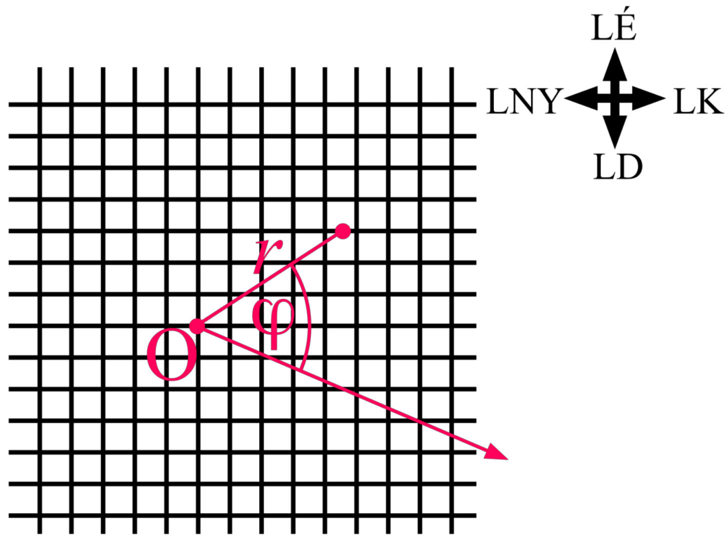
1.

Térkép és valóság

Képzeljük el, hogy egy négyzetrácsos sík papírlap a világ, amelyen laposlényekként élünk. A négyzetrács-vonalak az úthálózatot jelképezik. Az egyik irányt „laposkelet-laposnyugatnak“, a rá merőleges irányt „laposészak-laposdélnek“ nevezzük.

(a) Írjon számítógépes programot, amely (r, φ) polárkoordinátákban felrajzolt térképen ábrázolja a világunk egy darabkáját. [A térkép olyan derékszögű koordinátarendszerben legyen, amelynek vízszintes tengelye az r, függőleges tengelye a φ.] A térképre legalább 10-10 laposkelet-laposnyugati, ill. laposészak-laposdéli út férjen rá. A polárkoordinátarendszerünk tengelyét az úthálózathoz képest ferdén vegye fel, az alábbi ábrához hasonlóan:



(b) Röviden írja le, milyen módon torzítja el ez a térkép a valódi világ viszonyait.

****2.***

A negatív tömeg mennyire analóg a negatív töltéssel?

A klasszikus mechanika szerint két tömegpont között az alábbi képlettel leírt gravitációs erő hat:

$$\vec{F}_{grav} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r,$$

ahol γ az egyetemes gravitációs állandó, m_1 és m_2 a két tömegpont tömege, r pedig a távolságuk. Ha a polárkoordináta-rendszerünk origóját az m_1 tömegpontba helyezzük, és $\vec{e}_r$ az r-irányú (az origóból kifelé mutató) egységvektor, akkor a képlet az m_2-re ható erő vektorát adja meg.

A fenti képlet erős matematikai hasonlóságokat mutat a két ponttöltés között ható Coulomb-erő képletével:

$$\vec{F}_{Coulomb} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$$

ahol k_e a Coulomb-állandó, q_1 és q_2 pedig a két tömegpont töltése.
(Az első képletben szereplő mínusz előjel, ill. a második képletben a hiánya azt fejezi ki, hogy két azonos előjelű tömeg vonzza, míg két azonos előjelű töltés taszítja egymást.)

Az analógia szerint tehát amilyen szerepet betölt a töltés az elektromos kölcsönhatásban, olyan szerepet tölt be a tömeg a gravitációs kölcsönhatásban. Töltés azonban kétféle előjelű is előfordul a természetben (pozitív, negatív), míg tömeg csak pozitív létezik, legalábbis minden jel erre mutat.

Diszkutálja a fenti erőtörvények és Newton 2. törvénye ($\vec{F}_{össz} = m\vec{a}$) alapján, hogy *negatív tömegek* létezése milyen furcsa, meglepő kísérleti következményekhez vezetne.

(Segédlet: a http://fizipedia.bme.hu/images/3/3b/Negative_mass_szabad.pdf cikk „Newtonian Physics“ című fejezete.)

3.

Egy földi laboratórium mekkora pontossággal inerciarendszer?

Az ekvivalencia-elv szerint a Föld felett *szabadon eső* vonatkoztatási rendszer lokálisan (olyan kicsi téridőtartományban, amelyben a téridő görbületét kifejező árapály-gyorsulások elhanyagolhatók) inerciarendszernek tekinthető.
A földi laboratóriumok *nem* szabadon esnek, hanem a felszínhez vannak rögzítve, mégis sok részecskefizikai kísérletben inerciarendszernek tekinthetjük őket. Az alábbi feladat alapján bizonyítsa ennek az állításnak a megalapozottságát.

