1. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből

Impulzustétel, impulzusmegmaradás törvénye

1.1. Feladat: Órai megoldásra 1. feladat Egy $m = 4$ kg tömegű kalapács $v_0 = 6$ m/s sebességgel érkezik a szög fejéhez és $\Delta t = 0,002$ s alatt fékeződik le, miközben a szög behatol a fába. (A szög tömege elhanyagolható a kalapács tömegéhez viszonyítva.)
(a) Számítsuk ki az átlagos fékező erőt!
(b) Számítsuk ki a szög útját a fában!
(c) Mekkora munkát végzett a fa a szögön?

Megoldás:
(a) A szögre ható átlagos fékező erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -12000\,\mathrm{N}, \qquad (1.1.1)$$

ahol a negatív előjel a fékező hatást fejezi ki.
(b) A szög átlagos gyorsulása a sebességváltozásával számolható ki. Amennyiben a szög nem deformálódott az ütés alatt, a kezdeti sebessége meg kell hogy egyezzen a kalapács sebességével. Ezért a sebesség megváltozása $\Delta v = -v_0$. A szög gyorsulása ezért

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -3000\,\mathrm{m/s^2}, \qquad (1.1.2)$$

amit felhasználhatunk a szög által megtett út meghatározásához.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0,006\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{mm}. \qquad (1.1.3)$$

(c) A fa által végzett munka a szögön:

$$W = Fs = -72\,\mathrm{J}. \qquad (1.1.4)$$

1.2. Feladat: (HN 8B-27) A kezdetben nyugalomban lévő 5 kg tömegű testre 5 másodpercig 6 N állandó erő hat, majd az erő 3 s alatt egyenletesen zérusra csökken. Mekkora sebességet ér el a test?

Megoldás: Jelölések: $m = 5$ kg; $t_1 = 5$ s; $F = 6$ N és $t_2 = 8$ s a második időintervallum vége.
A test impulzusváltozását kell kiszámoljuk. A $0 \le t \le t_1 = 5$ s időintervallumban az impulzusváltozás

$$\Delta I_1 = F t_1 = 30\,\mathrm{kgm/s}. \tag{1.2.1}$$

A második szakaszon az erő időbeli függése

$$F(t) = \frac{F}{t_2 - t_1}(t_2 - t). \tag{1.2.2}$$

A második időintervallumon történő impulzusváltozás az egyenes alatti területtel egyszerűen számolható, amely

$$\Delta I_2 = \frac{F}{2}(t_2 - t_1) = 9\,\mathrm{kgm/s}. \tag{1.2.3}$$

A teljes impulzusváltozás

$$\Delta I = \Delta I_1 + \Delta I_2 = 39\,\mathrm{kgm/s}, \tag{1.2.4}$$

amelyet a tömeggel osztva a végsebességet kapjuk:

$$v = \frac{\Delta I}{m} = 7,8\,\mathrm{m/s}. \tag{1.2.5}$$

1.3. Feladat: (HN 8C-42) * Egy 8 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At - Bt^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 24$ N/s és $B = 1,2$ N/s^2.
(a) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet ér el a tömeg mielőtt újra megállna!
(b) Mennyi idő múlva következik ez be?

Megoldás:
(a) A test impulzusváltozása

$$\Delta I = \int_0^t F(t)\mathrm{d}t = \int_0^t (At - Bt^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{3}Bt^3. \tag{1.3.1}$$

Innen a sebesség

$$v(t) = \frac{1}{m}(\frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{3}Bt^3). \tag{1.3.2}$$

A sebesség maximuma akkor van, ha a gyorsulás zérus, azaz most

$$t = \frac{A}{B}. \tag{1.3.3}$$

A behelyettesítések után a maximális sebesség

$$v_{max} = \frac{1}{6m}\frac{A^3}{B^2} = 6,94\,\mathrm{m/s}. \tag{1.3.4}$$

(b) A maximális sebesség elérése $t = 20$ s idő múlva következik ez be.

1.4. Feladat: (HN 8C-43) * A 2,5 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 0,75$ N/s^2.

(a) Határozzuk meg a test sebességét 15 másodperccel az erő alkalmazása után!

(b) Mekkora állandó erővel lehetne elérni ezt a sebességet?

Megoldás:

(a) A test gyorsulása

$$a = \frac{1}{m}At^2, \tag{1.4.1}$$

amellyel a sebesség

$$v(t) = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{1}{m}At^2\mathrm{d}t = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{3}At^3\right]_0^{15} = 337,5\,\mathrm{m/s}. \tag{1.4.2}$$

(b) Ha az erő állandó, akkor

$$v = at = \frac{F}{m}t, \tag{1.4.3}$$

ahonnan az erő

$$F = \frac{mv}{t} = 56,25\,\mathrm{N} \tag{1.4.4}$$

kell legyen ekkora sebesség eléréséhez.

1.5. Feladat: **Órai megoldásra 2. feladat** Egy $M = 80$ kg tömegű ember jégen egy helyben állva eldob vízszintes irányban egy $m = 20$ kg tömegű golyót. A golyó az embertől mérve $v_0 = 20$ m/s sebességgel távolodik. Mekkora az ember v_M sebessége a jéghez viszonyítva? (A jég és az ember közötti súrlódási erő elhanyagolhatóan kicsi.)

Megoldás: Jelölje v_m a golyó jéghez viszonyított sebességét. Az impulzus megmaradás miatt

$$Mv_M = mv_m. \tag{1.5.1}$$

A golyó és az ember relatív sebessége pedig

$$v_0 = v_m + v_M \tag{1.5.2}$$

A két egyenletből

$$v_M = \frac{m}{m+M}\,v_0 \tag{1.5.3}$$

Behelyettesítve a számértékeket $v_M = 4$ m/s adódik.

Rugalmatlan ütközések

1.6. Feladat: Az m tömegű v_0 sebességű test tökéletesen rugalmatlanul ütközik az M tömegű álló testtel. Mekkora lesz az ütközés utáni együttes sebességük? Mekkora átlagos erőhatás lép fel köztük, ha az ütközés ideje (a becsapódástól számítva az összeragadásig) t.

Megoldás: Az impulzus megmaradás miatt:

$$mv_0 = (m+M)v, \tag{1.6.1}$$

ahol v az összeragadt testek együttes sebessége. Az ütközés utáni együttes sebesség ezért

$$v = \frac{m}{m+M}v_0. \tag{1.6.2}$$

Az ütközés közben fellépő átlagos erőhatás pedig: $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$, ahol ΔP az m tömegű test impulzus impulzusváltozása:

$$\Delta P = mv - mv_0 = \frac{m^2}{m+M}v_0 - mv_0 = -\frac{mM}{m+M}v_0. \tag{1.6.3}$$

A negatív előjel arra utal, hogy a m tömegű test impulzusa csökken. Az F erő nagysága így

$$F = -\frac{mM}{m+M}\frac{v_0}{t}. \tag{1.6.4}$$

Hasonló meggondolásokból az M tömegű testre

$$F = \frac{mM}{m+M}\frac{v_0}{t} \tag{1.6.5}$$

erő hat, amely eredmény pont azt mutatja, hogy a kölcsönható erők párosával lépnek fel: azonos nagyságúak és ellentétes irányúak.

1.7. Feladat: Két azonos m tömegű test azonos nagyságú v_0 sebességgel halad, az egyik az y tengelyen, a másik az x tengelyen, mindkét esetben a pozitív irányban. Az origóban a testek tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz az együttes sebességvektoruk és annak nagysága?

Megoldás: Az y tengelyen mozgó test impulzusvektora

$$\mathbf{p_y} = m(0; v_0), \tag{1.7.1}$$

az x tengelyen mozgó test impulzusvektora pedig

$$\mathbf{p_x} = m(v_0; 0). \tag{1.7.2}$$

Az ütközés utáni $2m$ tömegű együttes test impulzusa e két impulzusvektor összege, azaz

$$\mathbf{P} = \mathbf{p_y} + \mathbf{p_x} = m(v_0; v_0). \tag{1.7.3}$$

Az összeragadt test sebességvektora pedig

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{2m} = \left(\frac{v_0}{2}; \frac{v_0}{2}\right). \tag{1.7.4}$$

a sebesség nagysága:

$$V = |\mathbf{V}| = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0. \tag{1.7.5}$$

1.8. Feladat: (HN 8A-4) Egy m tömegű v_0 sebességgel mozgó test vele egyenlő tömegű, eredetileg nyugalomban lévő testbe ütközik és összeragad vele. Határozzuk meg a kinetikus energia $(K-K_0)/K_0$ relatív megváltozását!

Megoldás: Az ütközés tökéletes rugalmatlan, így az impulzus megmarad, a kinetikus energia viszont nem. Az impusumegmaradás az

$$mv_0 = 2mv \tag{1.8.1}$$

egyenlettel fejezhető ki, amelyben v az összeragadt testek végső együttes sebessége. Innen

$$v = \frac{v_0}{2}. \tag{1.8.2}$$

A kezdeti K_0 kinetikus energia

$$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2. \tag{1.8.3}$$

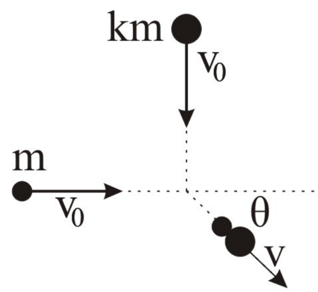
A végső kinetikus energia pedig:

$$K = \frac{1}{2} 2mv^2 = \frac{1}{4} m v_0^2. \tag{1.8.4}$$

A kinetikus energia $(K-K_0)/K_0$ relatív megváltozása:

$$\frac{K-K_0}{K_0} = -\frac{1}{2}. \tag{1.8.5}$$

A negatív előjel arra utal, hogy az ütközés mechanikai energiaveszteséggel jár.



1. ábra.

1.9. Feladat: (HN 8B-11) Két, m illetve km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 sebességgel halad merőleges irányból a 1. ábrán látható módon közeledik egymáshoz, összeütközik, és összeragadva mozgnak együtt tovább. Fejezzük ki a végsebességük irányát meghatározó θ szöget a k segítségével!

