Fizika 2. (régi) Feladatok
Magyar nyelvű tanagyagokhoz

Sólyom. A.

2014.09.06

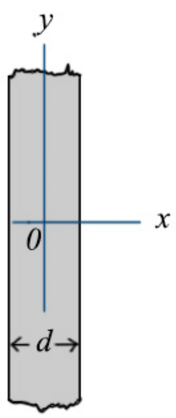
Tartalomjegyzék

1. fejezet

Gyakorlat 2

1.1. 25B-7

Egy d vastagságú lemezben egyenletes ρ térfogatmenti töltés van. A lemez a $\pm y$ es $\pm z$ irányokban gyakorlatilag végtelen (1.1 ábra); az x tengely zéruspontját úgy választottuk meg, hogy az a lemez d szélességének a felénél legyen. Számitsuk ki az elektromos térerősség nagyságát x pozitív értékeire az a) $0 < x < d/2$; b) $x > d/2$ esetekre.



1.1. ábra. A 25B-7 feladathoz

Megoldás:

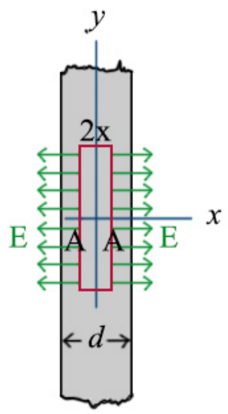
Az elektrosztatikus térerősség forrásai a töltések, ezért: 1) a szimmetria miatt a térerősségnek csak x komponense van, 2) pozitív töltéssűrűség esetén pozitív x-ekre pozitív, negatív x-ekre negatív irányú, emiatt 3) a lemez szélességének felező síkjában nulla.

A Gauss törvény szerint

$\varepsilon_o E$ fluxusa egy zárt A felületre = Az összes töltés a felületen belüli térfogatban

$$\int_A \varepsilon_o \mathbf{E}\, d\mathbf{A} = \int_{V(A)} \rho\, dV \tag{1.1}$$

Vegyünk fel a lemez belsejében egy olyan, $2\,x$ magasságú hengerszerű testet, pl. egyenes hasábot, amelynek két egymással és a lemez felületével párhuzamos A nagyságú felülete van és amely magasságát a lemez középpárhuzamos síkja felezi (ld. 1.1 ábra.) Erre



felírva a (1.1) Gauss törvényt és felhasználva, hogy a lemez belsejében ρ állandó, illetve $\mathbf{E}$ a hasáb mindkét A felületére merőleges és kifelé mutat, továbbá, hogy a hasáb oldallapjaival/palástjával $\mathbf{E}$ párhuzamos, tehát azokra fluxusa 0:

$$\varepsilon_o E\, 2\, A = \rho \cdot A\, 2\, x$$
$$E = \frac{\rho}{\varepsilon_o} x \qquad |x| \leq \frac{d}{2} \tag{1.2}$$

A lemezen kívül ($|x| > d/2$) a térerősség állandó[1] és értéke (1.2) maximuma, azaz

$$E = \frac{\rho\, d}{2\,\varepsilon_o} \tag{1.3}$$

Vegyük észre, hogy a lemezen kívűl a tér pontosan ugyanolyan, mint egy végtelen σ töltéssűrűségű 2D lemez esetén, mivel $\sigma = \rho\, d$.

[1] Ez szimmetria okokból is következik.

1.2. 25B-12

Egy nagyon hosszú, R sugarú fémrúdon σ egyenletes felületmenti töltéssűrűség van. a) Elhanyagolva a rúd végeinek hatását, számítsuk kí az $\mathbf{E}$ térerősséget a henger felszínétől R távolsagban. b) Számitsuk ki azt a v sebességet, amellyel egy elektron a rúd körül R távolságban stacionárius körpályán mozogna.