(a) Egy földi laboratóriumban $v = 0.96c$ sebességű elemi részecskék száguldanak át egy 1m oldalhosszúságú kocka alakú vákuumkamrán. A laboratóriumi megfigyelő szerint mennyi ideig tart a részecskék átrepülése a vákuumkamrán, azaz mennyi ideig „zajlik a kísérlet“? Mekkora távolságot tenne meg lefelé egy szabadon eső próbatest ennyi idő alatt, ha nyugalomból elengednénk? [Használja a klasszikus kinematika $y = (1/2)gt^2$ képletét.] Hasonlítsa össze a választ egy tipikus atommag méretével [$\sim 10^{-15}$m]. Vonja le a következtetést: a kísérlet időtartama alatt megkülönböztethető-e az elemi részecskék pályája attól a tökéletesen egyenes pályától, amit a világűrben szabadon lebegő inerciarendszerben befutnának, azaz: tekinthető-e ez a laboratórium az adott kísérlet szempontjából inerciarendszernek?

(b) Tegyük fel, hogy a kísérleti berendezésünkben szerepel egy optikai interferométer, amely 500nm pontosságal tud távolságot mérni. Mennyi idő alatt tenne meg függőlegesen ekkora távolságot egy nyugalomból elejtett próbatest? Legfeljebb mekkora utat tud megtenni egy gyors elemi részecske ennyi idő alatt? Tehát legfeljebb milyen hosszú lehet egy vákuumkamra ebben a kísérletben, ha azt akarjuk, hogy a laboratóriumot a megadott pontosság mellett inerciarendszernek tekinthessük?

4.

A Nemzetközi Űrállomás mekkora pontossággal inerciarendszer?

A Nemzetközi Űrállomás (International Space Station, ISS) a földfelszín felett d = 400km magasságban kering, szabad, erőmentes mozgással. Az űrhajósok az ISS belsejében „súlytalanul“ lebegnek, az Űrállomás az ekvivalencia-elv szerint jó közelítéssel inerciarendszernek tekinthető. Mégsem egészen pontosan inerciarendszer, hiszen – a Föld által begörbített téridőben – árapály-gyorsulások jelentkeznek benne.

Az ISS magassága (a Földhöz legközelebbi és attól legtávolabbi pontjai közötti távolság) h = 20m. Az Űrállomás belsejében, *a Földtől legtávolabbi ponton* az egyik űrhajós, Enikő, óvatosan nyugalomból elenged egy üveggolyót. *A Földhöz legközelebbi pontban* egy másik űrhajós, Melinda, nyugalomból elenged egy acélgolyót. Ha az ISS valóban igazi inerciarendszer lenne, a két golyó egymáshoz képest nyugalomban maradna.

(a) Mutassa meg, hogy az árapály-gyorsulás lassan *távolítja* egymástól a két golyót.

(b) Vezesse le, hogy az üveggolyó $a = \dfrac{2\gamma M_F h}{\left(R_F + d\right)^3} \approx 5.1\cdot 10^{-5}\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással távolodik a vasgolyótól. Hány másodperccel a kísérlet megkezdése után nő a golyók közötti távolság 1cm-rel?

<u>5.</u>

<u>Árapály-gyorsulás a Földön, newtoni számolással</u>

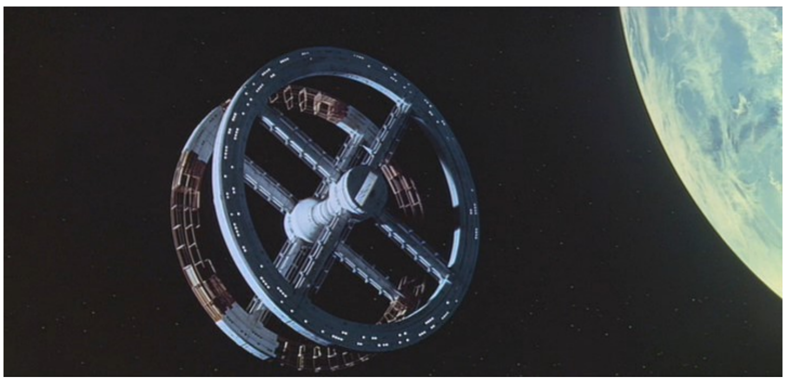
Egy 2 méter magas ejtőernyős a Földfelszín közelében – de elég messze ahhoz, hogy még ne kelljen kinyitnia az ejtőernyőjét – lábbal lefelé sugárirányban szabadon esik a Föld felé. A newtoni mechanika gondolatmenetével vezesse le, hogy ha az ejtőernyős fejmagasságban ill. a lábfeje magasságában elenged egy-egy ólomgolyót, akkor a két ólomgolyó $\Delta g_y \approx 6 \cdot 10^{-6}$ m/s^2 gyorsulással kezd távolodni egymástól. (A légellenállást elhanyagoljuk.)

