Bevezetés a modern fizika fejezeteibe

2. (c)

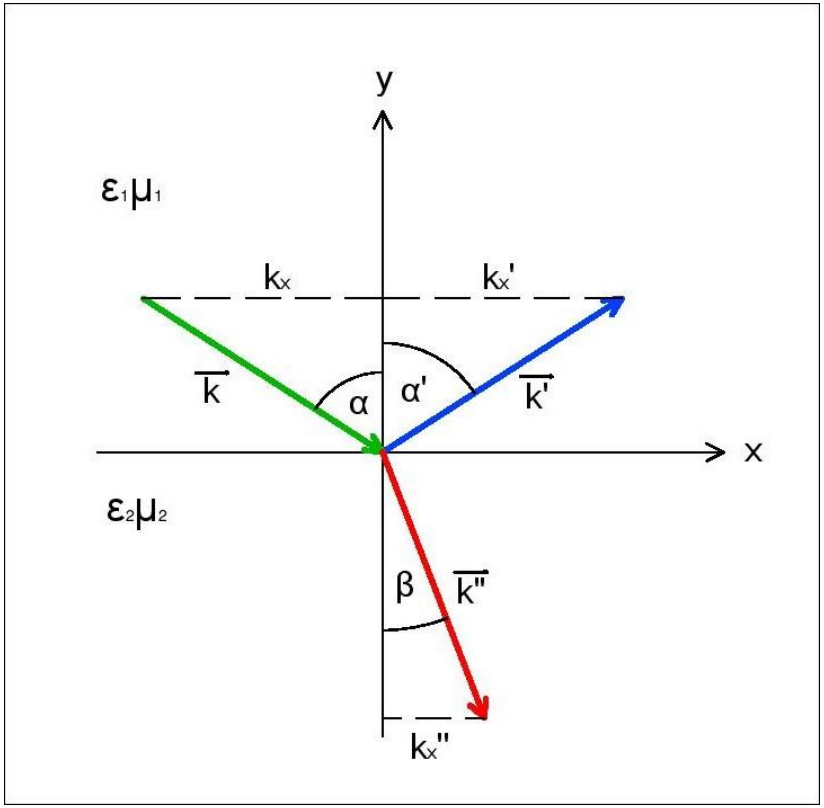
Elektromágneses hullámok - Hullámoptika

Utolsó módosítás: 2015. január 17.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei (1)

Kérdés: Mi történik két közeg határán a fénnyel? A fény az (x,y) beesési síkban érkezzen az ε_1 és μ_1 paraméterekkel jellemzett közegből α beesési szöggel az ε_2 és μ_2 paraméterekkel jellemzett közegbe. A törés-visszaverődés az y=0 síkban van. A beeső, visszaverődő és megtört nyalábok iránya rendre: ***k***, ***k'*** és ***k"***. A visszaverődés szöge legyen α', a megtört nyalábhoz tartozó szög β.



Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei (2)

Az elektromos térerősség vektorok a beeső, visszaverődő és megtört nyalábokra legyenek:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t)}$$

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'_0 e^{i(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r} - \omega' t)}$$

$$\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}''_0 e^{i(\boldsymbol{k}''\boldsymbol{r} - \omega'' t)}$$

Feltételezve, hogy a körfrekvenciák és a hullámszámok is megvál-tozhatnak.

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei (3)

A közeg határán az elektromos térerősség vektor tangenciális komponense megy át folytonosan, tehát

$$\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{t} e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)} + \boldsymbol{E}_0' \boldsymbol{t} e^{i(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}-\omega' t)} = \boldsymbol{E}_0'' \boldsymbol{t} e^{i(\boldsymbol{k}''\boldsymbol{r}-\omega'' t)}$$

Itt $\boldsymbol{t}$ a tangenciális egységvektor. Ez az összefüggés a tetszőleges időpillanatra csak akkor állhat fenn, ha teljesül:

$$\omega = \omega' = \omega''$$

Mind a visszavert, mind a megtört nyaláb körfrekvenciája (színe) megegyezik a beeső nyalábéval!

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei (4)

Az előző összefüggésnek teljesülnie kell a felület tetszőleges pontjában, tehát

$$\boldsymbol{kr} = \boldsymbol{k'r} = \boldsymbol{k''r}$$

Figyelembe véve, hogy a törés-visszaverődés az y=0 síkban van:

$$k_x = k'_x = k''_x \qquad k_z = k'_z = k''_z$$

Mivel a beeső hullámban k_z=0 ezért $k'_z = k''_z = 0$

Azaz a beeső, visszavert és megtört nyalábok egyaránt az (x,y) beesési síkban vannak.

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei (5)

Másrészt, a cirkuláris hullámszámok nagysága mindhárom esetre kifejezhető a közegek anyagi paraméterei segítségével:

$$k = \frac{\omega}{c_1} = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \qquad k' = \frac{\omega}{c_1} = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \qquad k'' = \frac{\omega}{c_2} = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$$

A beesési szöget α-val, a visszaverődés szögét α'-vel valamint a törés szögét β-val jelölve írhatjuk:

$$\sin\alpha = \frac{k_x}{k} \qquad \sin\alpha' = \frac{k'_x}{k'} \qquad \sin\beta = \frac{k''_x}{k''}$$

A fenti összefüggéseket figyelembe véve:

$$\alpha = \alpha'$$

A geometriai optikából jól ismert Snellius-Descartes-törvény:

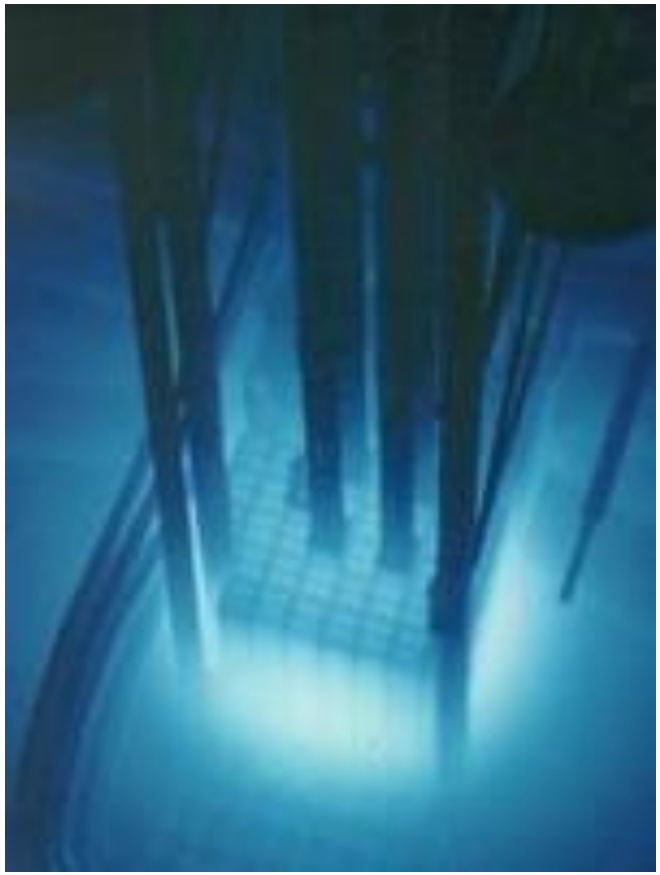
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}$$

Közbevetett kérdés: Hol lehet a fénynél gyorsabban haladni?