Megoldás:

a) Az, hogy a fémrúd nagyon hosszú azt jelenti, hogy (első közelítésben) végtelennek tekinthetjük. Szimmetria okokból a térerősség merőleges kell legyen az egyenletesen feltöltött henger felületére, ezért nagysága csak a távolságtól függ. A Gauss törvény használatához egy, a fémrúddal koaxiális henger alakú, r sugarú és l hosszúságú felületet vegyünk fel. Mivel a térerősség ennek a hengernek a palástjára mindenütt merőleges és állandó nagyságú a határoló körök síkjával pedig párhuzamos, erre a teljes zárt felületre vett fluxus megegyezik az r sugarú hengerpalástra vett fluxussal. Az ezen a felületen belüli összes töltés pedig a σ töltéssűrűség és a fémrúd l hosszúságú szakasza felületének szorzata. A Gauss törvény szerint tehát a térerősség a vezetőn kívül

$$\begin{aligned} \varepsilon_o\, 2\, r\, \pi\, l\, E &= 2\, R\, \pi\, l\, \sigma \\ E(r) &= \frac{R\,\sigma}{\varepsilon_o\, r} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Innen a térerősség a fémrúdtól R távolságban ($r = 2\,R$)

$$E(R) = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o}$$

b) Ha egy elektron kering ezen az $r = 2\,R$ sugarú körpályán, akkor

$$-e\,E = -\frac{m_e\, v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\,e\,E\,R}{m_e}} = \sqrt{\frac{e\,\sigma\,R}{\varepsilon_o\, m_e}} \tag{1.5}$$

1.3. 25C-18

Egy R sugarú gömbben az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség kifelé mutat, és értéke mindenütt konstans, E_o. Így, $E = E_o\hat{\mathbf{r}}$, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ a kifelé mutató sugárírányú egységvektor. a) Felhasználva Gauss törvényét vezessük le hogy hogyan függ a $\rho(r)$ térfogatmenti töltessűrűség az r sugártól. (Útmutatás: az integrálszámítás alaptétele szerint ha $g(x) = \int_o^x f(t)dt$, akkor $\dfrac{dg}{dx} = f(x)$)

b) A gömb középpontjával kapcsolatban mílyen nehézség adódik?

Megoldás:

Legyen a gömbben a töltéssűrűség ρ. Mivel $\mathbf{E}$ $\mathbf{r}$ irányú a tér gömszimmetrikus, ezért ρ csak a távolságtól függ, az iránytól nem. $\rho = \rho(r)$. A (1.1) Gauss törvény alkalmazásához vegyünk fel egy r sugarú köncentrikus A gömbfelületet. Erre a felületre $\mathbf{E}$ mindenhol merőleges, így a Gauss törvény szerint

$$\varepsilon_o E(r)\, 4\,\pi\, r^2 = \int\limits_{V(r')} \rho(r)\, dV' \tag{1.6}$$

A jobboldal integrál kiszámításához vegyük figyelembe, hogy $\rho = \rho(r)$ csak r nagyságától függ, ezért a térfogatra való integrálást elvégezhetjük úgy is, hogy térfogatelemeknek r' sugarú és $d\,r'$ vastagságú gömbhéjakat választunk[2]. Egy ilyen gömbhéj dV' térfogata $dV' = 4\,\pi\, r'^2\, dr'$, töltése $dQ = \rho(r')\, dV' = 4\,\pi\,\rho\, r'^2\, dr'$, azaz a Gauss törvény szerint:

$$\varepsilon_o E(r)\, 4\,\pi\, r^2 = 4\,\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr'$$
$$\varepsilon_o E_o\, r^2 = \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr'$$

Az integrálszámítás alaptétele

$$\text{ha } g(r) = \int_0^r f(r')\, dr' \qquad \text{akkor}$$
$$f(r) = \frac{d\,g(r)}{d\,r}$$

A mi esetünkben

$$f(r) \equiv \rho(r)\, r^2$$
$$g(r) \equiv \varepsilon_o E_o\, r^2$$

Tehát

$$\rho(r)\, r^2 = 2\,\varepsilon_o E_o\, r$$
$$\rho(r) = 2\,\varepsilon_o E_o \frac{1}{r} \tag{1.8}$$