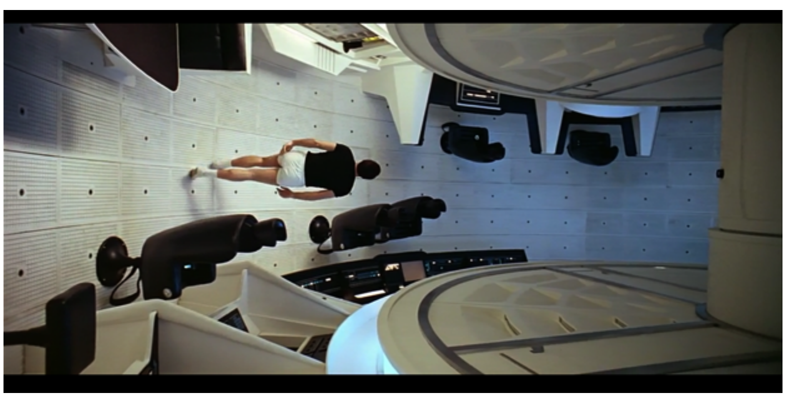
[Segítség: a feladat voltaképpen a http://fizipedia.bme.hu/images/0/02/Schwarz_PG_6-9.pdf előadás 10. diáján szereplő képlet levezetésében a hiányzó matematikai lépések pótlása.]

_6._

Mesterséges gravitáció forgással

A „2001 Űrodüsszeia (2001 Space Odyssey)“ c. film űrbázisának forgó mozgása mesterséges gravitációt hoz létre a a világűrben. Ez azt jelenti, hogy az űrbázishoz rögzített forgó vonakoztatási rendszerben az űrhajósok nem lebegnek szabadon, hanem a centrifugális erő miatt az űrbázis külső falához nyomódnak (ld. az alábbi képeket). Tegyük fel, hogy az űrbázis sugara 8m.





(a) Számolja ki a newtoni mechanika alapján, mekkora fordulatszámmal kell forognia az űrbázisnak, hogy az űrhajós a lábában a földi körülményeknek megfelelő g = 9.81m/s^2 „gravitációt“ érezze.

(b) Tegyük fel, hogy az űrhajós magassága 2m. Mekkora árapály-gyorsulást kell az űrhajósnak elviselnie a feje és a lábfeje között?

7.

A Nap által okozott téridő-görbület a Naptól milyen távolságban válik már elhanyagolhatóvá?

A Nap körüli téridő görbültségét a Schwarzschild-metrikában szereplő $(1–2M/r)$ függvény jellemzi, ahol M a Nap tömege, r pedig a Schwarzschild-r-koordináta (redukált kerület).
(a) Milyen messze kell lennünk a Naptól, hogy az $(1–2M/r)$ függvény értéke a 10. tizedesjegyben térjen csak el az 1-től?
(b) Mekkora az $(1–2M/r)$ függvény értéke a Naptól olyan távolságban, mint ahol a Föld elhelyezkedik?

(Segítség: http://fizipedia.bme.hu/images/5/58/03_Curving2.pdf fejezet, Sample Problem 2.)

<u>*8.*</u>

<u>Gömbhéjak távolsága</u>

Egy fekete lyuk tömege M = 5km. Két koncentrikus gömbhéjat építünk az eseményhorizonton kívül. A belső gömbhéj Schwarzschild-r-koordinátája (redukált kerülete) r_b, a külsőé $r_k = r_b + \Delta r$, ahol Δr = 1m. Tekintse az alábbi négy esetet:

(a) r_b = 50km
(b) r_b = 15km
(c) r_b = 10.1km
(d) r_b = 10.001km

[A] Becsülje meg a két gömbhéj méterrúd-távolságát mind a négy esetre, a http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/Schwarz_PG_1-2b.pdf 5. diáján szereplő összefüggéssel. Miért ad ez a képlet *csak becslést* a méterrúd-távolságra?

[B] Számítsa ki a két gömbhéj *pontos* méterrúd-távolságát mind a négy esetre. (Segítség: http://fizipedia.bme.hu/images/5/58/03_Curving2.pdf fejezet, Exercise 1.)

[C] Melyik esetben tért el a becslés a legnagyobb mértékben a pontos értéktől?

9.

Súroljuk a Napot

Két koncentrikus gömbhéjat építünk (képzeletben) a Nap köré. A belső héj közvetlenül a Nap felszíne felett van, Schwarzschild-r-koordinátája r_b = 695980km. A külső héj r-koordinátája r_k = 695981km.

(a) Mekkora a két gömbhéj főköreinek hossza?
(b) Mekkora a két gömbhéj közötti méterrúd távolság r-irányban?

(Segítség: http://fizipedia.bme.hu/images/5/58/03_Curving2.pdf, fejezet, Exercise 2, „Grazing our Sun“).

****10.***

Koncentrikus héjak építése

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/5/58/03_Curving2.pdf fejezet 3-35. oldalán szereplő 3. feladatot (Exercise 3, „Many shells?“).

11.