Jelenlegi ismereteink szerint szabad részecskék a fény vákuumbeli sebességénél gyorsabban nem mozoghatnak. Ugyanakkor a közegben a fény sebessége a

$$c = \frac{c_0}{n}$$

összefüggésnek megfelelően csökken. A magreaktorokban keletkező relativisztikus elektronok sebessége megközelíti a fény sebességét, azaz gyorsabban haladnak a közegben, mint a fény. (A jelenség ahhoz hasonló, mint amikor a mozgó test átlépi a hangsebességet – lökés(fej-)hullám keletkezik.) A jelenséget (kék színű) fotonok keletkezése kíséri és Cserenkov-sugárzásnak nevezik.



Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei (5)

A vákuumra vonatkoztatott törésmutató értéke:

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Figyelembe véve, hogy $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ és $\mu = \mu_0\mu_r$

valamint azt, hogy szigetelőkre $\mu_r \approx 1$

a törésmutató értéke $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

Víz esetén $\varepsilon_r = 81$, a mért törésmutató: $n = 1{,}5$

Mi lehet az eltérés oka?

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei (6)

A geometriai optikával ellentétben a hullámoptikában a visszavert és megtört nyalábok intenzitásviszonyai meghatározhatók!

Az elektromos térerősség tangenciális és normális komponenseire érvényesek:

$$E_x + E'_x = E''_x$$

$$E_z + E'_z = E''_z$$

$$\varepsilon_1(E_y + E'_y) = \varepsilon_2 E''_y$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei (7)

Az mágneses térerősség tangenciális és normális komponenseire érvényesek:

$$H_x + H'_x = H''_x$$

$$H_z + H'_z = H''_z$$

$$\mu_1(H_y + H'_y) = \mu_2 H''_y$$

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei (8)

Felhasználva az ***E***, ***H*** és ***k*** közötti kapcsolatokat

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \mu \boldsymbol{H}$$

A matematikai műveletek végrehajtásához a térerősség komponensek mellett meg kell adjuk a cirkuláris hullámszám vektorok komponenseit.

$$\boldsymbol{k} = k(\sin\alpha, -\cos\alpha, 0) \qquad \boldsymbol{k}' = k(\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$

$$\boldsymbol{k}'' = k\, n_{21}(\sin\beta, -\cos\beta, 0)$$

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei (9)

A vektorszorzatok kiszámolásával belátható, hogy az előző oldalon álló két Maxwell-egyenlet a térerősség vektorok komponenseit tekintve két független egyenletrendszerre esik szét. Azaz eszerint az egyik csak az E_x, E_y és H_z komponenseket, míg a másik csak a H_x, H_y és E_z komponenseket tartalmazza. Ennek igazolása – a gyakorlás okán – *házi feladat*!

Transzverzális mágneses módusról beszélünk, ha az (E_x, E_y, H_z) hármast tekintjük – a H_x, H_y és E_z nem zérus mellett is.

Transzverzális elektromos módusról beszélünk, ha a (H_x, H_y, E_z) hármast tekintjük – az E_x, E_y és H_z nem zérus mellett is.

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei – Brewster-törvénye (10)

Brewster-törvénye: létezik egy olyan beesési szög, amely esetén a transzverzális mágneses módus a visszavert hullámban hiányzik, azaz a visszavert hullám síkban polarizált. Ekkor a megtört és visszavert sugár egymásra merőleges.

A törvény leszármaztatásához a korábban levezetett összefüggések:

$$E_x + E'_x = E''_x \qquad H_z + H'_z = H''_z$$

$$E_x = \frac{1}{\omega\varepsilon_1} k\, H_z \cos\alpha \qquad E'_x = -\frac{1}{\omega\varepsilon_1} k\, H'_z \cos\alpha$$

$$E''_x = \frac{1}{\omega\varepsilon_2} k\, n_{21} H''_z \cos\beta$$

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei – Brewster-törvénye (11)

Az első egyenletbe történő behelyettesítés után:

$$H_z - H_z' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_{21} \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} H_z''$$

Ekkor az

$$n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

felhasználásával ($\mu_1=\mu_2\approx1$) :

$$H_z - H_z' = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} H_z''$$

Idemásolva az előző oldalról, hogy

$$H_z + H_z' = H_z''$$

H_z' kifejezhető →

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei – Brewster-törvénye (12)

A visszavert hullám mágneses térerősségének z komponense:

$$H_z' = \frac{1 - \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}}{1 + \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}} H_z$$

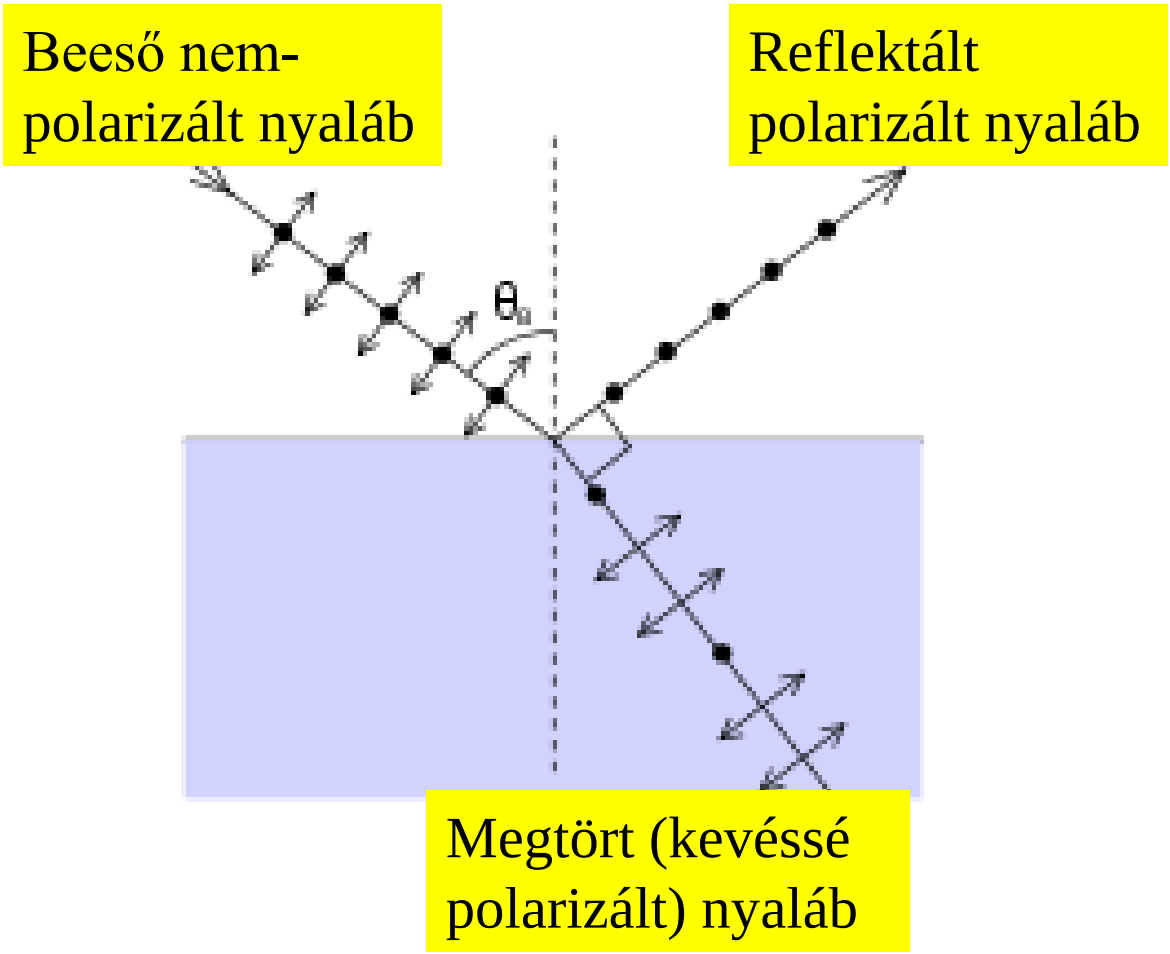
Ez akkor tűnik el, ha a számláló zérus, azaz $1 = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$