Megoldás: Az ütközés közben megmarad a testek lendülete az x és y irányban egyránt. Az összeregadt testek össz lendülete

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} mv_0 \\ kmv_0 \end{pmatrix}. \tag{1.9.1}$$

Az összeragadt testek össz lendületéből meghatározható azok sebességvektora is:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{m(1+k)} = \frac{v_0}{1+k}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}. \tag{1.9.2}$$

Az 1. ábrán jelölt θ szög meghatározható a $\mathbf{V}$ sebességvektor komponenseivel:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{V_y}{V_x} = k. \tag{1.9.3}$$

1.10. Feladat: (HN 8B-14) Két, m illetve km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 sebességgel halad a $+x$ és $-x$ irányban. Ütközésük után összeragadva haladnak tovább.
(a) Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében, hogy mekkora az összeragadt testek v sebességének nagysága és iránya?
(b) Mekkora a v/v_0 arány, ha $k = 2$?

Megoldás:
(a) Az ütközés folyamatára érvényes a lendületmegmaradás törvénye:

$$mv_0 - kmv_0 = (1+k)mv. \tag{1.10.1}$$

Az egyenlet bal oldala a részrendszerek ütközés előtti lendületeinek összegét írja le, míg a jobb oldal az összeragadt testek összlendületét jelöli. Az egyenletből meghatározható az összeregadt testek együttes sebessége:

$$v = \frac{1+k}{1-k} v_0. \tag{1.10.2}$$

Az eredményből látható, hogy $k > 1$ esetben az összeragadt testek $-x$ irányba haladnak, míg $k < 1$ esetben az ellenkező irányba.

(b) $k = 2$ esetben a sebességek aránya

$$\frac{v}{v_0} = -3. \tag{1.10.3}$$

1.11. Feladat: (HN 9B-7) Fából készült $M = 800$ g tömegű ballisztikus ingatestbe vízszintes irányból $m = 20$ g tömegű ólomsörétet lőttünk. A lengésbe jövő ingatest $h = 10$ cm magasba emelkedik.

(a) Mekkora v közös sebességgel indul az ingatest-sörét rendszer?

(b) Mekkora v_0 sebességgel csapódik az ingába a golyó? A sörét K kinetikus energiájának hányadrésze veszett el, azaz fordítódott a fa deformálására, ill. felmelegítésére?

Megoldás:

(a) Az összeragadt inga-sörét rendszer össz mozgási energiája teljes egészében átalakul helyzeti energiává miközben h magasságba emelkedik:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh, \tag{1.11.1}$$

mely egyenletből az együttes sebesség

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{1.11.2}$$

Behelyettesítve a számadatokat $v \approx= 1,414$ m/s adódik.

(b) A golyó becsapódására az impulzus megmaradás tételét alkalmazhatjuk a sörétszemek sebességének meghatározására:

$$mv_0 = (m+M)v. \tag{1.11.3}$$

Az egyenlet segítségével meghatározhatjuk a sörétszemek sebsségét:

$$v_0 = \frac{m+M}{m} v. \tag{1.11.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $v_0 \approx 57,98$ m/s adódik. A kezdeti kinetikus energia

$$K = E_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 \approx 33,62\,\mathrm{J}, \tag{1.11.5}$$

míg az ütközés után

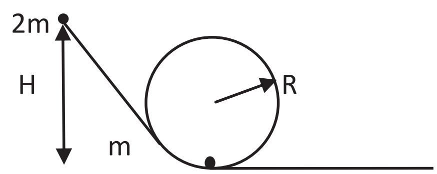
$$E_2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 \approx 0,82\,\mathrm{J}. \tag{1.11.6}$$

A mechanikai energiának az ütközés során a

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \approx 97,6\,\%. \tag{1.11.7}$$

része veszett el, illetve alakult át hőenergiává.

1.12. Feladat: Egy $2m$ tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedo lejtőn a 2. ábrának megfelelően. Mekkora H magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmas ütközés után a pálya alján lévő m tömegű test végighaladjon a hurkon?



2. ábra.

Megoldás: A test mozgását három szakaszra oszthatjuk:
(a) *A $2m$ tömegű test lecsúszik a hurok aljára az ütközés előtti pillanatig.* A $2m$ tömegű test H magasságból való lecsúszásra a

$$2mgH = \frac{1}{2}2mv_0^2 \tag{1.12.1}$$

mechanikai energia-megmaradást kifejező egyenlet írható fel, amelyből az ütközés előtti sebesség

$$v_0 = \sqrt{2gH}. \tag{1.12.2}$$

(b) *Ezután a $2m$ tömegű test rugalmatlanul ütközik az m tömegű testtel, majd összetapadva mozognak tovább.* Az A m tömegű testtel való tökéletesen rugalmatlan ütközésre az impulus megmaradásának tételét alkalmazzuk

$$2mv_0 = 3mv_1, \tag{1.12.3}$$

ahonnan az ütközés utáni v_1 sebesség

$$v_1 = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2gH}. \tag{1.12.4}$$

(c) *Végül az összetapadt 3m tömegű test feljut a hurok tetejére és éppen áthalad a tetőponton.* A $2R$ magas hurok tetején az összeragadt $3m$ tömegű test v_2 sebessége az

$$\frac{1}{2}3mv_1^2 = \frac{1}{2}3mv_2^2 + 3mg\,2R \tag{1.12.5}$$

egyenletből határozható meg. Innen a v_2 tetőponti sebesség

$$v_2 = \sqrt{\frac{8}{9}gH - 2gR}. \tag{1.12.6}$$

A tetőponton való áthaladáshoz szükséges minimális sebességet a test és a hurok között fellépő nyomási erő eltűnése határozza meg. Ekkor a testet csak a súlyerő tartja körpályán, azaz

$$3m\frac{v_2^2}{R} = 3mg. \tag{1.12.7}$$

Behelyettesítés után a minimális indítási magasság

$$H = \frac{27}{8}R. \tag{1.12.8}$$

Rugalmas ütközések

1.13. Feladat: Mutassa meg, hogy a kemény asztallapon pattogó m tömegű golyó hosszú idő átlagában mg erővel nyomja az asztallapot!

Megoldás: Ha a golyót h magasságból leejtük, az $v = \sqrt{2gh}$ sebességgel csapódik be az asztallapba. Tökéletesen rugalmas ütközéskor a sebesség nagysága nem, csupán az iránya változik meg az ellenkezőjére. Ennek megfelelően a golyó impulzusváltozása

$$\Delta P = mv - (mv) = 2mv = 2m\sqrt{2gh}. \tag{1.13.1}$$

Két ütközés között eltelt Δt idő (mely a mozgás során fellépő átlagos erőhatás kiszámolásához szükséges) kétszerese a szabadon eső test h magasságból történő esési idejének, azaz

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{1.13.2}$$

Így az átlagos erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2\sqrt{\frac{2h}{g}}} = mg, \tag{1.13.3}$$

ami a feladat állításával megegyezik.

1.14. Feladat: Egy L oldalélű hasábban az oldallal párhuzamosan, v_0 sebességgel mozog egy m tömegű részecske.

(a) Mekkora átlagos erővel nyomja a reészecske a szembenlévő falakat?

(b) Mekkora az átlagos nyomás, ha a mozgásra merőleges lapok felülete A?

(c) Hogyan változik a megoldás, ha N részecske teszi ezt?

Megoldás:

(a) A részecske impulzusváltozása a fallal való ütközés során $\Delta P = 2mv_0$. Két egymást követő ütközés között eltelt idő pedig $\Delta t = \frac{2L}{v_0}$. Az ütközések során fellépő átlagos erő tehát

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\frac{2L}{v_0}} = \frac{mv_0^2}{L}. \tag{1.14.1}$$

(b) A falakon ébredő átlagos nyomás:

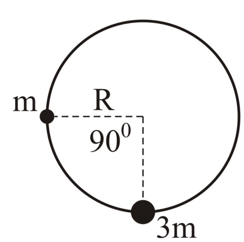
$$p = \frac{F}{A} = \frac{mv_0^2}{LA}. \tag{1.14.2}$$

(c) N részecske esetén a falakat nyomó F_N erő, illetve p_N nyomás megsokszorozódnak:

$$F_N = N\frac{mv_0^2}{L}, \qquad p_N = N\frac{mv_0^2}{LA}. \tag{1.14.3}$$

(*Megjegyzés:* Utóbbi eredmények szolgálnak a kinetikus gázelmélet alapjául!)

1.15. Feladat: (HN 9C-32) Függőleges síkú, R sugarú körré hajlított, merev huzalon a rá fűzött m tömegű gyöngy a 3. ábrán látható módon lecsúszik. A körpálya oldalsó pontjából nyugalom-

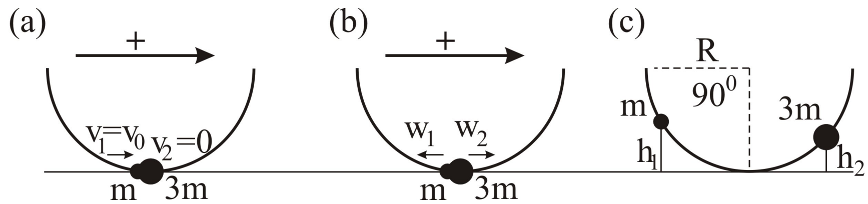


3. ábra.

ban lévő gyöngy pusztán a gravitáció hatására lecsúszik és rugalmasan ütközik a kör legmélyebb pontjában nyugalomban lévő $3m$ tömegű másik gyönggyel.

(a) Az R sugárral kifejezve határozzuk meg, hogy milyen magasra emelkednek a gyöngyök az ütközés után!
(b) Az ütközés után a gyöngyök súrlódámentesen folyamatosan tovább mozognak és újra rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg, hogy mennyi a gyöngyök sebessége közvetlenül a második ütközés után!

Megoldás:
(a) A 4.(a) ábra az R magasságból lecsúszó v_0 sebességű és m tömegű gyöngy a $3m$ tömegű



4. ábra.

gyönggyel való ütközésének pillanatát mutatja. Az ütközés pillanatáig az R magasságból lecsúszó gyöngy potenciális energiája átalakul mozgási energiává:

$$mgR = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{1.15.1}$$

Ezért az m tömegű gyöngy sebessége $v_0 = \sqrt{2gR}$. A rugalmas ütközés folyamatára az impulzus megmaradás mellett fennáll a mechanikai energia-megmaradása is. A 4.(a) és 4.(b) ábrákon bejelölt pozitív irányok alapján felírhatjuk az ütközés előtti és utáni lendületek mérlegét.

