására felírhatjuk, hogy

$$\theta\beta = KR, \quad (8.9.1)$$

míg az  $m$  tömegű test haladó mozgására

$$Ma = Mg - K. \quad (8.9.2)$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy

$$a = R\beta. \quad (8.9.3)$$

E három egyenletből a kiszámolt szöggyorsulás

$$\beta = \frac{MgR}{\theta + MR^2} = \frac{MgR}{mr^2 + MR^2} = 3,371/s^2. \quad (8.9.4)$$



**8.10. Feladat:** Egy lendkerék fordulatszáma 60 rad/s-ról 180 rad/s-ra növekedett a rajta történt 100 J munkavégzés következtében.

(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka?

(b) Ezt követően egy 3-szor nagyobb tehetetlenségi nyomatékú álló kereket nyomunk a lendkerékhez. Mekkora lesz a kialakuló közös fordulatszám?

**Megoldás:** a, A végzett munka a kinetikus energiát változtatja meg, azaz

$$W = \frac{1}{2}\theta\omega_2^2 - \frac{1}{2}\theta\omega_1^2, \quad (8.10.1)$$

ahol  $\omega_1$  a kezdeti,  $\omega_2$  a végső szögsebesség,  $\theta$  a tehetetlenségi nyomaték. Innen a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = \frac{2W}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,00694 \text{ kgm}^2. \quad (8.10.2)$$

b, Az impulzusmomentum megmaradása miatt

$$\theta\omega_2 = (\theta + 3\theta)\omega', \quad (8.10.3)$$

amelyből

$$\omega' = \frac{1}{4}\omega_2 = 45 \text{ rad/s}. \quad (8.10.4)$$

**8.11. Feladat:** Egy  $m$  tömegű,  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$  tehetetlenségi nyomatékú kereket  $\omega_0$  szögsebességgel megforgatunk és zérus kezdősebességgel a  $\mu$  súrlódási együtthatójú talajra engedjük.

(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?

(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

**Megoldás:**

(a) A kerék és a talaj között ébredő  $\mu mg$  súrlódási erő kezdi haladó (transzlációs) mozgásban gyorsítani a kereket, másrészt az súrlódási erő miatt ébredő forgatónyomaték fékezi forgó (rotációs) mozgásában. A kerék haladó mozgására érvényes dinamikai egyenlet

$$ma = \mu mg, \quad (8.11.1)$$

ahol a pozitív előjel a sebesség növekedését fejezi ki. Míg a forgómozgásra felírható egyenlet — a forgómozgás alapegyenlete — a

$$\theta\beta = M = -\mu mgR, \quad (8.11.2)$$

ahol a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a súrlódási erő által létrehozott forgatónyomaték csökkenti a szögsebességet. Ezekből a kerék  $a$  gyorsulása és  $\beta$  szöggyorsulása

$$a = \mu g \quad (8.11.3)$$

és

$$\beta = -\frac{\mu mg R}{\theta}. \quad (8.11.4)$$

A  $v(t)$  sebesség és az  $\omega(t)$  szögsebesség egyszerűen

$$v(t) = \mu g t \quad (8.11.5)$$

és

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu mg R}{\theta} t. \quad (8.11.6)$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy az

$$v(t) = R\omega(t) \quad (8.11.7)$$

feltétel teljesüljön, azaz

$$\mu g t = R \left( \omega_0 - \frac{\mu mg R}{\theta} t \right). \quad (8.11.8)$$

A  $\theta$  behelyettesítésével a kértelt eltelt idő

$$t = \frac{R\omega_0}{3\mu g}. \quad (8.11.9)$$

(b) Az eközben megtett út

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \mu g \frac{R^2 \omega_0^2}{9 \mu^2 g^2} = \frac{1}{18} \frac{R^2 \omega_0^2}{\mu g}. \quad (8.11.10)$$

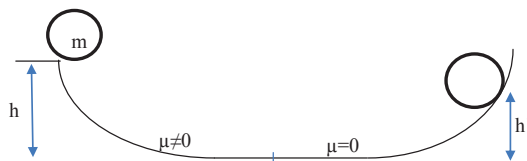
**8.12. Feladat:** A 39. ábrán látható módon az  $m$  tömegű  $\theta = \frac{1}{2} m R^2$  tehetetlenségi nyomatékú korongot egy lejtőn  $h$  magasságban elengedünk. A lejtő tapadási súrlódási együtthatója  $\mu \neq 0$ , ezért a korong itt tisztán gördül. A pálya második fele viszont súrlódásmentes.