Két esetben teljesül: $\alpha = \beta$ Ekkor nincs törés. (érdektelen)

$2\beta = \pi - 2\alpha$ Vagyis $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei – Brewster-törvénye (13)



Közbevetett érdekesség: Rovarok tájékozódása a polarizált fényben

Több mint 300 rovarfajról mutatták ki, hogy tájékozódásukban a poláros fény az elsődleges iránytűjük. A poláros fényt a vízi rovarok egy része érzékeli, a vízfelületekről visszaverődő vízszintesen poláros fény segítségével találják meg a vizeket. Persze poláros fényt verhetnek vissza az aszfalt utak, sötét színű gépkocsik, ablakok és egyéb sötét üvegfelületek, fekete műanyag fóliák. – Ezek akár ökológia csapdákká is válhatnak.

megtévedt rovarok –tömegtegzes rajzás

megtévedt gólya

Forrás: http://www.origo.hu/tudomany/elovilag/20090123-halalos-okologiai-csapdak-a-polarizalt-feny-miatt.html

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei – A teljes visszaverődés (14)

A Snellius-Descartes törési törvény $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21}$$

Szerint, ha a $n_{21} > 1$

akkor mindig van megtört fénysugár.
A geometriai optika szerint, ha $n_{21} < 1$
akkor van olyan beesési szög, amelynél nagyobb szögeknél már nincs megtört sugár – teljes visszaverődés van.

Mit állít a jelenséggel kapcsolatban a hullámoptika?

Az elektromágneses hullámok visszaverődési és törési törvényei – A teljes visszaverődés (15)

Korábbról emlékszünk, hogy

$$k'' = k\, n_{21}$$

$$k_x = k'_x = k''_x$$

$$k_z = k'_z = k''_z = 0$$

$$k''_x = k \sin\alpha$$

A megtört nyaláb hullámszámának *y* komponensét kifejezve:

$$k''^2_y = k''^2 - k''^2_x = k^2 n_{21}^2 - k^2 \sin^2\alpha$$
$$= k^2 (n_{21}^2 - \sin^2\alpha) < 0$$

