

Fizika M1, BME, gépészmérnök szak, 2017. őszi félév (v5)

Pályi András¹

¹*Department of Physics, Budapest University of Technology and Economics, Hungary*
(Dated: 2017. szeptember 24.)

Ebben a fájlban az előadás menetrendjét követve gyűjtöm össze az egyes témakörökhöz kapcsolódó gyakorló feladatokat. A fájl hétről-hétre frissülni fog az adott hét feladataival. A zárthelyiken ehhez hasonló feladatok várhatók.

(F-0/1) Nagyon ritkán, de előfordul, hogy egy gépészhallgató készülés és tudás nélkül megy el a zárthelyire. A zárthelyin feleletválasztós tesztet kap, 20 kérdéssel, és minden kérdésre 4 lehetséges válaszlehetőség közül kell kiválasztania az egyetlen helyes választ. 7 helyes válasz még elégtelen, 8 helyes válasz már elégségest ér, azaz 40%-tól eredményes a zárthelyi. Csupán véletlenül tippelgetve mekkora a valószínűsége, hogy eredményes lesz a zárthelyije?

TERV: TÉMÁK, MENETREND

- **Mágneses rezonancia.** Klasszikus és kvantummechanikai leírás, orvosi képalkotás. (1.-3. előadás)
- **Elektronok.** Elektronállapotok atomokban és szilárdtestekben. Szigetelők, félvezetők, fémek. Elektromos vezetés. (4.-6. előadás)
- 1. zárthelyi (7. előadás)
- **Elektromechanika.** Elektromechanikai kölcsönhatási mechanizmusok. Szenzorok és aktuátorok. (8.-10. előadás)
- **Lézerek.** (11. előadás, Sarkadi Tamás)
- **Részecskefizika.** (12. előadás, Takács Gábor)
- 2. zárthelyi (13. előadás)

I. MÁGNESES REZONANCIA

A. Mágneses rezonancia képalkotás (MRI) dióhéjban

B. MRI egyetlen protonnal

(F-I/1) Az elektromágnesség klasszikus elméletében milyen objektumhoz rendelhetünk (nemnulla) mágneses dipólmomentumot (vagy rövidebben: mágneses momentumot)?

(F-I/2) 1 cm átmérőjű kör alakú drótban 1 mA áram folyik. Mekkora ennek a rendszernek a mágneses momentuma? Mekkora és milyen irányú mágneses teret kelt ez a köráram a vezető síkjában, a vezető középpontjától 1 méterre?

(F-I/3) Mekkora egy proton (hidrogén-atommag, H-atommag) mágneses dipólmomentuma?

(F-I/4) Mekkora (hány Tesla) mágneses teret kelt egy proton 1 méter távolságban? És 10 nanométer távolságban?

(F-I/5) Fejezd ki a Tesla mértékegységet SI alapegységekben!

(F-1/6) Nagyságrendileg mekkora a Föld mágneses tere a Föld felszínén?

(F-1/7) Mi a helyzeti energiája egy adott \mathbf{B} mágneses térbe helyezett, adott irányban álló, adott nagyságú \mathbf{m} mágneses momentumnak?

(F-1/8) Az origóban rögzítünk egy protont, és körbevesszük azt egy xy síkban fekvő, 1 m sugarú körvezetővel. 50 MHz frekvenciával megforgatjuk a protont úgy, hogy a mágneses momentuma az xz síkban forog. Mekkora amplitúdójú váltóáramú (ac) feszültséget indukál így a proton mágneses momentuma a körvezetőben?

(F-1/9) Becsüld meg, hogy hány darab H-atom van a testedben. A becsléshez hagyatkozz arra a tényre, hogy az emberi test kb. 70%-a víz.

C. Kibillentett mágneses momentum Larmor-precesszál

(F-I/10) Hány radián 30° ? 45° ? 60° ? Hány fok 1 radián? $\pi/3$ radián? $\pi/2$ radián?

(F-I/11) Egy egységvektor polárszöge 30° , azimutszöge 45° . Határozd meg az egységvektor Descartes-koordinátáit, $(x, y, z) = ?$

(F-I/12) Egy vektor Descartes-koordinátái $\mathbf{r} = (x, y, z) = (2, 1, 2)$. Határozd meg a gömbi polárkoordinátáit, $(r, \theta, \varphi) = ?$

(F-I/13) Egy protont z-irányú, 1 Tesla nagyságú mágneses térbe helyezünk, és mágneses momentumát x irányba állítjuk a $t = 0$ időpillanatban, majd elengedjük. Másodpercenként hányszor fordul körbe a z tengely körül a mágneses momentum?