Fekete lyuk, amelynek az „átlagsűrűsége" megegyezik a földi atmoszféra sűrűségével

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/5/58/03_Curving2.pdf fejezet 3-36. oldalán szereplő 4. feladatot (Exercise 4, „A Dilute Black Hole").

12.

Eljuthatunk-e a fekete lyuk horizontjáig? (Zénó-paradoxon)

A fekete lyuk köré épített koncentrikus szomszédos gömbhéjak r-irányú méterrúd-távolságát a $d\sigma = \frac{1}{\sqrt{1-2M/r}}dr$ képletből számíthatjuk. A képlet szerint ahogy $r \to 2M$, $d\sigma \to \infty$, azaz az eseményhorizonthoz közeledve a szomszédos héjak közötti mérhető méterrúd-távolság a végtelenhez tart! Jelenti-e ez azt, hogy egy a fekete lyuk felé r-irányban szabadon eső űrhajós soha nem érheti el az eseményhorizontot (hiszen egyre nagyobb távolságokat kell megtennie)?

(Segítség: Olvassa el a http://fizipedia.bme.hu/images/5/58/03_Curving2.pdf fejezet 3-39. oldalán szereplő 7. feladat („Zeno's Paradox") problémafelvetését és a megadott megoldást. A vizsgafeladat a megoldás megértése, és letisztázott formában való leírása.)

13.

A „fekete lyuk eseményhorizontja“, newtoni számolással

Egy M tömegű, R sugarú, gömbszimmetrikus égitest felszínén a szökési sebesség (2. kozmikus sebesség) a newtoni mechanika alapján számítható. A relativitáselméletből tudjuk, hogy egy tömegpont sebessége nem érheti el a fénysebességet. Ha tehát a newtoni gondolatmenetben a szökési sebességet a fénysebesség értékére állítjuk be, akkor egy olyan gömbszimmetrikus égitestet kapunk, amelynek a felszínéről semmilyen felhajított kő nem tud a végtelenbe elszökni. Az ilyen hipotetikus gömbszimmetrikus égitest a fekete lyuk newtoni „előképe“.

(a) Mutassa meg, hogy az ilyen égitest sugarára az $R = 2M$ összefüggés adódik.

(b) Röviden tárgyalja, melyek az alapvető koncepcionális különbségek a newtoni gondolatmenettel tárgyalt fenti hipotetikus égitest és egy fekete lyuk között (amelynek az eseményhorizontját szintén az $R = 2M$ képlet írja le).

(Segítség: http://fizipedia.bme.hu/images/0/06/06_Diving2.pdf fejezet, Box 3.)

14.

Fénykúpdiagram Schwarzschild-koordinátákkal, az [r,t] téridőszeleten

(a) A http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/Schwarz_PG_1-2b.pdf előadás 9. diájának hiányzó matematikai lépéseit kipótolva vezesse le, hogy az [r,t] téridőszeleten a fénysugarak világvonalai a

$$t - t_A = \pm\left(r - r_A + 2M \cdot \ln\left| \frac{r/M - 2}{r_A/M - 2} \right| \right)$$

egyenletekkel írhatók le.

(b) Készítsen számítógépes programot, amely – a http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/Schwarz_PG_1-2b.pdf 10. diáján láthatóhoz hasonló módon – az alábbi r-értékeknél ábrázolja a fénykúpokat az [r,t] térképen:
r/M = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4.

15.

Fénykúpdiagram Schwarzschild-koordinátákkal, az [r,t] téridőszeleten: a nyilak iránya az eseményhorizonton belül

Válaszolja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/Schwarz_PG_1-2b.pdf 10. diáján szereplő [1] kérdést.

(Segítség: az előadáson elhangzottak, ill. a http://fizipedia.bme.hu/images/5/58/03_Curving2.pdf fejezet 3-25. oldalán levő Box 8.)

16.

Fénykúpdiagram Painlevé-Gullstrand-koordinátákkal, az [r,T] téridőszeleten

(a) A http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/Schwarz_PG_1-2b.pdf előadás 11-12. diáinak hiányzó matematikai lépéseit kipótolva vezesse le, hogy az $[r,T]$ téridőszeleten a befelé, ill. „kifelé“ haladó fénysugarak világvonalai a

$$T - T_A = (r_A - r) - 4M\left(\sqrt{\frac{r_A}{2M}} - \sqrt{\frac{r}{2M}}\right) + 4M \cdot \ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{r_A}{2M}}}{1+\sqrt{\frac{r}{2M}}}\right)$$

és

$$T - T_B = (r - r_B) + 4M\left(\sqrt{\frac{r}{2M}} - \sqrt{\frac{r_B}{2M}}\right) + 4M \cdot \ln\left(\frac{1-\sqrt{\frac{r}{2M}}}{1-\sqrt{\frac{r_B}{2M}}}\right)$$

egyenletekkel írhatók le.