A gyökvonást elvégezve egy komplex érték adódik

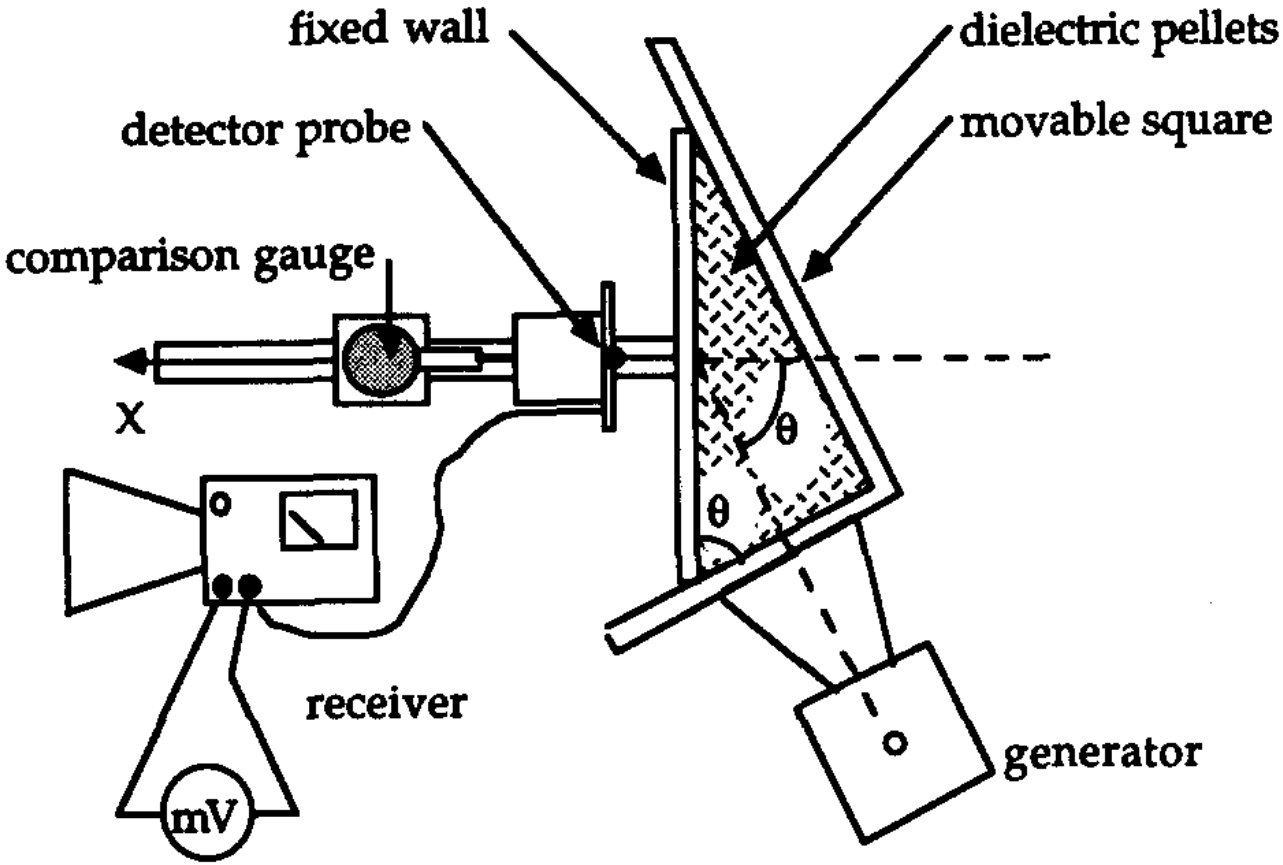
$$k''_y = ia$$

A térerősségek kifejezésében ez egy

$$e^{ik''_y y} = e^{-ay}$$

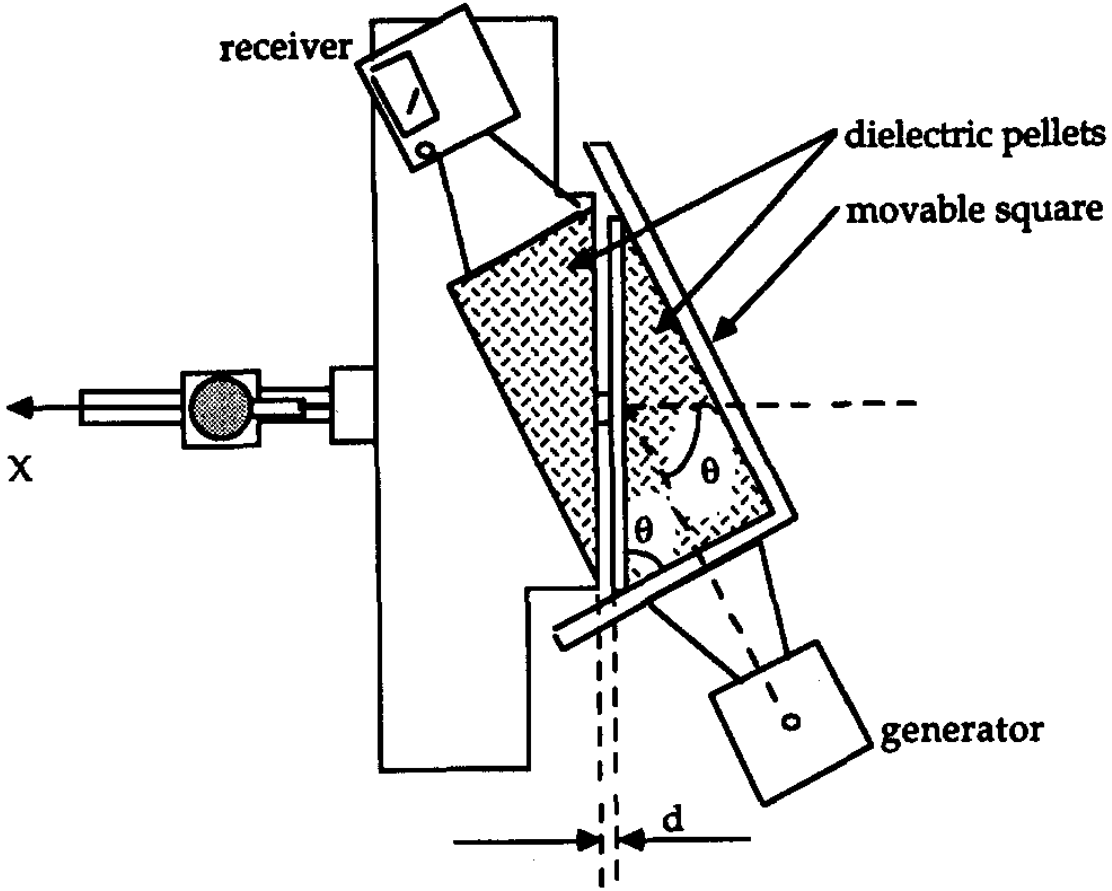
a behatolás mélységgel exponenciálisan csökkenő faktort jelent!

Mikrohullámok törése és „alagutazása” (1)



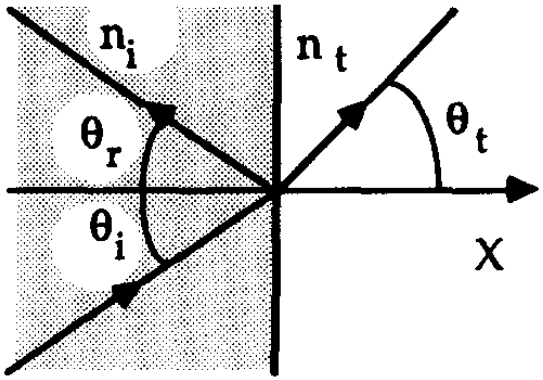
F. Albiol, S. Navas, M. V. Andres, Am. J. Phys. **61**, 165 (1993).

Mikrohullámok törése és „alagutazása” (2)

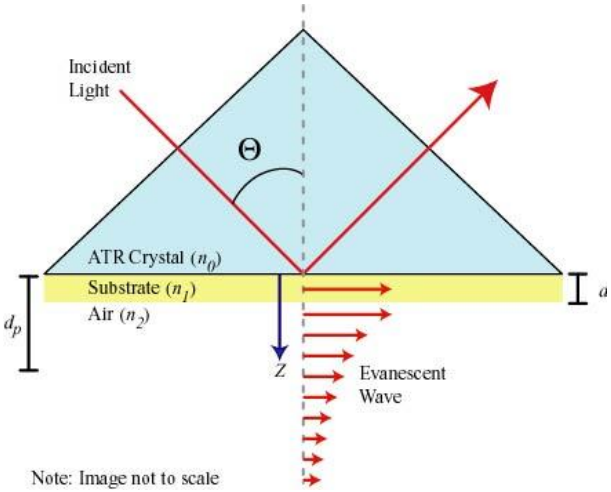


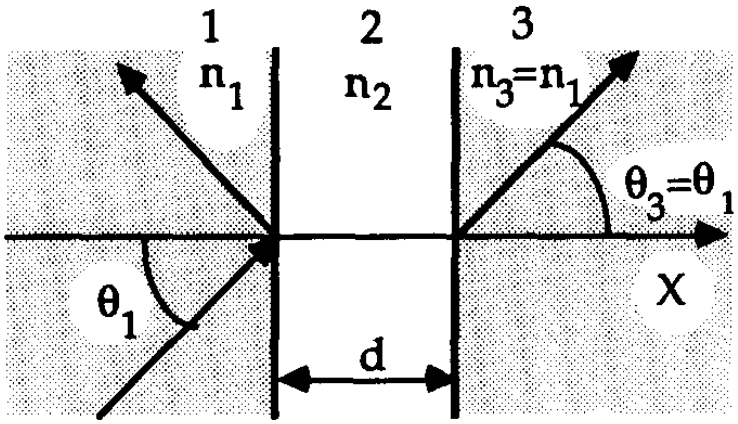
F. Albiol, S. Navas, M. V. Andres, Am. J. Phys. **61**, 165 (1993).

Mikrohullámok törése és „alagutazása” (3)

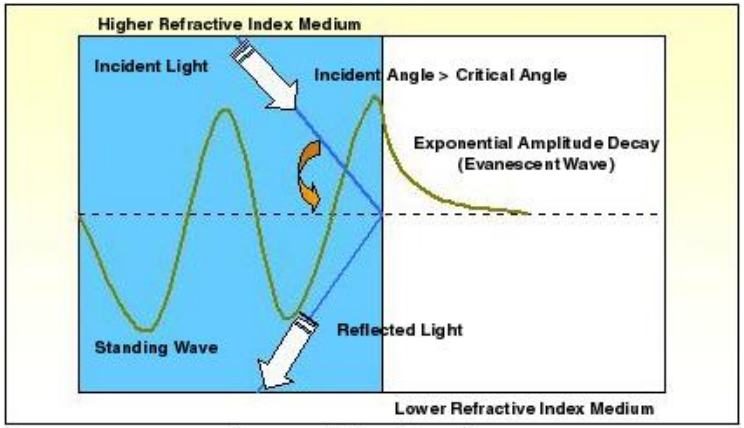


(a)





F. Albiol, S. Navas, M. V. Andres, Am. J. Phys. **61**, 165 (1993).



Evanescent Wave Generation

Interferencia (1)

Mi történik két elektromágneses hullám találkozásakor?