[2]Vagyis az A felület által határolt térfogatot felosztjuk koncentrikus, dr' vastag $dV'_G = dA' \cdot dr'\; G(r')$ gömbhéjakra, amelyekben ρ jó közelítéssel állandó, tehát az integrál ezekre egyszerűen kiszámítható, majd az így kapott függvényt integráljuk 0 és R között:

$$\int\limits_{V(r)} \rho(r')\, dV' = \int_0^r \int\limits_{G(r')} \rho(r')\, dV'_G = \int_0^r \left(\rho(r') \int\limits_{G(r')} dA'_G \right) dr' =$$

$$= \int_0^r \left(\rho(r')\, 4\,\pi\, r'^2\right) dr' = 4\,\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \tag{1.7}$$

b) Látható, hogy ha $r \to 0$, akkor $\rho(r) \to \infty$

1.4. 26B-9

A tér egy tartományában a *volt* egységekben kifejezett V potenciált a

$$V = (3\left[\frac{V}{m^2}\right])x^2 + (0,2\left[\frac{V}{m}\right])y$$

függvény adja meg, ahol x és y méterekben megadott távolságok. Számítsuk ki az $x = 10$ cm, $y = 15$ cm koordínátájú helyen levő elektronra ható erő nagyságát és irányát.

Megoldás:

A potenciál és a térerősség közötti kapcsolat

$$\mathbf{E} = -gradV(\mathbf{r})$$

$$E_x = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z},$$

Esetünkben $V(x,y,x) = V(x,y) = A\,x^2 + B\,y$

$$E_x = -2\,A\,x, \qquad E_y = -B, \qquad E_z = 0$$
$$F_x = 2\,e\,A\,x, \qquad F_y = e\,B$$
$$F = e\sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = e\sqrt{4\,A^2\,x^2 + B^2}$$

Az erő iránya az x tengellyel α szöget zár be, ahol $tg\,\alpha = \frac{2\,A\,x}{B}$ Behelyettesítve a számértékeket

$$F_x = 6 \cdot 0,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 9,6 \cdot 10^{-20} N \quad E_y = 0,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,2 \cdot 10^{-20} N$$
$$F = \sqrt{9,6^2 + 3,2^2} \cdot 10^{-20} = 1,0119 \cdot 10^{-19} N$$
$$tg \cdot \alpha = 0,2/0,6 = 0.33 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18.4^o$$

1.5. 26B-12

Két egyforma kicsiny fémgömb töltese q_1 illetve q_2. Egymást 1 m távolságból $9 \times 10^{-3} N$ erővel vonzzák. A gömböket összeérintjuk, majd újból egymástól 1 m távolságra helyezzük el. Ekkor úgy találjuk, hogy $2 \times 10^{-3} N$ erővel taszítják egymást. Számítsuk ki a q_1 és q_2 töltéseket.

Megoldás:

Összeérintés előtt a gömböknek különböző előjelű töltése volt ezért vonzották egymást. Összeérintés után a töltéseik kiegyenlítődtek és mindkettő töltése azonos előjelűvé és $q = \dfrac{q_1 + q_2}{2}$ nagyságúvá vált, ezért taszítják egymást[3] Az egyenleteket felírva

$$\begin{aligned} |F_1| &= \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{|q_1\,q_2|}{r^2} = 9\,10^9\,q_1\,q_2 && = 9\,10^{-3}\;N \\ |F_2| &= \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{r^2} = 9\,10^9\,q^2 && = 2\,10^{-3}\;N \end{aligned}$$

innen, mivel vagy q_1, vagy q_2 negativ kell legyen

$$q_1 \cdot q_2 = -9 \cdot 10^{-3}/9 \cdot 10^9 = -10^{-12}\;C^2$$

$$\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)^2 = 2 \cdot 10^{-3}/9 \cdot 10^9 = 2,22 \cdot 10^{-13}\;C^2$$