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1w_1 + m_2w_2. \tag{1.15.2}$$

A mechanikai energia-megmaradása pedig a

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_2^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2 \tag{1.15.3}$$

egyenlettel fejezhető ki. Az (1.15.2) és (1.15.3) egyenletek egy általános, egyenes menti rugalmas ütközést írnak le. Esetünkben $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, $v_1 = v_0$, $v_2 = 0$ és w_1, valamint w_2 ismeretlen paraméterek. Átalakítva az (1.15.2) és (1.15.3) egyenleteket:

$$m_1(v_1 + w_1) = m_2(w_2 + v_2), \tag{1.15.4}$$

és

$$m_1(v_1^2 - w_1^2) = m_2(w_2^2 - v_2^2) \tag{1.15.5}$$

adódnak. Elosztva egymással a két egyenletet és felhasználva az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ aznosságot

$$v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \tag{1.15.6}$$

adódik. Az (1.15.6) és (1.15.2) egyenletekből kiküszöbölve a w_2 sebességet,

$$w_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_1. \tag{1.15.7}$$

adódik. Analóg módon

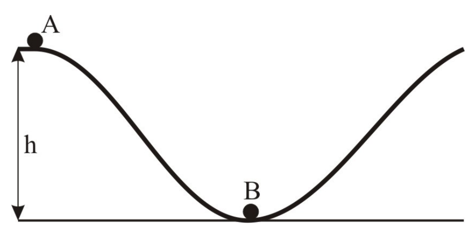
$$w_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_2. \tag{1.15.8}$$

Esetünkben az ütközés utáni sebességek (lásd a 4.(b) ábrát) $w_1 = w_2 = \frac{v_0}{2}$-nek adódnak. Mivel a gyöngyök sebessége az ütközés után azonos, a gyöngyök tömegüktől függetlenül ugyanolyan $h_1 = h_2 = h$ magasba emelkednek (lásd a 4.(c) ábrát). Az emelkedési magasságot a mechanikai energia-megmaradás segítségével számolhatjuk ki. Az m tömegű gyöngy esetében

$$mgh = \frac{1}{2}mw_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mv_0^2 = \frac{1}{4}mgR. \tag{1.15.9}$$

Az emelkedési magasság tehát $h = R/4$.
(b) Az (1.15.7) és (1.15.8) egyenleteket felhasználhatjuk a második ütközés utáni sebességek meghatározásához is. Ebben az esetben a „beérkező” sebességek nagysága megegyezik az első ütközés utáni sebességek nagyságával. Behelyettesítve az értékeket, a második ütközés után $w_1 = v_0$ és $w_2 = 0$ adódik rendre az m és $3m$ tömegű gyöngyök sebességére. A sebességek nagysága pont akkora, mint amekkora sebességgel közvetlenül az első ütközés előtt találkoztak a gyöngyök. Ez az eredmény nem meglepő, hiszen az (1.15.2) és (1.15.3) egyenleteknek két független megoldása van, melyek mindegyike kielégíti a lendület és energia-megmaradás törvényit.

1.16. Feladat: Órai megoldásra 3. feladat A 5. ábrán látható súrlódásmentes pálya A pontjából elengedünk egy testet. Végigcsúszva a B pontban ütközik egy másik testtel.
(a) Mekkora v sebességgel ér az A pontból indított test a B pontban lévő testhez?
(b) Milyen magasra emelkedik a másik test, ha az ütközés tökéletesen rugalmas ($m_A = m_B/2$, $h = 1.8$ m)?



5. ábra.

Megoldás:

(a) A h m magasból kezdő sebesség nélkül induló, súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége felhasználva az energia-megmaradás elvét $v = \sqrt{2gh} = 6$ m/s.
(b) A tökéletesen rugalmas ütközés esetében az

$$m_A v = m_A v_A + m_B v_B \tag{1.16.1}$$

impulzus-megmaradás mellett érvényes a mechanikai energia megmaradása is:

$$\frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2. \tag{1.16.2}$$

Az egyenletekben v_A és v_B az A illetve B testek ütközés utáni sebességét jelöli. Figyelembe véve, hogy $m_A = m_B/2$, e két egyenlettel a B test ütközés utáni sebessége:

$$v_B = \frac{2}{3} v = \frac{2}{3}\sqrt{2gh} = 4\,\text{m/s}. \tag{1.16.3}$$

A B test emelkedési magassága pedig

$$h_B = \frac{v_B^2}{2g} = 0,8\,\text{m}. \tag{1.16.4}$$

Általános ütközések

1.17. Feladat: $h_1 = 1,25$ m magasból $m = 1$ kg tömegű golyó a $\Delta t = 0,05$ s időtartamú kölcsönhatás után $h_2 = 80$ cm magasra pattan vissza. Mekkora átlagos erőt fejtett ki a talaj a golyóra ezen ütközés alatt?

Megoldás: A h_1 magasságból eső test

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \tag{1.17.1}$$

sebességgel csapódik be, míg a h_2 magasságba feljutó test a talajról

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} \tag{1.17.2}$$

sebességgel pattan vissza. Az ütközés alatt a teljes impulzusváltozás

$$\Delta P = mv_1 - (-mv_2). \tag{1.17.3}$$

A talaj és a golyó közt ébredő erő ezért

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2})}{\Delta t}. \tag{1.17.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $F = 180$ N adódik.

Folytonos közegek impulzusváltozása

1.18. Feladat: (HN 8A-33) A 600 l/perc hozamú és 20 m/s sebességű vízszintes irányú vízsugár függőleges falba ütközik, s számottevő freccsenés nélkül szétterül rajta. Mekkora erőt fejt ki a vízsugár a falra? (A víz sűrűsége 1000 kg/m^3.)

Megoldás: Jelölések: $\eta = 600$ l/perc = 10 l/s = 0.01 m^3/s, $v = 20$ m/s és $\varrho = 1000$ kg/m^3. A falra Δt idő alatt

$$\Delta m = \eta\varrho\Delta t \tag{1.18.1}$$

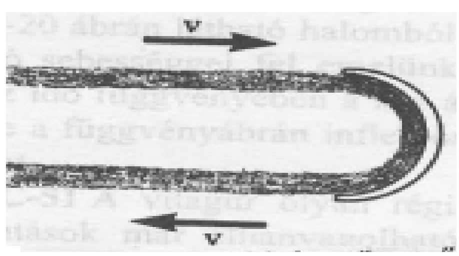
tömeg esik és áll meg. A beérkező víz teljes impulzusváltozása

$$\Delta P = v\Delta m = v\eta\varrho\Delta t. \tag{1.18.2}$$

A falon ébredő erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = v\eta\varrho = 200\,\mathrm{N}. \tag{1.18.3}$$

1.19. Feladat: (HN 8A-34) Egy nyugvó turbinalapátba vízsugár ütközik. A lapát a vízsugár irányát az 6. ábrán látható módon megfordítja. A víz sebessége mind az ütközés előtt, mind



6. ábra.

az ütközés után v. Határozzuk meg a lapátra ható erőt, ha az időegységentként becsapódó víz tömege μ!

Megoldás: Az időegységentként becsapódó víz tömege

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \tag{1.19.1}$$

A beérkező víz impulzusa $I_{\rightarrow} = mv$, a távozóé $I_{\leftarrow} = -mv$. Az impulzusváltozás:

$$\Delta I = 2mv, \tag{1.19.2}$$

amellyel az ébredő erő:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta 2mv}{\Delta t} = 2v\frac{\Delta m}{\Delta t} = 2\mu v. \tag{1.19.3}$$

1.20. Feladat: (HN 8A-40) Egy 3000 kg tömegű rakéta meghajtású űrhajó egy helyben lebeg a Hold felszíne felett, ahol a $g = 1,63$ m/s^2. Mekkora sebességgel bocsátja ki a rakéta a hajtóanyagot, ha 2 kg/s sebességgel fogyasztja a fűtőanyagot?

Megoldás: A kezdeti lépésben tételezzük fel, hogy a t időpillanatban az m rakéta v sebességgel halad felfelé. Ekkor az impulzusa:

$$I_1 = mv \tag{1.20.1}$$

A $t+\Delta t$ időpillanatban a Δm kiáramlott gázzal kevesebb – azaz $m-\Delta m$ –, sebessége Δv-vel nő – azaz $v+\Delta v$. Ha kiáramló gáz sebessége a rakétához képest u – lefele irányban –, akkor a Δm kiáramlott gáz sebessége az álló megfigyelőhöz képest: $v-u$. A $t+\Delta t$ időpillanathoz tartozó impulzus:

$$I_2 = (m-\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(v-u). \tag{1.20.2}$$

A Δt alatti impulzusváltozás:

$$\Delta I = I_2 - I_1 = m\Delta v - u\Delta m. \tag{1.20.3}$$

Az m tömegű rakétára ható erő: $F = -mg$. Így az impulzus tétel értelmében:

$$F = -mg = \frac{\Delta I}{\Delta t} = I_2 - I_1 = m\frac{\Delta v}{\Delta t} - u\frac{\Delta m}{\Delta t}. \tag{1.20.4}$$

Felhasználva a feladat szövegét, hogy a rakéta áll, azaz $\frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$, $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}$, valamint a rakéta tömegének időbeli változását $m(t) = m_0 - \mu t$ (m_0 a kezdeti tömeg), felírható:

$$(m_0 - \mu t)g = \mu u(t), \tag{1.20.5}$$

amelyből

$$u(t) = \frac{m_0 - \mu t}{\mu} g = 1,63\frac{3000-2t}{2}. \tag{1.20.6}$$

Világos, hogy egyre kisebb kiáramlási sebességre van szükség a csökkenő tömeg miatt. A $t = 0$ időpillanatban $u = 2445$ m/s.

1.21. Feladat: (HN 8B-41) A 130000 kg tömegű rakéta függőlegesen helyezkedik el a kilövőálláson.

(a) Mekkorának kell lennie a hajtóművek tolóerejének ahhoz, hogy a rakéta 17 m/s^2 gyorsulással induljon felfelé?
(b) Hány kg/s a hajtóanyag fogyasztás akkor, ha a hajtógáz rakétához viszonyított sebessége 2100 m/s?