Az elektromágneses tér energiamérleg egyenlete (2.a fejezet 6. oldal):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) + div\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{j}\boldsymbol{E}$$

Az energiaáram-sűrűség (Poynting-) vektor (2.a fejezet 7. oldal):

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

Interferencia (2)

A (2) Maxwell-egyenletből (2.a fejezet 18. oldal):

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu c}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}$$

A Poynting-vektorba történő behelyettesítéssel:

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\mu c}\boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}) = \frac{1}{\mu c}\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{n}$$

Azaz az *I* intenzitás – amely egy < > által jelölt időátlag – a térerősség négyzetével arányos:

$$I \sim \langle \boldsymbol{E}^2 \rangle$$

Interferencia (3)

Két hullám találkozásakor a térerősségek összeadódnak

$$E = E_1 + E_2$$

Az eredő nyaláb intenzitása

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2$$

Az interferencia tag:

$$2E_1E_2$$

Interferencia – az interferencia feltételei (4)

a, Ha $\boldsymbol{E}_1$ és $\boldsymbol{E}_2$ egymásra merőlegesek, akkor nincs interferencia, mert ekkor

$$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2 = 0$$

Az interferencia első feltétele, hogy a térerősség vektorok ne legyenek egymásra merőlegesek.

b, Ha $E_1 = E_{10} \cos \omega_1 t$ és $E_2 = E_{20} \cos(\omega_2 t + \delta)$ egymással párhuzamosan polarizált hullám. Az interferencia tag intenzitásához tartozó

$$I_{int} \sim \int_0^t \cos \omega_1 t \ \cos(\omega_2 t + \delta)\, dt$$

kifejezés akkor nem zérus, ha $\omega_1 = \omega_2$. Az interferencia második feltétele, hogy a két hullám frekvenciája egyezzen meg. →

Interferencia – az interferencia feltételei (5)

Ez előző állítás belátása: az intenzitás kifejezése átírható két tag integráljává

$$I_{int} \sim \int_0^t \cos \omega_1 t \;\; \cos(\omega_2 t + \delta)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \{\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \delta] + \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \delta]\}\, dt$$

Az első tag hosszú időre vett integrálja zérus. A második tag időbeli átlaga akkor nem zérus, ha $\omega_1 = \omega_2$.

Interferencia – az interferencia feltételei (6)

Továbbá:

Ha $\delta = 0, 2\pi, \ldots, 2n\pi$, ahol n egész szám, akkor erősítés van.

Ha $\delta = \pi, 3\pi, \ldots, (2n+1)\pi$, ahol n egész szám, akkor gyengítés van. Ha a két hullám azonos intenzitású, akkor teljes kioltás jön létre.

Összegzés: Ahogy már a mechanikai hullámoknál is említettük, itt is a koherens – állandó fáziskülönbségű – hullámok képesek interferenciára.

c, Az interferencia harmadik feltétele a koherencia hosszal kapcsolatos. (Ez annak a feltétele, hogy a hullámok egyáltalán találkozzanak.)

A hullámok elhajlásának jelensége (1)

Az elemi legerjesztődésből kiinduló harmonikus fényhullám a homogén és izotróp térben egy gömbhullám terjedésével írható le

$$\psi(r,t) = A\frac{1}{r}e^{i(kr-\omega t)}$$

Mivel azonos frekvenciájú hullámok vizsgálatára érdemes szorítkoznunk az interferenciával kapcsolatos jelenségek vizsgálatában, ezért az időfüggő részt valójában elhagyhatjuk

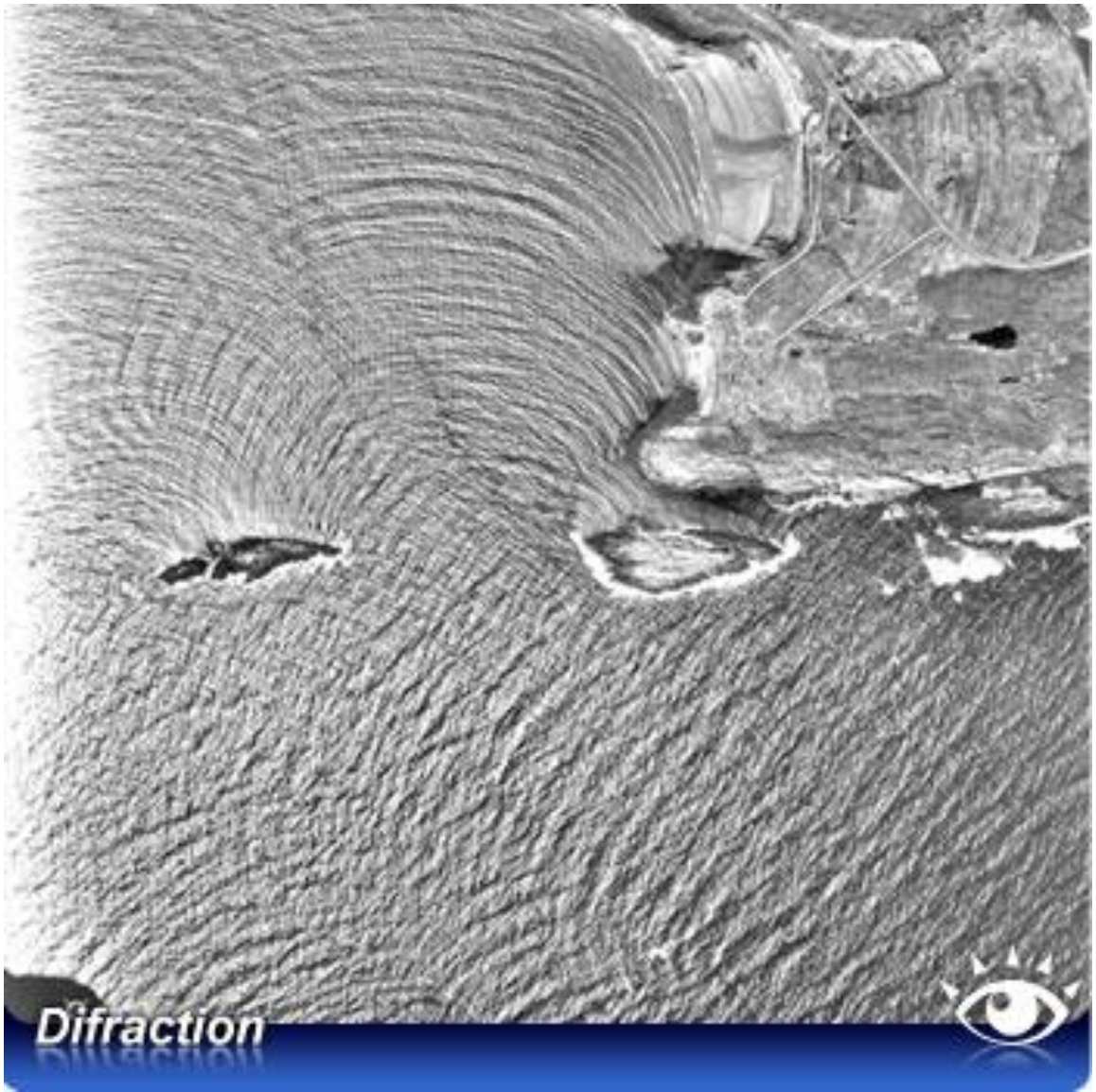
$$\varphi(r) \approx \frac{1}{r}e^{ikr}$$

A hullámok elhajlásának jelensége (2)

Huygens-Fresnel-elv: A hullámfront minden pontja elemi gömbhullámok kiindulópontja, amely hullámok interferenciája adja az új hullámfelületet.