D. Rezonánsan gerjesztett mágneses momentum Rabi-oszcillál

(F-I/14) Mik a jellemzői (k hullámszám, ω körfrekvencia, f frekvencia, T periódusidő) a $\lambda = 540$ nm hullámhosszú zöld fénynek?

(F-I/15) Egy protont 1 Tesla mágneses térbe helyezünk. Mekkora a helyzetienergia-különbség a térrel ellentétesen álló és a tér irányába álló mágneses momentum között? Milyen hullámhosszú és frekvenciájú elektromágneses sugárzásnak felel meg ez az energiakülönbség? Azaz milyen hullámhosszú és frekvenciájú elektromágneses sugárzásnak van ugyanakkora energiakvantuma, mint ez az energiakülönbség?

(F-I/16) Egy protont z-irányú, 1 Tesla nagyságú sztatikus mágneses térbe helyezünk, úgy hogy mágneses dipólmomentuma párhuzamos a mágneses térrel. 1 millitesla amplitúdójú, x irányú ac mágnesestér-impulzussal gerjesztjük. Hogyan kell megválasztanunk a gerjesztő impulzus frekvenciáját, hogy a proton mágneses dipólmomentumát át tudjuk forgatni a sztatikus mágneses térrel átellenes irányba?

(F-I/17) Az előző elrendezésben mennyi ideig tartson a gerjesztő impulzus, hogy a proton mágneses momentumát éppen átforgassuk a sztatikus mágneses térrel átellenes irányba?

E. Mágnesestér-gradiens teszi lehetővé a képalkotást

F. Állapotjelzők és fizikai mennyiségek a klasszikus mechanikában: szabadon eső tömegpont

(F-I/18) Egy méter magasból elengedünk egy egykilós testet. Mennyi idő múlva ér földet? Mekkora sebességgel csapódik be?

(F-I/19) Az előző feladatban leírt jelenség esetén melyek a rendszer állapotjelzői? Ezek milyen függvények, azaz honnan hova képeznek? Melyek a rendszer paraméterei? Nevezd meg egy olyan fizikai mennyiséget, ami nem állapotjelző.

(F-I/20) Írd fel a fenti rendszer mozgásegyenleteit $\dot{x}(t) = \dots$, $\dot{v}(t) = \dots$ alakban. Add meg a kezdeti feltételeket is. Legyen a koordináta-rendszer origója a földfelszínen, és az x tengely legyen felfelé irányítva.

(F-I/21) Tekintsünk egy adott m tömegű, egydimenziós mozgást végző tömegpontot. A t időpontban $x(t)$ a helykoordinátája, $v(t)$ a sebessége, és $F(t)$ erő hat rá. Add meg a tömegpont helykoordinátáját és sebességét infinitezimálisan rövid Δt idő múlva: $x(t + \Delta t) = ?$, $v(t + \Delta t) = ?$

(F-I/22) Egy k rugóállandójú rugóra rögzített m tömegű testet $F(t) = F_0 \sin(2\pi ft)$ erővel gerjesztünk. Írd fel a mozgásegyenleteket, $\dot{x}(t) = \dots$, $\dot{v}(t) = \dots$ alakban.

G. Állapotjelzők és fizikai mennyiségek a kvantummechanikában: Larmor-precesszáló mágneses momentum

(F-I/23) Egy protont sztatikus mágneses térbe helyezünk. A proton mágneses momentumának dinamikáját szeretnénk kvantummechanikailag leírni. Mi az állapotjelző a kvantummechanikai leírásban? Milyen függvény, azaz honnan hova képez? Mik a fizikai mennyiségek? Milyen függvények, honnan hova képeznek?

(F-I/24) Hogyan fejezhető ki a proton mágneses momentumának kvantummechanikai várhatóértéke a hullámfüggvény segítségével?

(F-I/25) Az alábbi hullámfüggvények jellemezhetik egy proton mágneses momentumának állapotát egy adott időpillanatban: $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\psi_5 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ezek közül mely hullámfüggvények normáltak, és mely hullámfüggvények nem normáltak?