(b) Készítsen számítógépes programot, amely – a http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/Schwarz_PG_1-2b.pdf 13. diáján láthatóhoz hasonló módon – az alábbi r-értékeknél ábrázolja a fénykúpokat az $[r,T]$ térképen:
r/M = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4.

****17.***

Látjuk-e eltűnni azt, ami az eseményhorizonton áthalad?

Tudjuk, hogy a fekete lyuk $r = 2M$ koordinátájú *eseményhorizontja* azzal a különleges tulajdonsággal bír, hogy ha valami áthalad rajta, akkor már nem tud a „külvilágnak“ (az $r > 2M$ tartománynak) jeleket leadni, ilyen értelemben eltűnik a külső szemlélő szeme elől.

Tegyük fel, hogy egy utazó lábbal lefelé szabadon esik r-irányban egy fekete lyuk felé. A lába *előbb* halad át az eseményhorizonton, mint a feje. Jelenti-e ez azt, hogy az utazó egy rövid ideig (amikor a lába már áthaladt a horizonton, de a szeme még nem) *nem látja a saját lábát*? Tudja-e az utazó ilyen módon „detektálni“, hogy mikor haladt át az eseményhorizonton?

[Megjegyzés: ez lényegében a http://fizipedia.bme.hu/images/5/51/07_InsideBH2.pdf fejezet 7-37. oldalán szereplő 1. feladat (Exercise 1, „Crossing the Event Horizon“).]

A fejezet 5-6. ábráihoz hasonló $[r,T]$ térképen vázlatosan ábrázolja
(a) az utazó lábának világvonalát,
(b) az utazó szemének világvonalát,
(c) az utazó lábából a szeme felé kiinduló fényimpulzusok világvonalát.

A felrajzolt $[r,T]$ ábra alapján mutassa meg, hogy az utazó *mindvégig látja a saját lábát*, tehát *nem* tudja ilyen módon detektálni azt, hogy mikor haladt át az eseményhorizonton.

18.

Az energia, mint mozgásállandó, Schwarzschild-koordinátákkal

Levezettük (ld. http://fizipedia.bme.hu/images/0/03/Schwarz_PG_3.pdf), hogy egy szabad kő energiája, mint mozgásállandó, Painlevé-Gullstrand-koordinátákkal az alábbi képlettel írható fel:

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dT}{d\tau} - \sqrt{\frac{2M}{r}}\frac{dr}{d\tau} = konst.$$

Az órán szereplő levezetéshez teljesen hasonló gondolatmenetet alkalmazva mutassa meg, hogy a szabad kő energiája *Schwarzschild-koordinátákkal* az alábbi alakban írható:

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = konst.$$

(Segítség: http://fizipedia.bme.hu/images/0/06/06_Diving2.pdf fejezet.)

19.

A energia képlete newtoni határesetben

A szabad kő energiája Schwarzschild-koordinátákkal az alábbi alakban írható:

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}.$$

(a) Mutassa meg, hogy newtoni határesetben [(1) *gyenge* gravitációs tér ($r >> 2M$), és (2) a helyi gömbhéjhoz képest *lassan* mozgó kő ($v << 1$)] a fenti képlet a

$$\frac{E}{m} = m + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Mm}{r}$$

kifejezésre redukálódik.

(b) Értelmezze a newtoni kifejezés jobb oldalán szereplő különböző tagok fizikai jelentését.

(Segítség: http://fizipedia.bme.hu/images/0/06/06_Diving2.pdf fejezet, Box 2.)

****20.***

Fejesugrás egy fekete lyukba, végtelen távolról

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/0/06/06_Diving2.pdf fejezet 6-24. oldalán szereplő 1. feladatot (Exercise 1, „Diving from Rest Far Away").

21.

A végtelen távolból szabadon eső kő dr/dt „térkép-sebességének“ maximuma

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/0/06/06_Diving2.pdf fejezet 6-24. oldalán szereplő 2. feladatot (Exercise 2, „Maximum Raindrop $|dr/dt|$“).

****22.***

Egy gömbhéjról egy kő beleesik a fekete lyukba

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/0/06/06_Diving2.pdf fejezet 6-25. oldalán szereplő 4. feladatot (Exercise 4, „A Stone Glued to the Shell Breaks Loose“).

****23.***

Egy r_0-koordinátájú gömbhéjról nyugalomból elengedett kő

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/0/06/06_Diving2.pdf fejezet 6-26. oldalán szereplő 6. feladatot (Exercise 6, „Release a stone from rest“).

Mutassa meg, hogy a feladat [A] és [B] részének megoldása:

[A] $$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{-1/2} \cdot \left(1-\frac{2M}{r}\right) \cdot \left(\frac{2M}{r}-\frac{2M}{r_0}\right)^{1/2}$$

[B] $$v_{shell} = \frac{dr_{shell}}{dt_{shell}} = -\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{2M}{r}-\frac{2M}{r_0}\right)^{1/2}.$$

A feladat [B] pontjában kapott képlet alapján mutassa meg, hogy egy olyan megfigyelő mérése szerint, aki közvetlenül az eseményhorizonton kívül áll egy gömbhéjon ($r \to 2M$), a befelé eső kő sebessége a *fénysebességhez* tart, *függetlenül attól, hogy a kő milyen r_0 koordinátájú héjról indult*.