Mechanikai (felületi) hullámok:

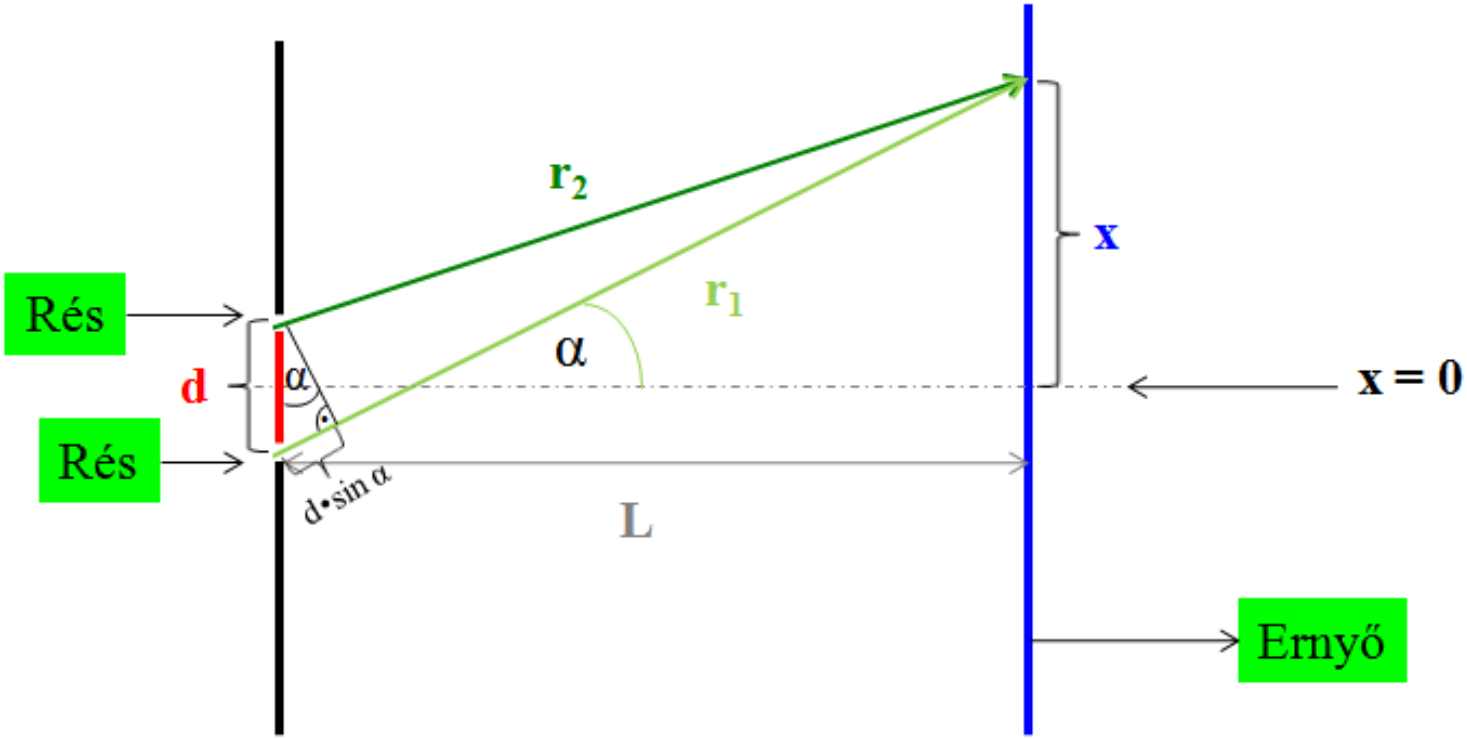
A hullámok elhajlásának jelensége (3)



Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A hullámok elhajlásának jelensége (4) – két pontból induló hullám esete

A geometriai elrendezés



A hullámok elhajlásának jelensége (5) – két pontból induló hullám esete

Ha két rés távolsága *d*, az ernyő távolsága *L* (*d*<< *L*) a két rés ernyőtől való távolsága r_1 illetve r_2, akkor a két hullám ernyőn való találkozáskor a szuperpozíció eredménye:

$$\frac{1}{r_1}e^{ikr_1} + \frac{1}{r_2}e^{ikr_2} \approx \frac{1}{r_2}e^{ikr_2}\left(1 + e^{ik(r_1 - r_2)}\right)$$

A két hullám közötti úthossz különbsége kifejezhető a két rés *d* távolságával és az r_2 sugár és a rések síkjára merőleges egyenes által bezárt α szöggel:

$$r_1 - r_2 \approx d \sin \alpha$$

A hullámok elhajlásának jelensége (6) – két pontból induló hullám esete

Az exponenciális Euler-összefüggéssel történő kifejtésekor megjelenik a

$$\cos(kd\,\sin\alpha)$$

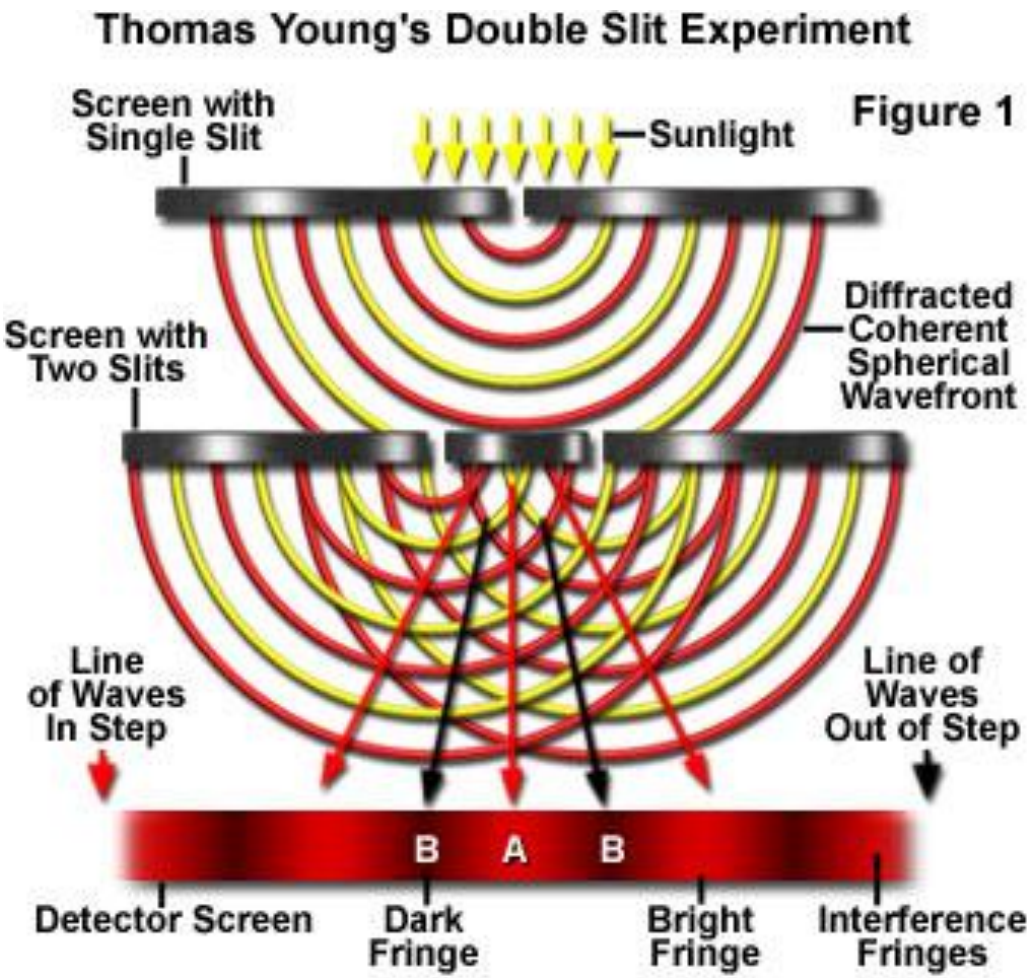
Maximális (=1) – és ezáltal az intenzitás is –, ha