Megoldás: Jelölések: $m = 130000$ kg; $a = 17$ m/s^2 és $u = 2100$ m/s.
(a) Az indulás pillanatában

$$ma = F - mg \tag{1.21.1}$$

a rakéta mozgásegyenlete. Innen a tolóerő

$$F = m(a+g) = 3,51 \cdot 10^6\,\mathrm{N}. \tag{1.21.2}$$

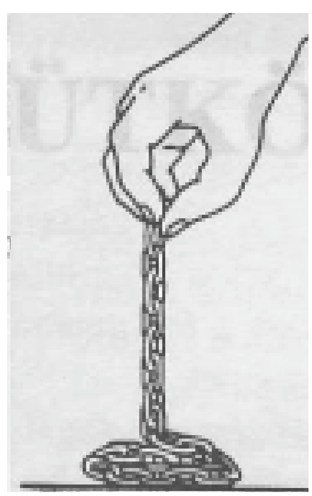
(b) Ez a tolóerő az u sebességgel kiáramló gáz következménye, azaz

$$F\Delta t = (\Delta m)u, \tag{1.21.3}$$

amelyből a hajtóanyag fogyasztás

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{F}{u} = 1671\,\mathrm{kg/s}. \tag{1.21.4}$$

1.22. Feladat: Órai megoldásra 4. feladat (HN 8C-48) Egy függőlegesen lógó, m tömegű hajlékony l hosszúságú láncot állandó v sebességgel engedünk le az asztalra az 7. ábrán látható módon. Adjuk meg az idő függvényében, hogy mekkora erőt fejt ki a lánc az asztalra!



7. ábra.

Megoldás: A hosszegységenkénti tömeget jelölje $\lambda = \frac{m}{l}$; a t idő alatti süllyedés hossza $x = vt$. Így ennyi idő alatt $m(t) = \lambda x = \frac{m}{l} vt$ tömeg van az asztalon, amely

$$N_1 = \frac{m}{l} vtg \tag{1.22.1}$$

erővel nyomja az asztalt. Ez az ébredő erő egyik része. A másik rész ahhoz kötődik, hogy a v sebességű dx hossz megáll. Ennek a hossznak az impulzusváltozása:

$$\Delta I = \lambda dx\, v = \frac{m}{l} v\Delta t\, v = \frac{mv^2}{l}\Delta t. \tag{1.22.2}$$

A megállításból eredő másik rész

$$N_2 = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l}. \tag{1.22.3}$$

Az összes erő tehát

$$N = \frac{m}{l} vtg + \frac{mv^2}{l}. \tag{1.22.4}$$

1.23. Feladat: (HN 9C-47) A Földhöz viszonyítva v sebességű és időegységenként μ tömeget szállító vízáram csapódik a turbinalapátra. Az ütközés hatására a turbinalapát egyenesvonalú mozgásba kezd, míg a vízáram $v/4$ sebességgel visszafelé halad a Földhöz képest.
(a) Mekkora sebességgel mozog a turbinalapát?
(b) Határozzuk meg v és μ függvényében, hogy mekkora erő hat a mozgó lapátra?

Megoldás:
(a) Az u sebességgel mozgó turbinalapáton fordul meg a vízáram. Figyelembe véve a relatív sebességeket fennáll, hogy

$$v - u = u + \frac{1}{4}v. \tag{1.23.1}$$

Innen a turbinalapát sebessége

$$u = \frac{3}{8}v. \tag{1.23.2}$$

(b) Ha m tömegű víz fordul meg, akkor annak impulzusváltozása

$$\Delta I = 2m(v-u) = \frac{5}{4}mv. \tag{1.23.3}$$

A Δt idő alatt a turbinalapátra beérkező tömeg

$$m = \mu\Delta t \frac{v-u}{v}, \tag{1.23.4}$$

amellyel az impulzusváltozás

$$\Delta I = \frac{25}{32}\mu v \Delta t. \tag{1.23.5}$$

Az ébredő erő

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{25}{32}\mu v. \tag{1.23.6}$$

2. Feladatok a gravitásiós erő tárgyköréből. Kepler törvényei

Centrális erőtér. Potenciális energia

2.1. Feladat: (HN 16B-16) A "szinkron" műhold akkora sebességgel kering körpályán, hogy a földi megfigyelő számára nyugalomban lévőnek látszik.
(a) Magyarázzuk meg, miért csak az egyenlítő síkjában lévő pályán lehetséges az ilyen mozgás!
(b) Határozzuk meg a pálya sugarát a Föld középpontjától mérve!
(c) Határozzuk meg azt a legtávolabbi szélességi fokot, ahonnan ez a műhold a Földről még látható!

Megoldás: Jelölések: m a műhold tömege; M a Föld tömege; T a Föld forgásának periódus ideje; R a műhold távolsága a Föld középpontjától; R_F a Föld sugara.
(a) A körmozgás a Föld forgástengelye körül kell történjen, amelyhez kizárólag e tengelyre merőleges erő szükséges. A Föld a centruma felé vonzza a testeket. Az első feltétel csak akkor teljesül, ha a test az Egyenlítőn van.
(b) A műhold ún. geostacionárius pályán kering, azaz szögsebessége megegyezik a Föld forgáshoz tartózó $\omega = \frac{2\pi}{T}$ szögsebességgel. A keringő műhold mozgásegyenlete

$$mR\omega^2 = \gamma\frac{mM}{R^2}. \tag{2.1.1}$$

A szögsebesség behelyettesítése és az egyenlet átrendezése után az R sugár

$$R = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} = 42170\,\mathrm{km}. \tag{2.1.2}$$

(c) Az szélesség kör, ahonnan a műhold még látható

$$\cos\theta = \frac{R_F}{R} = 0,1511 \longrightarrow \theta = 81,3^0. \tag{2.1.3}$$

2.2. Feladat: (HN 16B-31) Egy nem forgó gömb alakú bolygó tömege M, sugara R. A bolygó felszínéről radiális irányban egy részecskét lőnek ki $\sqrt{\gamma M/(2R)}$ sebességgel. Számítsuk ki mekkora távolságra jut el a részecske a bolygó középpontjától?

Megoldás: A mechanikai energia megmaradás tételét kell alkalmazni – figyelembe véve, hogy az "eljutás" zérus pillanatnyi sebességet jelent –

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{R} = -\gamma\frac{mM}{R'}, \tag{2.2.1}$$

ahol R' a kérdéses távolság. A sebesség behelyettesítése után

$$R' = \frac{4}{3}R. \tag{2.2.2}$$

2.3. Feladat: **Órai megoldásra 5. feladat** (HN 16B-34) Jelölje M illetve R a Föld tömegét illetve sugarát.
(a) Mekkora az a minimális v_0 sebesség, amellyel az egyenlítőn függőlegesen kilőtt test a Föld felszínétől éppen két földsugárnyi magasságig emekedik? A Föld forgását és a légköri súrlódást ne vegyük figyelembe.
(b) A Föld forgását is számításba véve, növekszik, csökken vagy változatlan marad-e az a, kérdésre adott válasz számértéke?

Megoldás:
(a) A mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva

$$-\gamma\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma\frac{mM}{3R} \tag{2.3.1}$$

egyenlet írható fel, amelyből a kérdezett sebesség:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{\gamma M}{R}} = 9152\,\mathrm{m/s}. \tag{2.3.2}$$

(b) A Föld forgása csökkenti ezt az értéket, mert a kinetikus energiában a sebesség négyzete van. A forgáshoz tartozó v_f sebesség érintő irányú (a kilövésre merőleges), amivel a kezdő sebesség négyzete: $v_0^2 + v_f^2$ mindig nagyobb mint v_0^2.

2.4. Feladat: (HN 16B-36) A Föld felszínén egy testet emelünk.
(a) Határozzuk meg annak a munkának a nagyságát, amivel egy 100 kg tömegű hasznos terhet

1000 km-rel a Föld felszíne felé lehet juttatni!
(b) Határozzuk meg azt a többletmunkát, ami ezen a szinten a hasznos teher körpályára állításához szükséges!

Megoldás: Adatok: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; $m = 100$ kg; $h = 1000$ km. A Föld tömege: $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; sugara: $R = 6,37 \cdot 10^6$ m.
(a) Az általunk végzett munka

$$W = \int_R^{R+h} \gamma \frac{mM}{r^2} \mathrm{d}r = \left[\gamma \frac{mM}{r}\right]_R^{R+h} = \gamma \frac{mM}{R} - \gamma \frac{mM}{R+h} = 1,42 \cdot 10^8 \,\mathrm{J}. \tag{2.4.1}$$

(b) Az $R+h$ sugárnyi távolságban keringés feltétele, hogy az

$$\gamma \frac{mM}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{R+h} \tag{2.4.2}$$

fennálljon. E keringéshez tartozó többlet energia

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{R+h} = 2,7 \cdot 10^9 \mathrm{J}.^* \tag{2.4.3}$$

* *Megjegyzés:* Tekintettel arra, hogy a Föld forog, és így a rakéta nem álló helyzetből indul, ennél kisebb energiára van szükség. Nem véletlen, hogy a kilővő állomásokat az Egyenlítőhöz közel igyekeznek telepíteni.

2.5. Feladat: (HN 16B-37) Mutassuk ki, hogy egy állandó sűrűségű bolygó felületéről a szökési sebesség a bolygó sugarával arányos!

Megoldás: A gömb alakú bolygó térfogata:

$$V = \frac{4R^3\pi}{3}, \tag{2.5.1}$$

tömege:

$$M = \varrho \frac{4R^3\pi}{3}. \tag{2.5.2}$$

A szökéshez minimálisan szükséges kinetikus energia

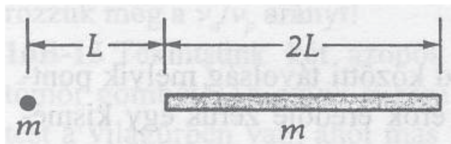
$$\frac{1}{2} m v^2 = \gamma \frac{mM}{R} = \gamma \frac{m\varrho \frac{4R^3\pi}{3}}{R} = \gamma m \varrho \frac{4R^2\pi}{3}. \tag{2.5.3}$$

Egyszerűsítések után:

$$v = \sqrt{\frac{8}{3}\gamma \varrho \pi} R, \tag{2.5.4}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

2.6. Feladat: (HN 16C-47) * A 8. ábrán látható kicsiny test és vékony rúd mindegyikének tömege m. A pontszerű test a rúd vonalában fekszik. A test L távolságban van a 2L hosszúságú rúd végétől. Mekkora a kicsiny m tömegű testre ható gravitációs erő?