- Mekkora sebessége és szögsebessége van a korongnak a lejtő alján?
- Milyen  $h'$  magasra megy fel a súrlódásmentes emelkedőn a korong?
- Mennyi a lejtő tetején a korong impulzus momentuma?

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a  $v = R\omega$ . A mechanikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \theta \omega^2. \quad (8.12.1)$$



39. ábra.

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \quad (8.12.2)$$

és

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3}gh}. \quad (8.12.3)$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a lejtőn felszalad  $h'$  és ott egy helyben forog  $\omega$  szögsebességgel. Azaz translációs kinetikus energiája alakul át helyzeti energiává:

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2. \quad (8.12.4)$$

Innen az emelkedés magassága

$$h' = \frac{2}{3}h. \quad (8.12.5)$$

(c) A lejtő tetején forgó korong az impulzusmomentuma:

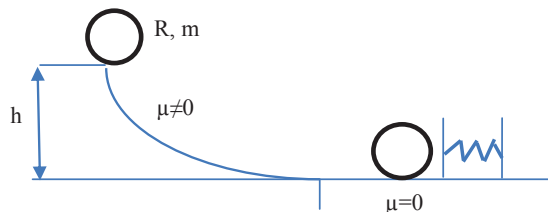
$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR \sqrt{\frac{gh}{3}}. \quad (8.12.6)$$

**8.13. Feladat:** Egy  $R = 10$  cm sugarú,  $m = 1$  kg tömegű tömör korong ( $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ ) tisztán legördül egy  $h = 0,3$  m magasságú lejtős pályán. A lejtő alján nekiütközik a 40. ábrán látható fékezőrugónak, amelynek ütközője és a pálya ezen szakasza súrlódásmentes. A  $k = 400$  N/m rugóállandójú rugó nyugalmi hossza  $l_0 = 20$  cm.

(a) Mekkora a korong sebessége és szögsebessége a lejtő alján?

(b) Mekkora a korong impulzusmomentuma a rugó összenyomódása után?

(c) Mennyivel nyomódott össze a rugó?



40. ábra.

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a  $v = R\omega$ . A mechanikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.13.1)$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 2\text{m/s} \quad (8.13.2)$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = 20\text{rad/s}. \quad (8.13.3)$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a rugót összenyomja és ott egyhelyben forog  $\omega$  szögsebességgel:

$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}} = 0,1\text{kg m}^2/\text{s}. \quad (8.13.4)$$

(c) A fentiek szerint a translációs kinetikus energiája alakul csak át rugalmas energiává:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2. \quad (8.13.5)$$

Innen az összenyomódás mértéke:

$$\Delta = l_0 - l = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} = 0,1\text{m}. \quad (8.13.6)$$

**8.14. Feladat:** Egy  $R$  sugarú,  $m$  tömegű homogén tömegeloszlású nem forgó kereket tengelyre merőlegesen  $v_0$  sebességgel meglökünk és a  $\mu$  súrlódási együtthatójú talajra engedjük. A kerék tehetetlenségi nyomatéka  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ .

(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?

(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

**Megoldás:**

(a) A kereket a talajra engedve a  $v_0$  sebességgel ellentétes  $F_s = -\mu mg$  súrlódási erő hat, amely egyrészt csökkenti a sebességet, másrészt a kerék középpontjára forgatónyomatékot ad, amely a kereket forgásba hozza. A translációra vonatkozó mozgásegyenlet

$$ma = F_s = -\mu mg, \quad (8.14.1)$$

amelyből a gyorsulás

$$a = -\mu g. \quad (8.14.2)$$

Így a kerék sebessége a

$$v(t) = v_0 - \mu gt \quad (8.14.3)$$

függvény szerint változik. A forgómozgásra a forgómozgás alapegyenlete írható fel, amely — figyelembe véve a forgatónyomaték előjelét —