24.

A fekete lyuk felé a végtelenből v_{far} kezdősebességgel elhajított kő

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/0/06/06_Diving2.pdf fejezet 6-27. oldalán szereplő 7. feladatot (Exercise 7, „Hurl a stone inward from far away").

Mutassa meg, hogy a feladat [A] és [B] részének megoldása:

[A] $$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\gamma_{far}^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right)^{1/2},$$

ahol $\gamma_{far} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-v_{far}^2}}$,

[B] $$v_{shell} = \frac{dr_{shell}}{dt_{shell}} = -\left(1-\frac{1}{\gamma_{far}^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right)^{1/2}.$$

A feladat [B] pontjában kapott képlet alapján mutassa meg, hogy egy olyan megfigyelő mérése szerint, aki közvetlenül az eseményhorizonton kívül áll egy gömbhéjon ($r \to 2M$), a befelé eső kő v_{shell} sebessége a *fénysebességhez* tart, *függetlenül attól, hogy a kő mekkora v_{far} sebességgel indult a végtelen távoli pontból*.

25.

Az energia, mint mozgásállandó, Painlevé-Gullstrand-koordinátákkal

Az órán megbeszélt gondolatmenetet követve (ld. http://fizipedia.bme.hu/images/0/03/Schwarz_PG_3.pdf) és a matematikai lépéseket részletesen leírva vezesse le, hogy egy szabad kő energiáját az alábbi képlet adja meg Painlevé-Gullstrand-koordinátákban:

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dT}{d\tau} - \sqrt{\frac{2M}{r}}\frac{dr}{d\tau} = konst\,.$$

26.

Az impulzusmomentum, mint mozgásállandó, Painlevé-Gullstrand-koordinátákkal

Az órán megbeszélt gondolatmenetet követve (ld. http://fizipedia.bme.hu/images/0/03/Schwarz_PG_3.pdf) és a matematikai lépéseket részletesen leírva vezesse le, hogy egy szabad kő impulzusmomentumát az alábbi képlet adja meg Painlevé-Gullstrand-koordinátákban:

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = konst.$$

****27.***

Az impulzusmomentum, mint mozgásállandó, Schwarzschild-koordinátákkal

Levezettük (ld. http://fizipedia.bme.hu/images/0/03/Schwarz_PG_3.pdf), hogy egy szabad kő impulzusmomentuma, mint mozgásállandó, Painlevé-Gullstrand-koordinátákkal az alábbi képlettel írható fel:

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = konst.$$

Az órán szereplő levezetéshez teljesen hasonló gondolatmenetet alkalmazva mutassa meg, hogy a szabad kő energiája *Schwarzschild-koordinátákkal* szintén a fenti alakban írható.

28.

Szabad kő röppályája Schwarzschild-, ill. Painlevé-Gullstrand-térképen; effektív potenciál

(a) A előadás 1. és 2. diáinak hiányzó algebrai lépéseit kipótolva vezesse le, hogy egy fekete lyuk körül szabadon mozgó kő világvonalára teljesül az alábbi egyenlet:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{L^2}{m^2 r^2}\right) = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[\frac{V_L(r)}{m}\right]^2$$

(b) Írjon számítógépes programot, amely ábrázolja a $V_L(r)/m$ effektív potenciált az r függvényében, adott L/m mellett. Ábrázolja az effektív potenciál függvényt az alábbi impulzusmomentum-értékekre:

$L/m = 3M, 4M, 5M.$

****29.***

A Merkúr perihélium-precessziója; a ki-be oszcillálás körfrekvenciája

(a) Vezesse le, hogy a Nap körül keringő bolygók mozgásának ki-be oszcillálási körfrekvenciájára az alábbi képlet írható:

$$\omega_r^2 = \frac{M\left(r_0 - 6M\right)}{r_0^3\left(r_0 - 3M\right)},$$

ahol M a Nap tömege, r_0 pedig a bolygó átlagos távolsága a Naptól.

(b) Vezesse le, hogy a newtoni mechanikában a ki-be oszcillálási körfrekvenciára a fenti képlet helyett a (kevésbé pontos)

$$\omega_{rN}^2 = \frac{M}{r_0^3}$$

összefüggés adódik.

[A feladat voltaképpen a http://fizipedia.bme.hu/images/6/64/Schwarz_PG_4-5c.pdf előadás 9. diáján a hiányzó matematikai lépések pótlása.]

(Segítség: http://fizipedia.bme.hu/images/b/b7/10_Mercury2.pdf.)