(F-I/26) Számold ki ψ_1 és ψ_4 skalárszorzatát, $\langle \psi_1 | \psi_4 \rangle = ?$

(F-I/27) Írd fel a három Pauli-mátrixot.

(F-I/28) Egy proton mágneses momentumát egy adott időpillanatban a $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hullámfüggvény jellemzi. Számold ki a mágneses momentum vektorának várhatóértékét, $\langle \hat{m}_x \rangle_\psi = ?$, $\langle \hat{m}_y \rangle_\psi = ?$, $\langle \hat{m}_z \rangle_\psi = ?$ Ismételd meg a számolást a $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ hullámfüggvénnyel.

(F-I/29) A proton mágneses momentumát az $\hat{\mathbf{m}} = (\hat{m}_x, \hat{m}_y, \hat{m}_z) = \mu_p \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mu_p (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ operátor reprezentálja. A protont $\mathbf{B} = (B_0, 0, 0)$ mágneses térbe helyezzük. Írd fel a Hamilton-operátort és a hullámfüggvény $\psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}$ két komponensének mozgásegyenleteit (azaz az időfüggő Schrödinger-egyenletet).

H. Az energiasajátállapotok stacionáriusak

(F-I/30) A három Pauli-mátrix:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Határozd meg mindhárom Pauli-mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

(F-I/31) Egy protont z irányú, B_0 nagyságú mágneses térbe helyezünk. A proton mágneses momentumára vonatkozó Hamilton-operátor ekkor

$$\hat{H} = -\mu_p B_0 \hat{\sigma}_z. \quad (2)$$

Add meg a hullámfüggvény időfejlődését, $\psi(t) = ?$, ha a kezdeti hullámfüggvény $\psi(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(F-I/32) Egy protont x irányú, B_0 nagyságú mágneses térbe helyezünk. Add meg a Hamilton-operátor 2×2 -es mátrixát. Írd fel az időfüggetlen Schrödinger-egyenletet. Határozd meg az alapállapot és a gerjesztett állapot hullámfüggvényét és energiasajátértékét. Ha a $t = 0$ időpillanatban az alapállapotban van a rendszer, akkor hogyan időfejlődik, $\psi(t) = ?$ Számítsd ki a mágneses momentum z komponense várhatóértékének időfejlődését, $\langle \hat{m}_z \rangle_{\psi(t)} = ?$.

I. A hőmérséklet növelésével nő a gerjesztett állapot betöltési valószínűsége

(F-I/33) Egy protont 1 Tesla mágneses térbe teszünk. Termikus egyensúlyban milyen valószínűséggel van alapállapotban, és milyen valószínűséggel van gerjesztett állapotban? Mekkora a mágneses momentumának termikus átlaga? Mekkora a termikus polarizációja, azaz a mágneses momentum termikus átlagának és hosszának (μ_p) aránya?

(F-I/34) Szobahőmérsékleten mekkora mágneses térbe kellene tenni a protont, hogy a termikus polarizációja 90%-os polarizációja legyen?

(F-I/35) Milyen hőmérsékletre kellene lehűteni egy 1 Tesla mágneses térbe helyezett protont, hogy termikus polarizációja 90%-os legyen?

(F-I/36) Az exponenciális függvény segítségével definiáld a trigonometrikus (sin, cos, tan, cot) és a hiperbolikus (sinh, cosh, tanh, coth) függvényeket.

(F-I/37) Mágneses rezonanciás képalkotás esetén ésszerű cél lehet egy 1 mm^3 -es térbeli felbontás elérése szobahőmérsékleten. Becsüljük meg, hogy ehhez milyen nagyságrendű feszültséget kell mérni tudni, ha egy egyszerű, makroszkopikus körvezetőt használunk detektorként. Tegyük fel, hogy a vizsgált minta víz, ami az origóban elhelyezett $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ kockában található. A minta z-irányú, 1 Tesla nagyságú mágneses térben van, és a H-atommagok mágneses momentuma ekörül Larmor-precesszál. A detektor egy 5 cm sugarú körvezető, ami az yz síkkal párhuzamosan helyezkedik el, és középpontja az $\mathbf{r}_k = (10 \text{ cm}, 0, 0)$ pontban van. (a) Rajzold le az elrendezést. (b) Mekkora a minta H-atommagjainak teljes mágneses momentuma termikus átlagának abszolútértéke? (c) Hogyan változik az időben a minta teljes mágneses momentumának vektora? (d) Becsüld meg, hogy a Larmor-precesszáló mágneses momentumok mekkora amplitúdójú váltófeszültséget indukálnak a detektorban.