8. ábra.

Megoldás: A rúd hosszegységnyi tömege $\lambda = \frac{m}{2L}$, így a dx hosszhoz tartózó dm tömeg

$$dm = \lambda dx. \tag{2.6.1}$$

Legyen a dm tömeg x távolságra az m tömegű testtől. A két test között ható erő nagysága

$$dF = \gamma \frac{m dm}{x^2}. \tag{2.6.2}$$

A teljes erő

$$F = \int_L^{3L} \gamma \frac{m \lambda dx}{x^2} = \gamma \frac{m^2}{2L} \left[-\frac{1}{x} \right]_L^{3L} = \gamma \frac{m^2}{3L^2}. \tag{2.6.3}$$

2.7. Feladat: Órai megoldásra 6. feladat (HN 16C-58) Egy ember a Föld felszínén gugguló helyzetből tömegközéppontját h magassággal tudja emelni. Számítsuk ki annak a legnagyobb (a Föld átlagsűrűségével azonos sűrűségű) kisbolygónak a sugarát, amelyről ez az ember ugyanilyen sebességgel felugorva elszökhetne, azaz elhagyhatná annak vonzáskörzetét.

Megoldás: A h magasságba ugró ember kezdősebessége

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{2.7.1}$$

A kisbolygó M tömege a ϱ sűrűséggel és az R sugárral kifejezve

$$M = \varrho \frac{4R^3\pi}{3}. \tag{2.7.2}$$

A kisbolygón v sebességgel felugró emberre a mechanikai energia megmaradás tételét alkalmazzuk azzal az ismerettel, hogy a távolban a sebessége – így a kinetikus energiája – zérus, másrészt a távoli pontban zérus a potenciális energia. Felírhatjuk tehát, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0, \tag{2.7.3}$$

amelybe a fenti tömeget behelyettesítve és az egyenltet a sugárra átrendezve kapjuk:

$$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi\gamma\varrho}}. \tag{2.7.4}$$

2.8. Feladat: * Az M tömegű R sugarú bolygó egyenletes ϱ tömegsűrűségű.
(a) Hogyan változik az m tömegű kicsiny testre ható erő a bolygó belsejébe való haladás során?
(b) Hogyan változik a potenciális energia a bolygón belül?

Megoldás:

(a) Ha az m test a bolygó belsejében, annak középpontjától r távolságra van, akkor a gravitációs erőhatásba a bolygónak csak az r sugaron belüli része ad járulékot. Ezért először ezt a tömeget kell kiszámolni. A bolygó sűrűsége

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}, \tag{2.8.1}$$

amelyből az r sugárhoz tartozó $M(r)$ tömeg

$$M(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}\frac{4}{3}r^3\pi = M\frac{r^3}{R^3}. \tag{2.8.2}$$

Mostmár alkalmazni tudjuk a gravitációs erőtörvényt

$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{mM(r)}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\gamma\frac{mM\frac{r^3}{R^3}}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\gamma mM\frac{r}{R^3}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{2.8.3}$$

azaz a középponttól való távolsággal lineárisan változik. (Az $\mathbf{r}/r$ vektor a radiális egységvektor.)

(b) A bolygó felszínén a potenciális energia végtelen távoli ponthoz képest

$$U_p(R) = -\gamma\frac{mM}{R}. \tag{2.8.4}$$

Ehhez az értékhez képest az r sugárnyi távolságnál

$$U_p(r) - U_p(R) = \int_R^r \gamma mM\frac{r}{R^3}\mathrm{d}r = \left[\frac{1}{2}\gamma mM\frac{r^2}{R^3}\right]_R^r = \frac{1}{2}\gamma mM\frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2}\gamma mM\frac{1}{R}. \tag{2.8.5}$$

Így az a gravitációs potenciál az r pontban a végtelenhez képest

$$U_p(r) = -\gamma\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}\gamma mM\frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{R}. \tag{2.8.6}$$

Megjegyzés: Látható, hogy – talán nem meglepő módon – a bolygó közepén is véges a potenciális energia értéke

$$U_p(0) = -\frac{3}{2}\gamma\frac{mM}{R}. \tag{2.8.7}$$

2.9. Feladat: A *V1FIZ* nevű, $R = 40020$ km sugarú és $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg tömegű bolygó felszínétől R távolságban v_0 sebességgel keringő űrhajó pályájáról letér és a bolygó felszínébe csapódik. Mekkora a becsapódás sebessége? ($\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Megoldás: Az űrhajó $2R$ sugarú keringésére érvényes, hogy

$$m\frac{v_0^2}{2R} = \gamma\frac{mM}{4R^2}, \tag{2.9.1}$$

ahonnan

$$v_0^2 = \gamma\frac{M}{2R}. \tag{2.9.2}$$

Másrészt érvényes a mechanikai energia megmaradás tétele, az a kezdeti kinetikai és potenciális energiák összege egyenlő a végső kinetikai és potenciális energiák összegével, azaz

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma\frac{mM}{2R} = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{R}. \tag{2.9.3}$$

Ebből és a v_0 sebesség belyettesítével a becsapódási sebesség

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma\frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{5}{4}\gamma\frac{M}{R}} = 3535\,\text{m/s}. \tag{2.9.4}$$

Kepler törvényei

2.10. Feladat: M tömegű csillag körül m tömegű bolygó kering ellipszis pályán (– a csillag rögzítettnek tekinthető) a 9. ábra szerint. Az ellipszis fél nagytengelyét jelöljük "a"-val. A bolygó az $R_0 = R_A$ naptávolban (A) v_0 sebességgel halad.

(a) Mekkora a napközeli (B) távolság?

(b) Mekkora a bolygó sebessége?

(c) Mekkora munkát végzett a gravitációs erőtér?

(d) Ábrázolja grafikonon a potenciális energia értékeket (A, B)!

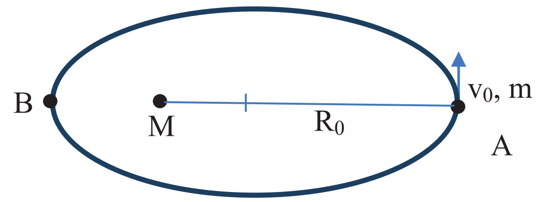
Megoldás:

(a) Az ellipszisre nagytengelyére fennálló összefüggés

$$R_B + R_A = 2a, \tag{2.10.1}$$

ahol R_B a napközeli távolságot jelöli. Innen ez a távolság

$$R_B = 2a - R_A. \tag{2.10.2}$$



9. ábra.

(b) Centrális erőtérről lévén szó, fennáll az impulzusmomentum megmaradás tétele, vagyis

$$mR_A v_0 = mR_B v_B, \tag{2.10.3}$$

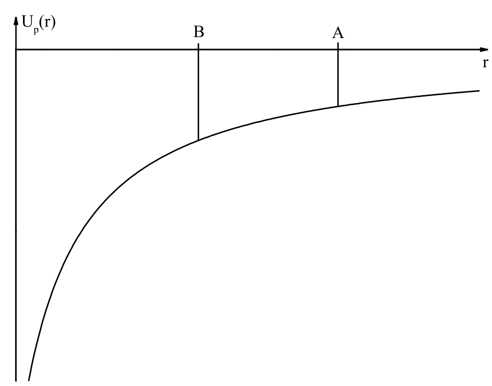
ahol v_B a B pontbeli (napközeli) sebességet jelöli. Innen

$$v_B = \frac{R_A v_0}{R_B} = \frac{R_A v_0}{2a - R_A}. \tag{2.10.4}$$

(c) Az erőtér által végzett munka

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{R_A^2}{(2a-R_A)^2} - 1\right) > 0. \tag{2.10.5}$$

(d) Az A és B pontokbeli potenciális energia értékeket a 10. ábra mutatja.



10. ábra.

3. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel

3.1. Feladat: Órai megoldásra 7. feladat (HN 10B-4) Egy $\mathbf{F} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$ ($f_x = 2$ N; $f_y = 3$ N; $f_z = 0$ N) erő hat egy testre. A test a z koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ($x = 4$ m; $y = 5$ m; $z = 0$ m) pontban támad. Határozzuk meg a forgatónyomaték nagyságát és irányát!

Megoldás: A forgatónyomaték definíciója $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ szerint a

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (yf_z - zf_y)\mathbf{i} + (zf_x - xf_z)\mathbf{j} + (xf_y - yf_x)\mathbf{k} \tag{3.1.1}$$

determináns kiszámolását kell elvégezzük. A számszerű adatok behelyettesítésével forgatónyomaték vektor

$$\mathbf{M} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \tag{3.1.2}$$

azaz a vektor nagysága 2 Nm, iránya a z tengely irányításával megegyezik.

3.2. Feladat: Egy "L" hosszúságú kötél végén 0,2 kg tömegű test függőleges síkban körmozgást végez. A pálya csúcsán a kör középpontjára vett perdület fele akkora, mint a pálya alján, ahol a tömeg kinetikus energiája 4 J. Mekkora az "L"?

