

B 28.) feladat

Adott egy két szabadságfokú rendszer aminek Hamilton függvénye a következő:

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - \alpha q_1^2 + \beta q_2^2$$

Tekintse az alábbi függvényeket:

$$F_1 = \frac{p_1 - \alpha q_1}{q_2} \quad \text{valamint} \quad F_2 = q_1 q_2$$

- A megfelelő Poisson zárójel alkalmazásával mutassa meg, hogy F_1 és F_2 mozgásállandók!
- Határozza meg a $[F_1, F_2]$ Poisson zárójel értékét! Értelmezze a kapott eredményt!

B 29.) feladat

Adott egy két szabadságfokú rendszer: (q_1, q_2, p_1, p_2) . Tekintse az alábbi kanonikus transzformációt:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2 \right] & q_2 &= \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2 \right] \\ p_1 &= \frac{\alpha}{2} \left[\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2 \right] & p_2 &= -\frac{\alpha}{2} \left[\sqrt{2P_1} \sin Q_1 - P_2 \right] \end{aligned}$$

(MEGJEGYZÉS: Ez szerepelt a 8. gyakorlaton.)

Tekintse a meghatározandó $W_{13}(q_1, p_2, Q_1, Q_2)$ „kevert” alkotófüggvényt!

- Fejezze ki a $\{p_1, q_2, P_1, P_2\}$ változókat a $\{q_1, p_2, Q_1, Q_2\}$ kanonikus változók függvényeként!
- Írja fel a dW_{13} teljes differenciál formális alakját. Írja be a parciális deriváltak helyére a megadott transzformáció által szolgáltatott értékeket!
- A szóban forgó transzformáció segítségével alakítsa úgy a kapott kifejezést, hogy $dW_{13} = \psi_1 dq_1 + \psi_2 dQ_1 + \psi_3 dp_2 + \psi_4 dQ_2$ teljes differenciál legyen!
Azaz $\psi_k(q_1, p_2, Q_1, Q_2)$ ($k=1,2,3,4$)
- Az eddigiek ismeretében határozza meg a $W_{13}(q_1, p_2, Q_1, Q_2)$ alkotófüggvényt!

B 30.) feladat

Adott a következő transzformáció:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 & Q_2 &= p_2 \\ P_1 &= p_1 - 2p_2 & P_2 &= -2q_1 - q_2 \end{aligned}$$

- A szimplektikus \underline{M} mátrix segítségével mutassa meg, hogy kanonikus transzformációról van szó!
- Látható, hogy „ $Q_1 = q_1$ ” miatt $W_1(q_1, Q_1)$ alakú alkotófüggvény nem lehet jó (lásd e.) feladat!)! Keresse az alkotófüggvényt „kevert alakban”, azaz legyen $W_{13}(p_1, q_2, Q_1, Q_2)$. Írja fel a dW_{13} teljes differenciál formális alakját. Írja be a parciális deriváltak helyére a megadott transzformáció által szolgáltatott értékeket!
- A szóban forgó transzformáció segítségével alakítsa úgy a kapott kifejezést, hogy $dW_{13} = \psi_1 dp_1 + \psi_2 dQ_1 + \psi_3 dq_2 + \psi_4 dQ_2$ teljes differenciál legyen!
Azaz $\psi_k(p_1, q_2, Q_1, Q_2)$ ($k=1,2,3,4$)

d..) A kapott teljes differenciál segítségével keresse meg a $W_{13}(p_1, q_2, Q_1, Q_2)$ függvényt!

e.) Mutassa meg, hogy a

$$W_1(q_1, q_2, Q_1, Q_2) = W_{13}(p_1, q_2, Q_1, Q_2) + q_1 p_1$$

módon, Legendre transzformációval formálisan definiált „tisztá” alkotófüggvény előállításánál a szóban forgó transzformációt! Végre tudja hajtani a Legendre transzformációt? (ehhez ugye az kéne, hogy ki tudja fejezni p_1 -et $\{q_1, q_2, Q_1, Q_2\}$ függvényében.)