$$\frac{q_1 + q_2}{2} = \pm\sqrt{2,22 \cdot 10^{-13}}\;C \tag{1.9}$$

$$q_1 + q_2 = \pm 2 \cdot \sqrt{2,22 \cdot 10^{-13}} = \pm 9,4234 \cdot 10^{-7}\;C \tag{1.10}$$

$$q_2 = -10^{-12}\frac{1}{q_1}$$

$$q_1 - 10^{-12}\frac{1}{q_1} = \pm 9,4234 \cdot 10^{-7}\;C$$

$$q_1^2 \mp 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} = 0$$

A két egyenletet felírva

$$q_1^2 - 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} = 0 \tag{1.11}$$

$$q_1^2 + 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} = 0 \tag{1.12}$$

Jelöljük a négyzetgyök előjelét felső indexben

$$q_{1,\pm}^{+} = \frac{9,4234 \cdot 10^{-7} \pm\sqrt{3,5555 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12}}}{2} \tag{1.13}$$

$$= \frac{9,4234 \cdot 10^{-7} \pm 2,7487 \cdot 10^{-6}}{2} \tag{1.14}$$

$$q_{1,\pm}^{-} = \frac{-9,4234 \cdot 10^{-7} \pm\sqrt{3,5555 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12}}}{2} \tag{1.15}$$

$$= \frac{-9,4234 \cdot 10^{-7} \pm 2,7487 \cdot 10^{-6}}{2} \tag{1.16}$$

[3] Ez arra utal, hogy kezdetben nem volt azonos nagyságú a töltésük.

$$q_1^+ = \begin{cases} 1,5767 \cdot 10^{-6}\, C \\ -6.3425 \cdot 10^{-7}\, C \end{cases}$$
$$q_2^+ = \begin{cases} -6.3425 \cdot 10^{-7}\, C \\ 1,5767 \cdot 10^{-6}\, C \end{cases}$$
$$q_1^- = \begin{cases} -1,5767 \cdot 10^{-6}\, C \\ 6.3425 \cdot 10^{-7}\, C \end{cases}$$
$$q_2^- = \begin{cases} 6.3425 \cdot 10^{-7}\, C \\ -1,5767 \cdot 10^{-6}\, C \end{cases}$$

Innen látható, hogy elég lett volna a négyzetgyökvonásnál a pozitív előjelet használni amivel megkaptuk volna a az első két megoldást, majd utána felcserélni az előjeleket a második két megoldáshoz. Visszahelyettesítve pl. ez első két megoldást és elhagyva a felső indexet

$$\frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,5767 \cdot 10^{-6} \cdot 0,63425 \cdot 10^{-6}}{1} = 9 \cdot 10^{-3}\, N \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,5767 \cdot 10^{-6} + 0,63425 \cdot 10^{-6})^2}{4} = 2.00 \cdot 10^{-3}\, N \tag{1.18}$$

1.6. 27A-12

Becsüljük meg azt a legnagyobb potenciált, amelyre egy $10\,cm$ átmérőjű fémgömböt fel lehet tölteni, anélkül, hogy a térerősség értéke meghaladná a környező száraz levegő dielektromos átütési szilárdságát.

Megoldás:

A feltöltött R sugarú fémgömb felületén a térerősség és a potenciál pontosan akkora, mintha a teljes töltése a középpontjában lenne:

$$E(R) = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{R^2} \tag{1.19}$$

$$|\Phi(R)| = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{R} = E(R) \cdot R \tag{1.20}$$

A száraz levegő dielektromos átütési szilárdsága $E_o = 3\,10^6 \frac{V}{m}$. Innen $|\Phi(R)| = E_o \cdot R = 3\,10^6\,0,1 = 3\,10^5 V$

1.7. 27B-20

Egy $0,1\,\mu F$ kapacitásu síkkondenzátor lemezei $0,75\,m^2$ területűek, a szigetelő réteg dielektromos állandója 2,5. A kondenzátort $600\,V$-os feszültségre töltjük fel. a) Számítsuk ki a lemezek töltését. b)Számítsuk ki a szigetelő réteg felületén indukált töltést. c) Számitsuk ki a szigetelő rétegben az elektromos térerősséget.