Megoldás: Jelölések: $m = 0,2$ kg, $E = 4$ J, valamint v_a az alsó, v_f a felső pontbeli sebességek. Mivel a pálya alsó pontján ismerjük a kinetikus energiát, így az

$$E = \frac{1}{2}mv_a^2 \tag{3.2.1}$$

összefüggésből az alsóponti sebesség

$$v_a = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{40}\,\mathrm{m/s} = 6,32\,\mathrm{m/s}. \tag{3.2.2}$$

Az impulzusmomentum $N = (L =)mvL$ definíciójából következik, hogy a felső pontban úgy lehet a fele az alsó impulzusmomentumnak, ha a felsőponti sebesség

$$v_f = \frac{v_a}{2} = \sqrt{10}\,\mathrm{m/s} = 3,16\,\mathrm{m/s}. \tag{3.2.3}$$

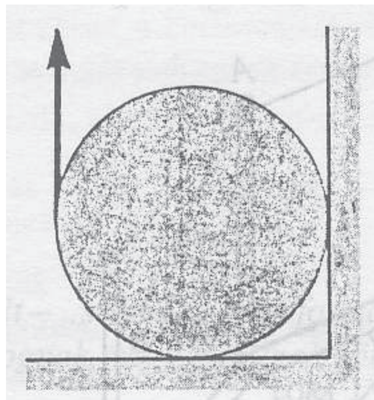
A két sebesség valamint az alsó és felső pontok magasssága közötti kapcsolatot a mechanikai energia megmaradását kifejező összefüggéssel teremthetjük meg:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \cdot 2L. \tag{3.2.4}$$

Az alsó és felső pontok közötti távolság $2L$. A behelyettesítések után a kötél hossza

$$L = 0,75\,\mathrm{m}. \tag{3.2.5}$$

3.3. Feladat: Órai megoldásra 8. feladat (HN 10C-48) A 11. ábra egy G súlyú homogén hengerre függőleges irányban ható F erőt mutat. A henger és a felületek közötti nyugalmi súrlódási együttható $\mu = 0,5$. Fejezzük ki a G függvényében azt a legnagyobb F erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását!



11. ábra.

Megoldás: Jelölje N_1 a alsó érintkezési ponton felfele mutató támaszerőt, F_{s1} a balról jobbra mutató súrlódási erőt ugyanitt. Legyen N_2 a falnál jobbról balra mutató támaszerő, míg az itt ható felfele mutató súrlódási erő F_{s2}. E mennyiségek közötti kapcsolat

$$F_{s1} = \mu N_1 \tag{3.3.1}$$

és

$$F_{s2} = \mu N_2. \tag{3.3.2}$$

A henger akkor van egyensúlyban, ha a ható erők eredője és forgatónyomatéka zérus. Azaz előjel helyesen – pozitív az az erő, amely balról jobbra, illetve alulról felfele mutat – a függőleges irányban

$$0 = F - G + N_1 + F_{s2}, \tag{3.3.3}$$

a vízszintes irányban

$$0 = F_{s1} - N_2. \tag{3.3.4}$$

A forgatónyomatékra

$$0 = F_{s2}R + F_{s2}R - FR \tag{3.3.5}$$

A fenti öt egyenletből kell az F erőt kifejezni. A 3.3.1 és 3.3.2 súrlódási erők behelyettesítésével illetve az 3.3.5 egyenletben az R-rel való egyszerűsítés után kapjuk:

$$0 = F - G + N_1 + \mu N_2, \tag{3.3.6}$$

a vízszintes irányban

$$0 = \mu N_1 - N_2. \tag{3.3.7}$$

A forgatónyomatékra

$$0 = \mu N_2 + \mu N_1 - F \tag{3.3.8}$$

A 3.3.7 egyenletből N_2-őt kifejezve és a 3.3.6 valamint a 3.3.8 egyenletekbe helyettesítve

$$0 = F - G + (1+\mu^2)N_1 \tag{3.3.9}$$

és

$$0 = \mu(\mu+1)N_1 - F \tag{3.3.10}$$

adódik. Az N_1 eliminálásával az F erő

$$F = \frac{\mu(\mu+1)}{2\mu^2+\mu+1}G. \tag{3.3.11}$$

A $\mu = 0,5$ behelyettesítési értékkel az F erő maximális értéke

$$F = 0,375G. \tag{3.3.12}$$

3.4. Feladat: (HN 13B-7) Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le a α szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke $\mathrm{tg}\alpha/3$ kell, hogy legyen! (A henger tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.)

Megoldás: A hengerre az mg súlyerő, az $N = mg\cos\alpha$ támaszerő és az F_s tapadási súrlódási erő hat. A mozgásegyenletek a haladó mozgásra

$$ma = mg\sin\alpha - F_s, \tag{3.4.1}$$

és a forgómozgásra

$$\theta\beta = F_s R. \tag{3.4.2}$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \tag{3.4.3}$$

összefüggéssel fogalmazható meg. A három egyenletből az F_s erő alakja

$$F_s = \frac{mg\sin\alpha}{1+\frac{mR^2}{\theta}}. \tag{3.4.4}$$

Figyelembe véve, hogy a tapadási erő maximális, ha

$$F_s = \mu mg\cos\alpha, \tag{3.4.5}$$

így ezt behelyettesítve a minimális μ tapadási együttható értékére – felhasználva a tehetetlenségi nyomaték kifejezését –

$$\mu = \frac{mg\sin\alpha}{(1+\frac{mR^2}{\theta})mg\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{1+\frac{mR^2}{\theta}} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{3}. \tag{3.4.6}$$

adódik. Q.E.D.

3.5. Feladat: Egy tömör hengert és egy vékony falú csövet egyszerre engedünk el egy adott hajlásszögű lejtő tetejéről. Mindkét tárgy tisztán gördül.

(a) Határozza meg a henger tömegközéppontjának gyorsulását!

(b) Határozza meg a cső tömegközéppontjának gyorsulását!

(c) Milyen messze gurul el a cső, míg a henger s_h utat tesz meg?

Megoldás: Jelölje α a lejtő hajlásszögét, θ_h a henger és θ_{cs} a cső tehetetlenségi nyomatékát, F_s a tapadási súrlódási erőt. Az m és R a gördülő test tömege és sugara. ($\theta_h = \frac{1}{2}mR^2$; $\theta_{cs} = mR^2$)
A lejtőn legördülő test mozgásegyenlete a haladómozgásra

$$ma = mg\sin\alpha - F_s, \tag{3.5.1}$$

és a forgómozgásra – θ a gördülő test tehetetlenségi nyomatéka –

$$\theta\beta = F_s R. \tag{3.5.2}$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \tag{3.5.3}$$

összefüggéssel fogalmazható meg. E három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{m}{m+\frac{\theta}{R^2}} g\sin\alpha. \tag{3.5.4}$$

(a) A henger gyorsulása

$$a_h = \frac{m}{m+\frac{\theta_h}{R^2}} g\sin\alpha = \frac{2}{3} g\sin\alpha. \tag{3.5.5}$$

(b) A cső gyorsulása

$$a_{cs} = \frac{m}{m+\frac{\theta_{cs}}{R^2}} g\sin\alpha = \frac{1}{2} g\sin\alpha. \tag{3.5.6}$$

(c) A henger az s_h utat

$$t = \sqrt{\frac{2s_h}{a_h}} \tag{3.5.7}$$

idő alatt teszi meg. Ezalatt a cső

$$s_{cs} = \frac{1}{2}a_{cs}t^2 = \frac{1}{2}a_{cs}\frac{2s_h}{a_h} = \frac{3}{4}s_h \tag{3.5.8}$$

utat tesz meg.

3.6. Feladat: Egy jojó külső R sugara tízszerese belső r sugarának. A jojó orsója körüli tehetetlenségi nyomatéka jó közelítéssel $\theta = \frac{1}{2}mR^2$, ahol m a jojó teljes tömege. A fonál vége nem mozog.
(a) Számítsa ki a jojó tömegközéppontjának gyorsulását!
(b) Határozza meg a fonálban ébredő erőt!

Megoldás: Jelölés: a kötélerő K és $r = R/10$.
(a) A jojó tömegközéppontja körüli forgásra vonatkozó mozgásegyenlet

$$\theta\beta = Kr, \tag{3.6.1}$$

azaz a kötélerő hozza létre a β szöggyorsulású forgást. A haladó mozgásra felírható, hogy

$$ma = mg - K. \tag{3.6.2}$$

A haladó és forgómozgás közötti kapcsolat (tiszta gördülés)

$$a = r\beta. \tag{3.6.3}$$

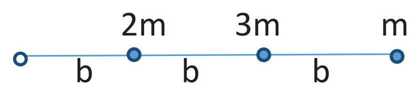
A három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{g}{\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}+1} = \frac{1}{51}g. \tag{3.6.4}$$

(b) A kötélerő

$$K = \frac{50}{51}mg. \tag{3.6.5}$$

3.7. Feladat: Egy elhanyagolható tömegű merev rúdra három pontszerű testet erősítettek. Az egyik végén csapágyazott rúd függőleges síkban lenghet.
(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomaték a csapágyra nézve?
(b) Mekkora lesz az alsó test sebessége a rúd függőleges helyzeten való áthaladásakor, ha a 12. ábrán látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük?



12. ábra.

Megoldás:
(a) A felfüggesztési pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\theta = \sum_i m_i r_i^2 = 2mb^2 + 3m(2b)^2 + m(3b)^2 = 23mb^2. \tag{3.7.1}$$

(b) A testek helyzeti energiájának összes megváltozása:

$$\Delta E_h = 2mgb + 3mg \cdot 2b + mg \cdot 3b = 11mgb. \tag{3.7.2}$$

E helyzeti energiaváltozás alakul forgási energiává:

$$\Delta E_h = \frac{1}{2}\theta\omega^2, \tag{3.7.3}$$

amelyből behelyettesítés után a szögsebességre kapjuk:

$$\omega = \sqrt{\frac{22g}{23b}}. \tag{3.7.4}$$

Az m tömegű test sebessége az alsó pontban:

$$v = R\omega = 3b\omega = 3\sqrt{\frac{22gb}{23}}. \tag{3.7.5}$$

3.8. Feladat: Homogén tömör tárcsa sugara 6 cm, tömege 1,5 kg. Nyugalomból indul a motor által kifejtett 0,6 Nm forgatónyomaték hatására. Mennyi idő alatt éri el az 1200 1/perc fordulatszámot? ($\theta = \frac{1}{2}mr^2$)

Megoldás: Jelölések: $r = 6$ cm $= 0{,}06$ m, $m = 1{,}5$ kg, $M = 0{,}6$ Nm és $f = 1200$ 1/perc $= 20$ 1/s. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M, \tag{3.8.1}$$

ahonnan a β szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M}{\theta} = \frac{2M}{mr^2} = 222{,}2\ 1/\mathrm{s}^2. \tag{3.8.2}$$

A szögsebesség és a fordulatszám közötti összefüggés

$$\omega = 2\pi f, \tag{3.8.3}$$

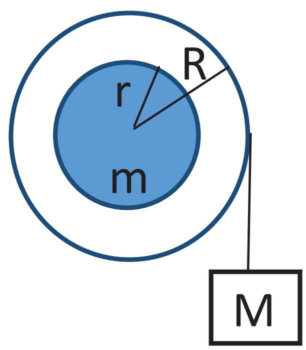
másrészt

$$\omega = \beta t. \tag{3.8.4}$$

A kérdéses fordulatszám eléréséhez szükséges idő

$$t = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = 0,565\,\mathrm{s}. \tag{3.8.5}$$

3.9. Feladat: Egy $r = 20$ cm "tehetetlenségi" sugarú, $m = 40$ kg tömegű kerék sugara $R = 30$ cm. Az R sugárhoz tartozó keréktömeget hanyagoljuk el.) Függőlegesen helyeztük egy vízszintes tengelyre. Egy $M = 2.0$ kg tömegű testet erősítettünk a szélére tekert kötélre a 13. ábrának megfelelően. Határozza meg a kerék elengedés utáni kezdeti szöggyorsulását! (A kerékre: $\theta = mr^2$.)