$$\theta\beta = \mu mgR. \quad (8.14.4)$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítésével, valamint az egyenlet rendezésével a szöggyorsulás

$$\beta = \frac{2\mu g}{R}. \quad (8.14.5)$$

A kerék szögsebessége az

$$\omega(t) = \frac{2\mu g}{R}t \quad (8.14.6)$$

függvény szerint változik. A tiszta gördülés feltétele, hogy a

$$v(t) = R\omega(t) \quad (8.14.7)$$

összefüggés teljesüljön, azaz a

$$v_0 - \mu gt = R \frac{2\mu g}{R}t \quad (8.14.8)$$

fennálljon. Ebből a tiszta gördülésig eltelt időt kifejezve kapjuk, hogy

$$t = \frac{v_0}{3\mu g}. \quad (8.14.9)$$

(b) A megtett út az

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (8.14.10)$$

négyzetes úttörvénybe helyettesítve

$$s = \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{\mu g} \quad (8.14.11)$$

**8.15. Feladat:** \*\* A  $m$  tömegű  $R$  sugarú homogén korongot forgástengelye körül  $\omega_0$  szögsebességgel megforgatunk, majd lapjával — a tengely merőleges a felületre — a sík asztalra helyezzük. A korong és asztal között  $\mu$  súrlódási tényező van. Feltételezve, hogy korong egyenletesen nyomja az asztalt, mennyi idő múlva áll meg a korong? (A korong tehetetlenségi nyomatéka  $\theta = \frac{1}{2} m R^2$ .)

**Megoldás:** A feladat megoldásának kulcsa az eredő forgatónyomaték kiszámolása. Vezessük be a felületi tömegsűrűséget, amely

$$\eta = \frac{m}{R^2 \pi}. \quad (8.15.1)$$

A korongból tekintsünk egy  $r$  sugarú  $dr$  szélességű körgyűrűt. Ennek tömege

$$dm = \eta 2r \pi dr. \quad (8.15.2)$$

A körgyűrű érintője mentén ébredő  $dF_s$  súrlódási erő

$$dF_s = \mu dm g, \quad (8.15.3)$$

amely erő a körgyűrű középpontjára vonatkoztatva

$$dM = \mu dm g r = 2\pi \mu \eta g r^2 dr \quad (8.15.4)$$

forgatónyomatékat hoz létre. A korongra ható teljes forgatónyomaték

$$M = \int_0^R 2\pi \mu \eta g r^2 dr = \frac{2\pi}{3} \mu \eta g R^3 = \frac{2}{3} \mu m g R. \quad (8.15.5)$$

Felírva a forgómozgás alapegyenletét

$$\theta \beta = M = \frac{2}{3} \mu m g R \quad (8.15.6)$$

a szögsebesség kiszámolható:

$$\beta = \frac{4}{3} \frac{\mu g}{R}. \quad (8.15.7)$$

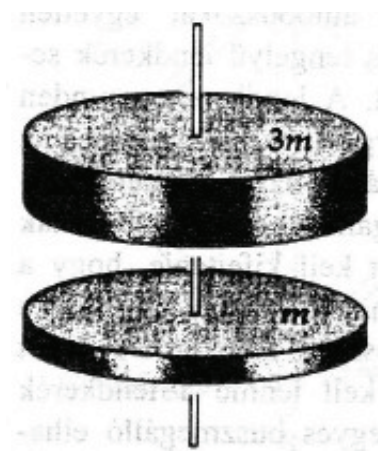
A megállásig eltelt idő

$$t = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{3}{4} \frac{\omega_0 R}{\mu g}. \quad (8.15.8)$$

## Impulzusmomentum megmaradása

**8.16. Feladat:** (HN 12B-28) A 41. ábrán látható két tömör tárcsa sugara  $R$ , egyik tömeg  $m$ , a másiké  $3m$ . A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának  $\omega_0$  kezdő szögsebességet adunk, majd nagyon kis magasságból ráejtjük a kezdetben nyugalomban lévő alsó tárcsára. A tárcsák — a közöttük fellépő súrlódás hatására — végül közös  $\omega$  szögsebességgel együtt forognak.