Megoldás:

A kondenzátor kapacitása

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_r \, \varepsilon_o \, \frac{A}{d} \tag{1.21}$$

a) $Q = C\,U = 0,1 \times 10^{-6} \cdot 600 = 6\,10^{-5}\,C$

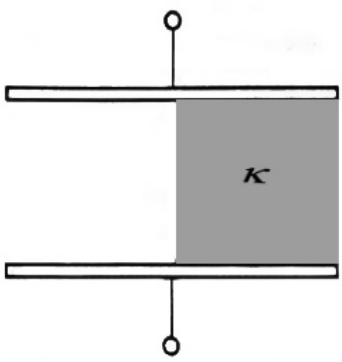
b) $\sigma_{szabad} = \frac{Q}{A} = \frac{6\,10^{-5}}{0,75m^2} = 8 \times 10^{-5}\,\frac{C}{m^2}$, a szigetelő A felületén indukált töltés: $\sigma = \sigma_{szabad}(1 - \varepsilon_r) = -1,2 \times 10^{-4}\frac{C}{m^2}$

c) A Gauss tétel alapján a lemezek közötti térerősség

$$E = \frac{Q}{A\,\varepsilon\,\varepsilon_o} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{0,75 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 2,5} = 3,614 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$$

1.8. 27C-36

Egy κ dielektromos állandójú szigetelő réteg egy sikkondenzátor lemezei közötti teret az 1.2 ábrán vázolt módon csak félig tölt ki. Adjuk meg, hogy a teljes energia hányadrésze tárolódik a szigetelő rétegben.



1.2. ábra. A 27B-20 feladathoz

Megoldás:

Két megoldást is adunk:

1) Ez az elrendezés két párhuzamosan kapcsolt kondenzátornak felel meg. Ezek kapacitásai:

$$C_1 = \varepsilon_o \frac{A}{2d}, \qquad C_2 = \kappa \varepsilon_o \frac{A}{2d},$$

ahol A a kondenzátor lemezeinek felülete és d a lemezek távolsága. Így

$$C_2 = \kappa\, C_1$$

A kondenzátorok párhuzamosan vannak kapcsolva ezért a rajtuk levő feszültség ugyanakkora, a bennük tárolt energia pedig

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}\, C_1\, U^2, \text{ ill. } \quad \frac{1}{2}\, C_2\, U^2$$

Az összenergia e két energia összege, ezért a szigetelőt tartalmazó kondenzátor energiájának (a szigetelőben tárolt energiának) γ aránya az összenergiához képest:

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\, C_2\, U^2}{\frac{1}{2}\, C_1\, U^2 + \frac{1}{2}\, C_2\, U^2} \tag{1.22}$$

$$= \frac{C2}{C1 + C2} = \frac{\kappa}{1+\kappa} \tag{1.23}$$

2) Az elektrosztatikus térben tárolt energia sűrűségét az

$$w = \frac{1}{2}\, \kappa\varepsilon_0\, E^2$$

képlet adja meg. Az ábra szerinti elrendezésben az elektródák ekvipotenciális felületek, a töltéssűrűség konstans. A térerősség merőleges a kondenzátor lemezeire és párhuzamos a betolt szigetelő hasáb oldalával, ezért az anyagban és a vákuumban ugyanakkora. Tehát az egyes tartományokban az energiasűrűség:

$$w_v = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2$$

$$w_a = \frac{1}{2}\, \kappa\varepsilon_0\, E^2 = \kappa\, w_v$$

Mivel a kondenzátor lemezek közötti tér fele van anyaggal kitöltve a tárolt energiák aránya megegyezik az energiasűrűségek arányával, tehát

$$\gamma = \frac{w_a}{w_a + w_v} = \frac{\kappa}{1+\kappa} \tag{1.24}$$