13. ábra.

Megoldás: Jelölés: a kötelben ébredő erő K. A kerék forgómozgására felírhatjuk, hogy

$$\theta\beta = KR, \tag{3.9.1}$$

míg az m tömegű test haladó mozgására

$$Ma = Mg - K. \tag{3.9.2}$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy

$$a = R\beta. \tag{3.9.3}$$

E három egyenletből a kiszámolt szöggyorsulás

$$\beta = \frac{MgR}{\theta + MR^2} = \frac{MgR}{mr^2 + MR^2} = 3,37\,1/\mathrm{s}^2. \tag{3.9.4}$$

3.10. Feladat: Egy lendkerék fordulatszáma 60 rad/s-ról 180 rad/s-ra növekedett a rajta történt 100 J munkavégzés következtében.
(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka?
(b) Ezt követően egy 3-szor nagyobb tehetetlenségi nyomatékú álló kereket nyomunk a lendkerékhez. Mekkora lesz a kialakuló közös fordulatszám?

Megoldás: a, A végzett munka a kinetikus energiát változtatja meg, azaz

$$W = \frac{1}{2}\theta\omega_2^2 - \frac{1}{2}\theta\omega_1^2, \tag{3.10.1}$$

ahol ω_1 a kezdeti, ω_2 a végső szögsebesség, θ a tehetetlenségi nyomaték. Innen a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = \frac{2W}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,00694\,\mathrm{kgm}^2. \tag{3.10.2}$$

b, Az impulzusmomentum megmaradása miatt

$$\theta\omega_2 = (\theta + 3\theta)\omega', \tag{3.10.3}$$

amelyből

$$\omega' = \frac{1}{4}\omega_2 = 45\,\mathrm{rad/s}. \tag{3.10.4}$$

3.11. Feladat: Egy m tömegű, $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlensési nyomatékú kereket ω_0 szögsebességgel megforgatunk és zérus kezdősebességgel a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük.
(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:
(a) A kerék és a talaj között ébredő μmg súrlódási erő kezdi haladó (transzlációs) mozgásában gyorsitani a kereket, másrészt az súrlódási erő miatt ébredő forgatónyomaték fékezi forgó (rotációs) mozgásában. A kerék haladó mozgására érvényes dinamikai egyenlet

$$ma = \mu mg, \tag{3.11.1}$$

ahol a poziztív előjel a sebesség növekedését fejezi ki. Míg a forgómozgásra felírható egyenlet – a forgómozgás alapegyenlete – a

$$\theta\beta = M = -\mu mgR, \tag{3.11.2}$$

ahol a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a súrlódási erő által létrehozott forgatónyomaték csökkenti a szögsebességet. Ezekből a kerék a gyorsulása és β szöggyorsulása

$$a = \mu g \tag{3.11.3}$$

és

$$\beta = -\frac{\mu mgR}{\theta}. \tag{3.11.4}$$

A $v(t)$ sebesség és az $\omega(t)$ szögsebesség egyszerűen

$$v(t) = \mu g t \tag{3.11.5}$$

és

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta} t. \tag{3.11.6}$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy az

$$v(t) = R\omega(t) \tag{3.11.7}$$

feltétel teljesüljön, azaz

$$\mu g t = R\left(\omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta} t\right). \tag{3.11.8}$$

A θ behelyettesítésével a kérdezett eltelt idő

$$t = \frac{R\omega_0}{3\mu g}. \tag{3.11.9}$$

(b) Az eközben megtett út

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\mu g \frac{R^2\omega_0^2}{9\mu^2 g^2} = \frac{1}{18}\frac{R^2\omega_0^2}{\mu g}. \tag{3.11.10}$$

3.12. Feladat: A 14. ábrán látható módon az m tömegű $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú korongot egy lejtőn h magasságban elengedünk. A lejtő tapadási súrlódási együtthatója μ_0, ezért a korong itt tisztán gördül. A pálya második fele viszont súrlódásmentes.

(a) Mekkora sebessége és szögsebessége van a korongnak a lejtő alján?

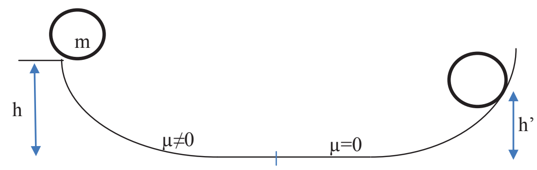
(b) Milyen h' magasra megy fel a súrlódásmentes emelkedőn a korong?

(c) Mennyi a lejtő tetején a korong impulzus momentuma?

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechnikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{3.12.1}$$



14. ábra.

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \tag{3.12.2}$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}. \tag{3.12.3}$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a lejtőn felszalad h' és ott egyhelyben forog ω szögsebességgel. Azaz transzlációs kinetikus energiája alakul csak át helyzeti energiává:

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2. \tag{3.12.4}$$

Innen az emelkedés magassága

$$h' = \frac{2}{3}h. \tag{3.12.5}$$

(c) A lejtő tetején forgó korong az impulzusmomentuma:

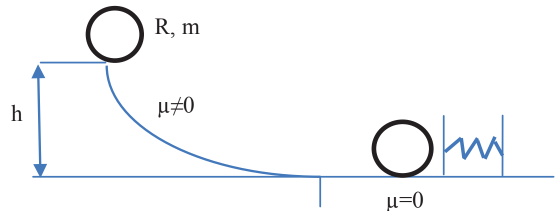
$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}}. \tag{3.12.6}$$

3.13. Feladat: Egy $R = 10$ cm sugarú, $m = 1$ kg tömegű tömör korong ($\theta = \frac{1}{2}mR^2$) tisztán legördül egy $h = 0,3$ m magasságú lejtős pályán. A lejtő alján nekiütközik a 15. ábrán látható fékezőrugónak, amelynek ütközője és a pálya ezen szakasza súrlódásmentes. A $k = 400$ N/m rugóállandójú rugó nyugalmi hossza $l_0 = 20$ cm.

(a) Mekkora a korong sebessége és szögsebessége a lejtő alján?

(b) Mekkora a korong impulzusmomentuma a rugó összenyomódása után?

(c) Mennyivel nyomódott össze a rugó?



15. ábra.

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechnikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{3.13.1}$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 2\text{m/s} \tag{3.13.2}$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = 20\,\text{rad/s}. \tag{3.13.3}$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a rugót összenyomja és ott egyhelyben forog ω szögsebességgel:

$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}} = 0,1\,\text{kg m}^2/\text{s}. \tag{3.13.4}$$

(c) A fentiek szerint a transzlációs kinetikus energiája alakul csak át rugalmas energiává:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2. \tag{3.13.5}$$

Innen az összenyomódás mértéke:

$$\Delta = l_0 - l = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} = 0,1\,\text{m}. \tag{3.13.6}$$

3.14. Feladat: Egy R sugarú, m tömegű homogén tömegeloszlású nem forgó kereket tengelyre merőlegesen v_0 sebességgel meglökünk és a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük. A kerék tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.
(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:
(a) A kereket a talajra engedve a v_0 sebességgel ellentétes $F_s = -\mu mg$ súrlódási erő hat, amely egyrészt csökkenti a sebességet, másrészt a kerék középpontjára forgatónyomatékot ad, amely a kereket forgásba hozza. A transzlációra vonatkozó mozgásegyenlet

$$ma = F_s = -\mu mg, \tag{3.14.1}$$

amelyből a gyorsulás

$$a = -\mu g. \tag{3.14.2}$$

Így a kerék sebessége a

$$v(t) = v_0 - \mu gt \tag{3.14.3}$$

függvény szerint változik. A forgómozgásra a forgómozgás alapegyenlete írható fel, amely – figyelembe véve a forgatónyomaték előjelét –

$$\theta\beta = \mu mgR. \tag{3.14.4}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítésével, valamint az egyenlet rendezésével a szöggyorsulás

$$\beta = \frac{2\mu g}{R}. \tag{3.14.5}$$

A kerék szögsebessége az

$$\omega(t) = \frac{2\mu g}{R}t \tag{3.14.6}$$

függvény szerint változik. A tiszta gördülés feltétele, hogy a

$$v(t) = R\omega(t) \tag{3.14.7}$$

összefüggés teljesüljön, azaz a

$$v_0 - \mu gt = R\frac{2\mu g}{R}t \tag{3.14.8}$$

fennálljon. Ebből a tiszta gördülésig eltelt időt kifejezve kapjuk, hogy

$$t = \frac{v_0}{3\mu g}. \tag{3.14.9}$$

(b) A megtett út az

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{3.14.10}$$

négyzetes úttörvénybe helyettesítve

$$s = \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{\mu g} \tag{3.14.11}$$

3.15. Feladat: ** A m tömegű R sugarú homogén korongot forgástengelye körül ω_0 szögsebességgel megforgatunk, majd lapjával – a tengely merőleges a felületre – a sík asztalra helyezzük. A korong és asztal között μ súrlódási tényező van. Feltételezve, hogy korong egyenletesen nyomja az asztalt, mennyi idő múlva áll meg a korong? (A korong tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2} m R^2$.)