II. ELEKTRONOK

A. Atomok abszorpciós színeke vonalas szerkezetet mutat

(F-II/1) A két elektronvoltos energiakvantummal rendelkező elektromágneses sugárzásnak mennyi a hullámhossza és a frekvenciája?

B. A klasszikus Rutherford-féle atommodell nem magyarázza a vonalas színeképet

(F-II/2) Egy elektron a hidrogénatom klasszikus Rutherford-modelljének megfelelően körpályán mozog egy rögzítettnek tekintett proton körül. Tegyük fel, hogy a mozgás az xy síkban történik, és a pálya sugara $R = 0.2 \text{ \AA}$. Mekkora az elektron sebessége m/s egységekben? Hányadrésze ez a fénysebességnek? Mekkora és milyen irányú az elektron \mathbf{L} perdülete (pontosabban perdület-vektora) SI egységekben, illetve \hbar egységekben? Mekkora az elektron mozgási energiája elektronvoltban kifejezve? Mekkora az elektron helyzeti energiája elektronvoltban kifejezve?

(F-II/3) Tekintsük az előző feladatban vizsgált egyenletes körmozgást. Hogyan függ az elektron teljes energiája az $L = |\mathbf{L}|$ perdületétől?

C. A félklasszikus Bohr-modell megmagyarázza a vonalas színeképet

(F-II/4) A félklasszikus Bohr-modell szerint milyen frekvenciájú és hullámhosszú elektromágneses sugárzást bocsát ki a hidrogénatom elektronja, amikor az első gerjesztett állapotból az alapállapotba relaxál?

D. A kvantummechanikai modell: az elektron Schrödinger-egyenlete

(F-II/5) Egy dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a klasszikus mechanika eszközeivel. Az elektron helyzeti energiájának helyfüggése $V(x) = -V_0 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ alakú. Add meg az elektron teljes energiáját a sebessége (v) és a pozíciója (x) függvényeként. Fejezd ki ezt a teljes energiát az impulzusa (p) és a pozíciója függvényeként.

(F-II/6) Ha az előző példában az elektronról tudjuk, hogy kötött állapotban van, akkor mit tudunk a teljes energiájáról? Ha tudjuk, hogy szórás állapotban van, akkor mit tudunk a teljes energiájáról?

(F-II/7) Egy dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a kvantummechanika eszközeivel. Az elektron hullámfüggvénye honnan hova képez? Mi a dimenziója (mértékegysége) az argumentumainak és az értékének?

(F-II/8) Egy dimenzióban mozgó elektron hullámfüggvénye egy adott pillanatban

$$\psi(x) = \begin{cases} N \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \text{ha } 0 < x < L, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (3)$$

Normált-e a ψ hullámfüggvény, ha $N = 1$? Hogyan válasszuk N -t, hogy ψ normált legyen? Rajzold fel a normált hullámfüggvényt. Rajzold fel az elektron $|\psi(x)|^2$ megtalálási valószínűségét a pozíció függvényeként.

(F-II/9) Egy dimenzióban mozgó elektron hullámfüggvénye egy adott pillanatban

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \text{ha } 0 < x < L, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (4)$$

Ebben az állapotban mekkora a valószínűsége annak, hogy az elektront a $[0, L/4]$ szakaszon találjuk?

(F-II/10) Az előző ψ hullámfüggvénnyel jellemzett állapotban mennyi a pozíció várhatóértéke? Mennyi az impulzus várhatóértéke?

(F-II/11) Három dimenzióban mozgó elektron dinamikáját szeretnénk leírni a kvantummechanika eszköztárával. Az elektron hullámfüggvénye honnan hova képez? Mi a dimenziója (mértékegysége) az argumentumainak és az értékének?

(F-II/12) Írd fel a rögzített proton Coulomb-erőterében mozgó elektron időfüggetlen Schrödinger-egyenletét. Mik az ismeretlenek?

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönet Fehér Titusznak, Fürjes Péternek, Halbritter Andrásnak, Mihály Györgynek, Orosz Lászlónak a tananyag összeállításában nyújtott segítségért.