- A megadott mennyiségekkel fejezzük ki a végső  $\omega$  szögsebességet, és
- a tárcsák egymáson való súrlódása közben végzett munkát!
- Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási "ütközésnek"?



41. ábra.

### Megoldás:

(a) Külső forgatónyomatékok hiányában az impulzusmomentum megmaradás tételét alkalmazhatjuk. Kezdetben a  $3m$  tömegű test forog  $\omega_0$  szögsebességgel. Az impulzusmomentum

$$N_1 = \theta_{3m}\omega_0 = \frac{1}{2}3mR^2\omega_0, \quad (8.16.1)$$

ahol  $\theta_{3m}$  a  $3m$  tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Az összetapadás után együtt forog a két test, az együttes impulzusmomentum

$$N_2 = (\theta_m + \theta_{3m})\omega = \left(\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2\right)\omega, \quad (8.16.2)$$

ahol  $\theta_m$  az  $m$  tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Mivel  $N_1 = N_2$ , így

$$\frac{1}{2}3mR^2\omega_0 = \left(\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2\right)\omega, \quad (8.16.3)$$

amelyből

$$\omega = \frac{3}{4}\omega_0. \quad (8.16.4)$$

(b) A kezdeti kinetikus energia

$$E_1 = \frac{1}{2}\theta_{3m}\omega_0^2 = \frac{1}{4}3mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2, \quad (8.16.5)$$

míg az összetapadás után

$$E_2 = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_{3m})\omega^2 = \frac{1}{4}4mR^2\omega^2 = \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2. \quad (8.16.6)$$

A két energia különbsége, amennyi a belső energiát növeli:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2 - \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{16}mR^2\omega_0^2. \quad (8.16.7)$$

(c) Az egyenesvonalú analogon: a  $3m$  tömegű  $v_0$  sebességű test ütközése a nyugvó  $m$  tömegű testtel. Ekkor a közös sebesség:

$$v = \frac{3}{4}v_0. \quad (8.16.8)$$

**8.17. Feladat:** (HN 12C-50) A 42. ábra egy  $r_0$  sugarú körpályán  $v_0$  sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó  $m$  tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test az  $r_0/2$  sugarú körpályára kerüljön. Számítsuk ki az  $m$ , az  $r_0$  és  $v_0$  függvényében

- a test végső sebességét és
- a fonál új helyzetbe húzása során végzett munkát!
- Mutassuk meg, hogy a végzett munka egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával!

Megoldás:

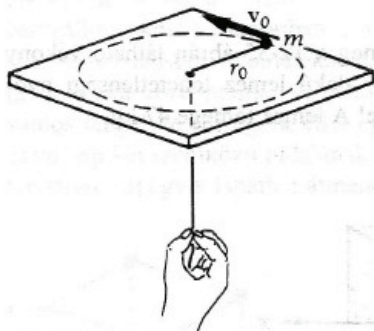
(a) Mivel jelen esetben a mozgás során mindvégig a kötélerő sugárirányú, azaz centrális, így az impulzusmomentum megmaradásának tétele alkalmazható

$$mv_0r_0 = mv\frac{r_0}{2}. \quad (8.17.1)$$

Ebből a test végső sebessége

$$v = 2v_0. \quad (8.17.2)$$





42. ábra.

(b) A munka kiszámolásához először a  $K$  kötélrőt egy közbenső  $r$  sugarú pályára kell megadni. Ehhez egyrészt újra alkalmazni kell az impulzusmomentum megmaradásának tételét

$$mv_0r_0 = mvr, \quad (8.17.3)$$

másrészt fel kell írni a körpályán való mozgásra a

$$K = m \frac{v^2}{r} \quad (8.17.4)$$

mozgásegyenletet. E kettőből az origó felé mutató  $K$  kötélrő

$$K = m \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}. \quad (8.17.5)$$

A végzett munka — figyelembe véve az erő és a radiális egységvektor ellentétes irányát —

$$W = - \int_{r_0}^{r_0/2} m \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3} dr = \frac{1}{2} m v_0^2 r_0^2 \left[ \frac{1}{r^2} \right]_{r_0}^{r_0/2} = \frac{3}{2} m v_0^2. \quad (8.17.6)$$

(c) A kinetikus energia megváltozása

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m (2v_0)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{3}{2} m v_0^2 = W, \quad (8.17.7)$$

ahogy annak lennie is kell.