Megoldás: A feladat megoldásának kulcsa az eredő forgatónyomaték kiszámolása. Vezessük be a felületi tömegsűrűséget, amely

$$\eta = \frac{m}{R^2 \pi}. \tag{3.15.1}$$

A korongból tekintsünk egy r sugarú dr szélességű körgyűrűt. Ennek tömege

$$dm = \eta 2 r \pi dr. \tag{3.15.2}$$

A körgyűrű érintője mentén ébredő dF_s súrlódási erő

$$dF_s = \mu \, dm \, g, \tag{3.15.3}$$

amely erő a körgyűrű középpontjára vonatkoztatva

$$dM = \mu \, dm \, g r = 2\pi \mu \eta g r^2 dr \tag{3.15.4}$$

forgatónyomatékot hoz létre. A korongra ható teljes forgatónyomaték

$$M = \int_0^R 2\pi \mu \eta g r^2 dr = \frac{2\pi}{3} \mu \eta g R^3 = \frac{2}{3} \mu m g R. \tag{3.15.5}$$

Felírva a forgómozgás alapegyenletét

$$\theta \beta = M = \frac{2}{3} \mu m g R \tag{3.15.6}$$

a szögsebesség kiszámolható:

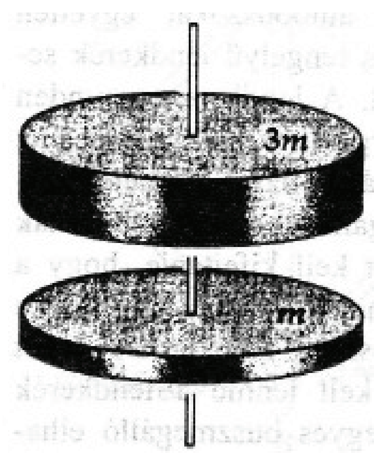
$$\beta = \frac{4}{3} \frac{\mu g}{R}. \tag{3.15.7}$$

A megállásig eltelt idő

$$t = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{3}{4} \frac{\omega_0 R}{\mu g}. \tag{3.15.8}$$

Impulzusmomentum megmaradása

3.16. Feladat: (HN 12B-28) A 16. ábrán látható két tömör tárcsa sugara R, egyik tömeg m, a másiké $3m$. A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának ω_0 kezdő szögsebességet adunk, majd nagyon kis magasságból ráejtjük a kezdetben nyugalomban lévő alsó tárcsára. A tárcsák – a közöttük fellépő súrlódás hatására – végül közös ω szögsebességgel együtt forognak.
(a) A megadott mennyiségekkel fejezzük ki a végső ω szögsebességet, és
(b) a tárcsák egymáson való súrlódása közben keletkező hőmennyiséget!
(c) Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási "ütközésnek"?



16. ábra.

Megoldás:
(a) Külső forgatónyomatékok hiányában az impulzusmomentum megmaradás tételét alkalmazhatjuk. Kezdetben a $3m$ tömegű test forog ω_0 szögsebességgel. Az impulzusmomentum

$$N_1 = \theta_{3m}\omega_0 = \frac{1}{2}3mR^2\omega_0, \tag{3.16.1}$$

ahol θ_{3m} a $3m$ tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Az összetapadás után együtt forog a két test, az együttes impulzusmomentum

$$N_2 = (\theta_m + \theta_{3m})\omega = (\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2)\omega, \tag{3.16.2}$$

ahol θ_m az m tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Mivel $N_1 = N_2$, így

$$\frac{1}{2}3mR^2\omega_0 = (\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2)\omega, \tag{3.16.3}$$

amelyből

$$\omega = \frac{3}{4}\omega_0. \tag{3.16.4}$$

(b) A kezdeti kinetikus energia

$$E_1 = \frac{1}{2}\theta_{3m}\omega_0^2 = \frac{1}{4}3mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2, \tag{3.16.5}$$

míg az összetapadás után

$$E_2 = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_{3m})\omega^2 = \frac{1}{4}4mR^2\omega^2 = \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2. \tag{3.16.6}$$

A két energia különbsége, amennyi energia hő formájában jelenik meg:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2 - \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{16}mR^2\omega_0^2. \tag{3.16.7}$$

(c) Az egyenesvonalú analogon: a $3m$ tömegű v_0 sebességű test ütközése a nyugvó m tömegű testtel. Ekkor a közös sebesség:

$$v = \frac{3}{4}v_0. \tag{3.16.8}$$

3.17. Feladat: (HN 12C-50) A 17. ábra egy r_0 sugarú körpályán v_0 sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó m tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test az $r_0/2$ sugarú körpályára kerüljön. Számítsuk ki az m, az r_0 és v_0 függvényében

(a) a test végső sebességét és

(b) a fonál új helyzetve húzása során végzett munkát!

(c) Mutassuk meg, hogy a végzett munka egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával!

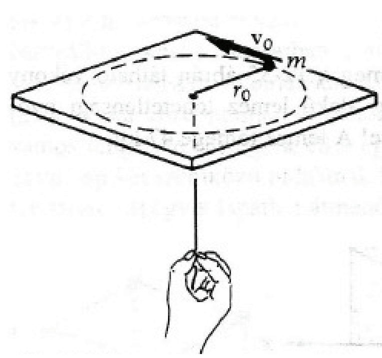
Megoldás:

(a) Mivel jelen esetben a mozgás során mindvégig a kötélerő sugárirányú, azaz centrális, így az impulzusmomentum megmaradásának tétele alkalmazható

$$mv_0r_0 = mv\frac{r_0}{2}. \tag{3.17.1}$$

Ebből a test végső sebessége

$$v = 2v_0. \tag{3.17.2}$$



17. ábra.

(b) A munka kiszámolásához először a K kötélerőt egy közbenső r sugarú pályára kell megadni. Ehhez egyrészt újra alkalmazni kell az impulzusmomentum megmaradásának tételét

$$mv_0r_0 = mvr, \tag{3.17.3}$$

másrészt fel kell írni a körpályán való mozgásra a

$$K = m\frac{v^2}{r} \tag{3.17.4}$$

mozgásegyenletet. E kettőből az origó felé mutató K kötélerő

$$K = m\frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}. \tag{3.17.5}$$

A végzett munka – figyelembe véve az erő és a radiális egységvektor ellentétes irányát –

$$W = -\int_{r_0}^{r_0/2} m\frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}\mathrm{d}r = \frac{1}{2}mv_0^2 r_0^2\left[\frac{1}{r^2}\right]_{r_0}^{r_0/2} = \frac{3}{2}mv_0^2. \tag{3.17.6}$$

(c) A kinetikus energia megváltozása

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}mv_0^2 = W, \tag{3.17.7}$$

ahogy annak lennie is kell.

Forgási energia

3.18. Feladat: Az L hosszúságú m tömegű rúd függőlegesen áll, az alsó pontja súrlódásmentes csapággyal csatlakozik a talajhoz. Az egyensúlyi helyzetből kimozdul és a talajba csapódik.

Mekkora a rúd szögsebessége a becsapódás pillanatában? A rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúd végére vonatkoztatva $\theta = \frac{1}{3}mL^2$.

Megoldás: A talajszintet választva a potenciális energia zérus pontjának a rúd – a rúd tömegközéppontjának – potenciális energiája álló helyzetben

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \tag{3.18.1}$$

míg a fekvő helyzetben

$$E_{p2} = 0. \tag{3.18.2}$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \tag{3.18.3}$$

míg a végső kinetikus energia a forgásból származó

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{3.18.4}$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{3.18.5}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \tag{3.18.6}$$

adódik.

3.19. Feladat: * Az L szárhosszúságú, száranként m tömegű létra egyik lába a falnál áll, míg a másik lába súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes talajon. A kezdetben 2α szögre szétnyitott létra szára csúszik, és a létra teljesen szétnyílva a talajba csapódik. Mekkora a létra szárainak szögsebessége a becsapódás pillanatában? (A rúg végpontjára vett tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3}mL^2$.)

Megoldás: A létra a becsapódás pillanatában csak forgómozgást végez. Ez belátható, ha végiggondoljuk a következőt. Ha a létra csúcsa – a két szár találkozási pontja – v_x sebességgel halad, akkor csúszó talppont sebessége $2v_x$. A csúcspont a becsapódás pillanatában csak függőleges mozgást végez ($v_x = 0$), így a csúszó talppont sebessége ugyancsak zérus. Azaz a létra egyetlen pontja sem végez haladó mozgást. A kezdeti helyzeti energia alakul át forgási energiává:

$$2mg\frac{L}{2}\cos\alpha = 2\frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{3.19.1}$$

Egyszerűsítés és átrendezés után mindkét rúd szögsebessége

$$\omega\sqrt{\frac{3g}{L}}. \tag{3.19.2}$$

3.20. Feladat: * A h magasságú toronyugró a palló szélén áll és összegörnyedés nélkül – merev rúdként – a vízbe fordul. (A lába a pallón nem csúszik meg a dőlés során.) Mekkora szögnél válik el a pallótól?

Megoldás: Jelölje α azt a függőlegessel bezárt szöget, amelynél éppen elvélik a pallótól a toronyugró lába. Első lépésként számítsuk ki mekkora ebben a pillanatban a szögsebessége. A palló szintjét tekintve a potenciális energia zérus pontjának a kezdeti helyzeti energia

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \tag{3.20.1}$$

míg a dőlt helyzetben

$$E_{p2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha. \tag{3.20.2}$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \tag{3.20.3}$$

míg az elválás pillanatához tartozó forgásból származó kinetikus energia

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{3.20.4}$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1}+E_{k1} = E_{p2}+E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{3.20.5}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre azt kapjuk, hogy

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\alpha)}. \tag{3.20.6}$$

A rúd tömegközéppontjának sebessége

$$v = \frac{L}{2}\omega = \sqrt{\frac{3}{4}gL(1-\cos\alpha)}. \tag{3.20.7}$$

Az elválás pillanatában – egyetlen erőként – az mg súlyerő rúdirányú (radiális) komponense hat és tartja körpályán a rúd tömegközéppontját, azaz

$$m\frac{v^2}{(\frac{L}{2})} = mg\cos\alpha. \tag{3.20.8}$$

A sebesség behelyettesítése és az egyszerűsítések után

$$\cos\alpha = \frac{3}{7} \tag{3.20.9}$$

adódik, amelyből az elválás pillanatához tartozó szög $\alpha = 64,62^0$.