****30.***

A Merkúr perihélium-precessziója; a körüljárás átlagos szögsebessége

(a) Vezesse le, hogy a Nap körül keringő bolygókra a keringés átlagos szögsebessége az alábbi képlettel fejezhető ki:

$$\overline{\omega}_{\varphi}^{2} = \frac{Mr_0}{r_0^3\left(r_0 - 3M\right)},$$

ahol M a Nap tömege, r_0 pedig a bolygó átlagos távolsága a Naptól.

(b) Vezesse le, hogy a newtoni mechanikában a keringés átlagos szögsebességére a fenti képlet helyett a (kevésbé pontos)

$$\overline{\omega}_{\varphi N}^{2} = \frac{M}{r_0^3}$$

összefüggés adódik.

[A feladat voltaképpen a http://fizipedia.bme.hu/images/6/64/Schwarz_PG_4-5c.pdf előadás 10. diáján a hiányzó matematikai lépések pótlása.]

(Segítség: http://fizipedia.bme.hu/images/b/b7/10_Mercury2.pdf.)

31.

Gömbszimmetrikus égitest körül szabadon mozgó kő röppályája a newtoni és az einsteini elmélet szerint

A http://fizipedia.bme.hu/images/6/64/Schwarz_PG_4-5c.pdf előadás 2-6. diái alapján hasonlítsa össze a gömbszimmetrikus M tömegű test körül szabadon mozgó kő röppályájának newtoni és einsteini leírását:

(a) Vázolja fel, hogyan néz ki a kő röppályája különböző E/m energiaértékek mellett a relativisztikus számolás szerint. [A 3. dián szereplő relativisztikus effektív potenciál-diagramon látható 4 esetre rajzolja fel vázlatosan a pálya alakját az (r,φ) síkon.]

(b) Ábrázolja az ugyanehhez az L/m értékhez tartozó *newtoni* effektív potenciál-görbét (segítség: a 6. dia ábrája), és vázlatosan rajzolja fel, milyen alakú röppályái lehetnek a kőnek az (r,φ) síkon a newtoni elmélet szerint.

32.

Stabil és instabil körpályák r-koordinátája

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/08_CircleOrbits2.pdf fejezet 8-13. oldalán található 4. feladatot (Query 4).

<u>*33.</u>

<u>A legbelső stabil körpálya r-koordinátája</u>

Mutassa meg, hogy ha egy fekete lyuk körül körpályán kering egy kő, akkor a stabil körpálya r-koordinátája legalább $r_{ISCO} = 6M$. Ezt a pályát „legbelső stabil körpályának" (Innermost Stable Circular Orbit = ISCO) nevezzük.

(Segítség: http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/08_CircleOrbits2.pdf fejezet.)

****34.***

Körpályán keringő kő sebessége a gömbhéjon álló megfigyelő szerint; a legkisebb (instabil) körpálya r-koordinátája

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/08_CircleOrbits2.pdf fejezet 8-14. oldalán található 5. feladatot (Query 5).

****35.***

Körpályán keringő kő energiája

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/08_CircleOrbits2.pdf fejezet 8-15, 8-16. oldalán található 6. feladatot (Query 6).

Számítógéppel ábrázolja az

$$\frac{E}{m} = \frac{r-2M}{r^{1/2}(r-3M)^{1/2}}$$

függvényt az $r = 3M...10M$ tartományban.

****36.***

A kvazárok egyszerűsített modellje

Olvassa el a http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/08_CircleOrbits2.pdf fejezet „8.6. TOY MODEL OF A QUASAR“ című alfejezetét, és oldja meg a Query 11, Query 12, Query 13 jelzésű feladatokat.

37.

Egy gömbszimmetrikus M tömegű égitest körül körpályán keringő kő newtoni számítással kapott r_{Newt} körpályasugara mennyire jól közelíti a körpálya tényleges r-koordinátáját?

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/e/e2/08_CircleOrbits2.pdf fejezet végén levő 2. feladatot (8-21. oldal, Exercise 2).

38.

A Merkúr pályája Newton szerint

Mutassa meg, hogy a newtoni mechanika szerint a Nap körül keringő Merkúr ω_{rN} ki-be oszcillálási frekvenciája megegyezik a keringés $\overline{\omega}_{\varphi N}$ átlagos szögsebességével. Milyen röppályája van a Merkúrnak a newtoni mechanika szerint?

(Segítség: a http://fizipedia.bme.hu/images/b/b7/10_Mercury2.pdf fejezet „10.3. NEWTON'S ORBIT ANALYSIS" című alfejezete.)

39.

Öregedés a Nemzetközi Űrállomáson

A Nemzetközi Űrállomás kb. 350km magasságban kering a Föld körül (azaz a pályájának a sugara 6730km). Keringési sebessége 7707m/s. Mennyivel lesz fiatalabb (vagy idősebb) Földön maradt ikertestvérénél az az űrhajós, aki 1 évet a Nemzetközi Űrállomáson töltött?