$$kd\,\sin\alpha = 0, 2\pi, \dots, 2n\pi$$

Minimális (= -1) – és ezáltal az intenzitás is –, ha

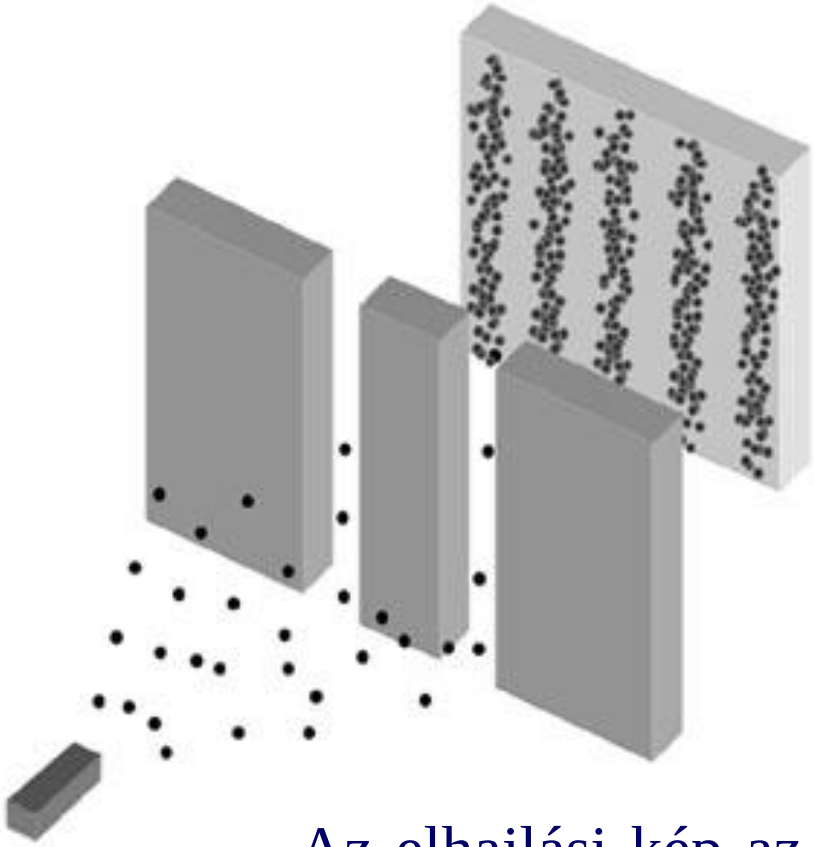
$$kd\,\sin\alpha = \pi, 3\pi, \dots, (2n+1)\pi$$

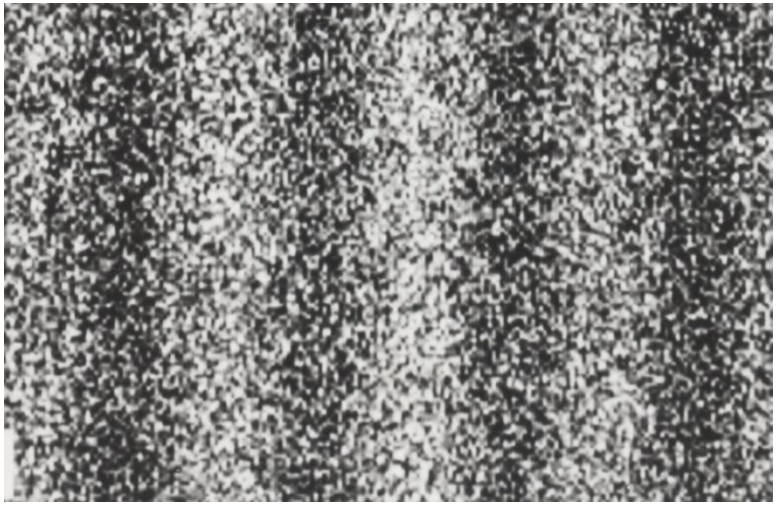
A hullámok elhajlásának jelensége (7) – két pontból induló hullám esete (két réses kísérlet)



http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/interference/doubleslit/

A hullámok elhajlásának jelensége (8) – két réses kísérlet elektronokkal





Az elhajlási kép az elektromágneses hullámok esetén az intenzitással van kapcsolatban, míg az elektronok esetén a valószínűséggel. Hm!?

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A hullámok elhajlásának jelensége (9) – elhajlás rácson

A rács N db egymástól *d* távolságban párhuzamosan elhelyezkedő rés. Az egyes hullámok járulékainak (komplex értékű) összege:

$$\frac{1}{r_1}e^{ikr_1} + \frac{1}{r_2}e^{ikr_2} + \cdots + \frac{1}{r_N}e^{ikr_N}$$

Az egymás melletti *j*-edik és *j+1*-edik résből induló hullámok közötti úthossz különbség

$$d \sin \alpha$$

A hullámok elhajlásának jelensége (10) – elhajlás rácson

Kiemeléssel átalakítva:

$$\frac{1}{r_N} e^{ikr_N}\left(1 + e^{ikd\sin\alpha} + e^{i2kd\sin\alpha} + \cdots + e^{i(N-1)kd\sin\alpha}\right)$$

A zárójelben lévő összeg határozza meg, hogy adott szögben milyenek lesznek az intenzitásviszonyok, ezért a továbbiakban elég ezzel foglalkozni. Ez átalakítható:

$$S = \frac{1 - e^{iNkd\sin\alpha}}{1 - e^{ikd\sin\alpha}}$$

amely egy komplex értékű kifejezés

A hullámok elhajlásának jelensége (11) – elhajlás rácson

E kifejezés négyzete adja a hullám intenzitását a különböző irá-nyokban. A komplex számok nyelvén ez a

$$I \sim S * S^c$$

szorzat kiszámolását jelenti, ahol S^c az S komplex konjugáltja. Az eredmény:

$$I \sim \frac{1 - cos(Nkd\, sin\, \alpha)}{1 - cos(kd\, sin\, \alpha)} = \frac{sin^2 \frac{Nkd\, sin\, \alpha}{2}}{sin^2 \frac{kd\, sin\, \alpha}{2}}$$