## Forgási energia

**8.18. Feladat:** Az  $L$  hosszúságú  $m$  tömegű rúd függőlegesen áll, az alsó pontja súrlódásmentes csapággal csatlakozik a talajhoz. Az egyensúlyi helyzetből kimozdul és a talajba csapódik.

Mekkora a rúd szögsebessége a becsapódás pillanatában? A rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúd végére vonatkoztatva  $\theta = \frac{1}{3}mL^2$ .

**Megoldás:** A talajszintet választva a potenciális energia zérus pontjának a rúd — a rúd tömegközéppontjának — potenciális energiája álló helyzetben

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \quad (8.18.1)$$

míg a fekvő helyzetben

$$E_{p2} = 0. \quad (8.18.2)$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \quad (8.18.3)$$

míg a végső kinetikus energia a forgásból származó

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.18.4)$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ( $E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$ ) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.18.5)$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \quad (8.18.6)$$

adódik.

**8.19. Feladat:** \* Az  $L$  szárhosszúságú, száranként  $m$  tömegű létra egyik lába a falnál áll, míg a másik lába súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes talajon. A kezdetben  $2\alpha$  szögre szétnyitott létra szára csúszik, és a létra teljesen szétnyílván a talajba csapódik. Mekkora a létra szárainak szögsebessége a becsapódás pillanatában? (A rúd végpontjára vett tehetetlenségi nyomatéka  $\frac{1}{3}mL^2$ .)

**Megoldás:** A létra a becsapódás pillanatában csak forgómozgást végez. Ez belátható, ha végiggondoljuk a következőt. Ha a létra csúcsa — a két szár találkozási pontja —  $v_x$  sebességgel halad, akkor csúszó talppont sebessége  $2v_x$ . A csúcspon a becsapódás pillanatában csak függőleges mozgást végez ( $v_x = 0$ ), így a csúszó talppont sebessége ugyancsak zérus. Azaz a létra

egyetlen pontja sem végez haladó mozgást. A kezdeti helyzeti energia alakul át forgási energiává:

$$2mg\frac{L}{2}\cos\alpha = 2\frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.19.1)$$

Egyszerűsítés és átrendezés után mindkét rúd szögsebessége

$$\omega\sqrt{\frac{3g}{L}}. \quad (8.19.2)$$

**8.20. Feladat:** \* A  $h$  magasságú toronyugró a palló szélén áll és összegörnyedés nélkül — merev rúdként — a vízbe fordul. (A lába a pallón nem csúszik meg a dőlés során.) Mekkora szögnél válik el a pallótól?

**Megoldás:** Jelölje  $\alpha$  azt a függőlegessel bezárt szöveget, amelynél éppen elvélük a pallótól a toronyugró lába. Első lépésként számítsuk ki mekkora ebben a pillanatban a szögsebessége. A palló szintjét tekintve a potenciális energia zérus pontjának a kezdeti helyzeti energia

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \quad (8.20.1)$$

míg a dőlt helyzetben

$$E_{p2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha. \quad (8.20.2)$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \quad (8.20.3)$$

míg az elválás pillanatához tartozó forgásból származó kinetikus energia

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.20.4)$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ( $E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$ ) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.20.5)$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre azt kapjuk, hogy

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\alpha)}. \quad (8.20.6)$$

A rúd tömegközéppontjának sebessége

$$v = \frac{L}{2}\omega = \sqrt{\frac{3}{4}gL(1 - \cos\alpha)}. \quad (8.20.7)$$

Az elválás pillanatában — egyetlen erőként — az  $mg$  súlyerő rúdirányú (radiális) komponense hat és tartja körpályán a rúd tömegközéppontját, azaz

$$m \frac{v^2}{\left(\frac{L}{2}\right)} = mg \cos \alpha. \quad (8.20.8)$$

A sebesség behelyettesítése és az egyszerűsítések után

$$\cos \alpha = \frac{3}{7} \quad (8.20.9)$$

adódik, amelyből az elválás pillanatához tartozó szög  $\alpha = 64,62^\circ$ .