(Segítség: Nézze át a GPS-ről tanultakat, ill. a http://fizipedia.bme.hu/images/c/c4/04_GPS2.pdf fejezetet, amelynek 4-11. oldalán szerepel a fenti feladat.)

****40.***

Szabadon eső űrhajós spagettizálódása és az utazás fájdalmas szakaszának $t_{aú}$ időtartama, Newton szerint

Oldja meg a http://fizipedia.bme.hu/images/5/58/03_Curving2.pdf fejezet 3-37. oldalán szereplő 5. feladatot (Exercise 5, „Astronaut Stretching According to Newton“).

41.

A végtelen távoli pontból nyugalomból induló, szabadon eső kő öregedése az r_f és r_a koordinátájú gömbhéjak között

(a) Vezesse le, hogy egy végtelen távolról, nyugalomból induló, szabadon eső kő öregedése két gömbhéj között az alábbi képlettel írható le:

$$\tau_{\left[r_f \to r_a\right]} = \frac{4M}{3}\left[\left(\frac{r_f}{2M}\right)^{3/2} - \left(\frac{r_a}{2M}\right)^{3/2}\right].$$

(b) Mekkora a kő öregedése az eseményhorizont és a szingularitás között? (Mennyi karóra-ideig létezik a kő a fekete lyuk eseményhorizontján belül?)

(c) Hányszor kisebb a (b) pontban kiszámolt élettartama a horizonton belüli maximális életbenmaradási időnél? (Ez utóbbit a http://fizipedia.bme.hu/images/0/02/Schwarz_PG_6-9.pdf előadáson vezettük le.)

(Segítség: http://fizipedia.bme.hu/images/5/51/07_InsideBH2.pdf fejezet, 7-5. oldal, Query 1.)

****42.***

A maximális életbenmaradási idő a fekete lyuk eseményhorizontján belül

(a) Vezesse le, hogy egy fekete lyuk eseményhorizontján áthaladva legfeljebb $\tau_{\max} = \pi M$ ideig tud az utazó életben maradni.

[A feladat két részből áll: egyrészt a http://fizipedia.bme.hu/images/0/02/Schwarz_PG_6-9.pdf előadás 6-8. diáit kell pontosan megérteni és összefoglalva leírni, másrészt a 8. dia tetején szereplő integrált végig kell számolni. Az integrál kiszámításához segítő ötlet: térjen át az r-változóról az α változóra az alábbi helyettesítéssel: $(r/2M)^{1/2} = \sin\alpha$.]

(b) Hányszorosa legyen a fekete lyuk tömege a Nap tömegének, ha azt akarjuk, hogy a horizonton belüli maximális életbenmaradási idő 20 év legyen?

<u>43.</u>

<u>Mekkora legyen a fekete lyuk tömege, ha azt akarjuk, hogy a fejesugrás csak az eseményhorizonton belül kezdjen fájni?</u>

Egy 2 méter magas űrhajós *r*-irányban lábbal előre szabadon esik egy fekete lyuk felé. Vezesse le, hogy a fekete lyuk tömegének legalább a Naptömeg ~$3.2 \cdot 10^4$-szeresének kell lennie, ha azt akarjuk, hogy az űrhajósnak a spagettizálódás csak az eseményhorizonton belül kezdjen fájni. (A fájdalomküszöböt – önkényesen – attól a ponttól számítjuk, amikor a lábfej és a fej közötti árapály-gyorsulás eléri a 2*g* értéket.)

[ld. a http://fizipedia.bme.hu/images/0/02/Schwarz_PG_6-9.pdf előadás 13-14. diáit.]

****44.***

Mennyi ideig tart a fekete lyuk felé esés fájdalmas szakasza olyan utazó esetén, aki közvetlenül az eseményhorizonton kívülről indul?

Vezesse le a http://fizipedia.bme.hu/images/0/02/Schwarz_PG_6-9.pdf előadás 14. diájának alján szereplő számértékeket $\tau_{aú}$-ra. [A számoláshoz vagy analitikusan, vagy numerikusan oldja meg a

$$\tau_{aú} = \tau[r_{aú} \to 0] = \int_0^{r_{aú}} \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1/2} dr$$

integrált. Az analitikus integrálhoz segítő ötlet: térjen át az r-változóról az α változóra az alábbi helyettesítéssel: $(r/2M)^{1/2} = \sin\alpha$.]

45.

Mennyi ideig tart a fekete lyuk felé esés fájdalmas szakasza olyan utazó esetén, aki a fekete lyuktól nagy távolságról indul?

Írja le letisztázva a http://fizipedia.bme.hu/images/0/02/Schwarz_PG_6-9.pdf előadás 15. diáján szereplő gondolatmenetet, és a hiányzó algebrai lépést pótolva vezesse le, hogy a fekete lyuktól nagy távolságból induló, szabadon eső űrhajós számára az utazás fájdalmas szakasza $\tau_{aú}$~0.21s-ig tart, függetlenül a fekete lyuk tömegétől.