A hullámok elhajlásának jelensége (12) – elhajlás rácson

A formula rövidítéséért bevezetjük:

$$y = kd \sin \alpha$$

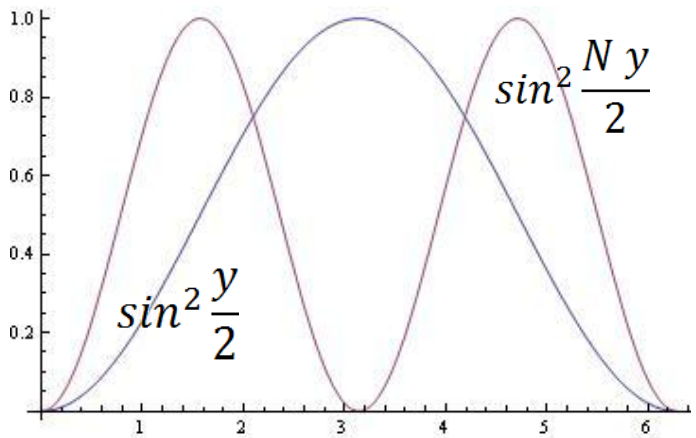
Ezzel az intenzitás:

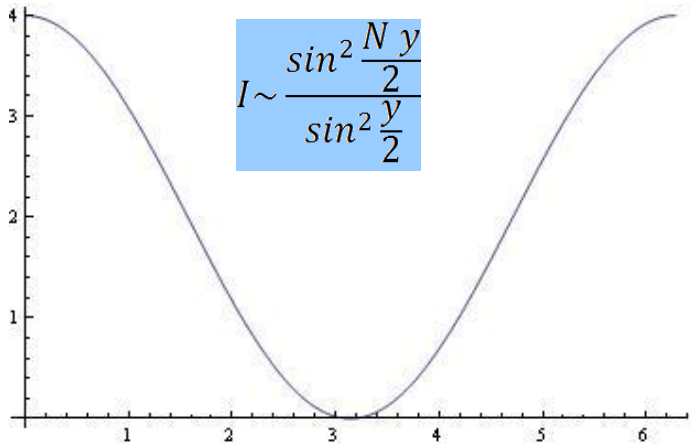
$$I \sim \frac{\sin^2 \frac{N\,y}{2}}{\sin^2 \frac{y}{2}}$$

Fő- és mellékmaximumok (1)

N=2

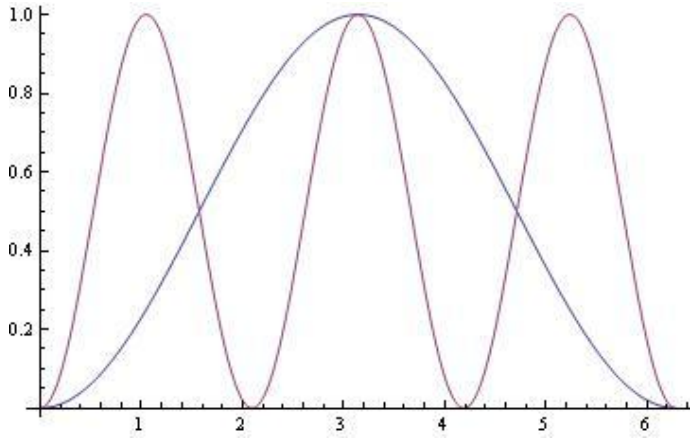
Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 0

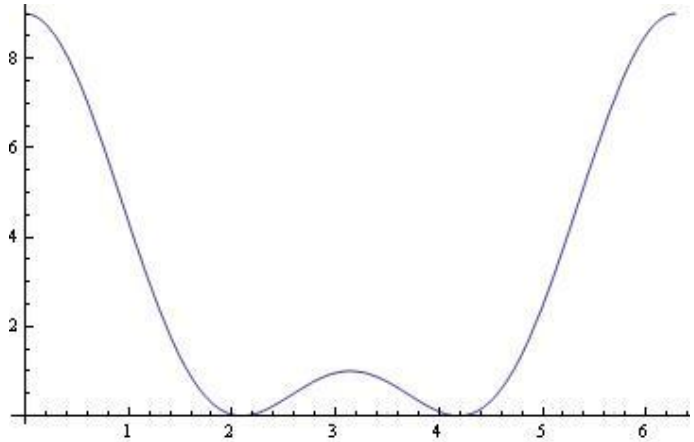




N=3

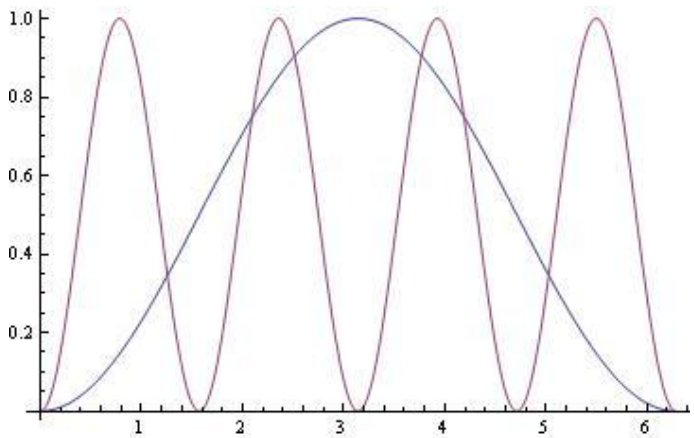
Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 1

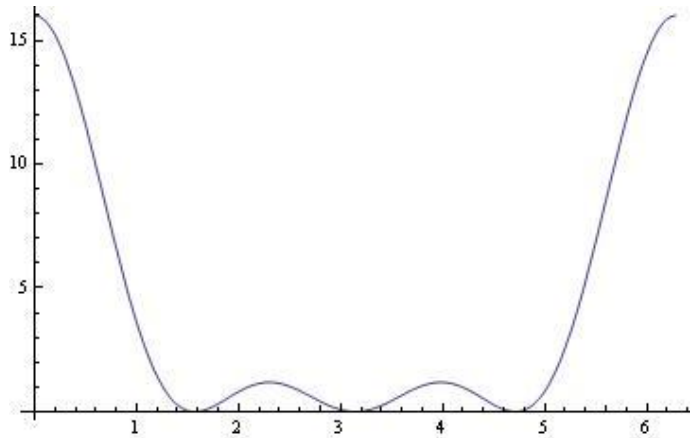




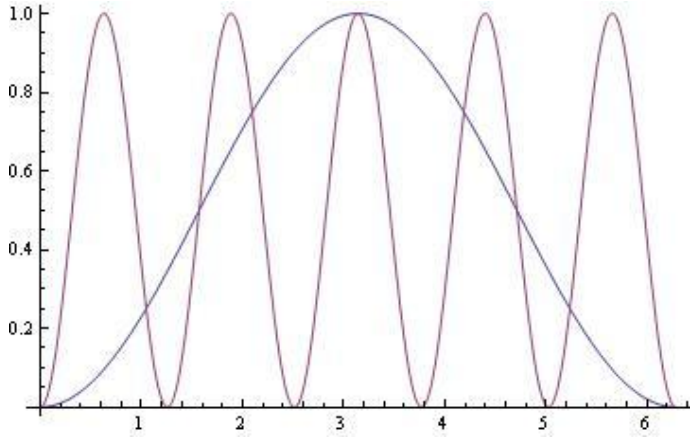
Fő- és mellékmaximumok (2)

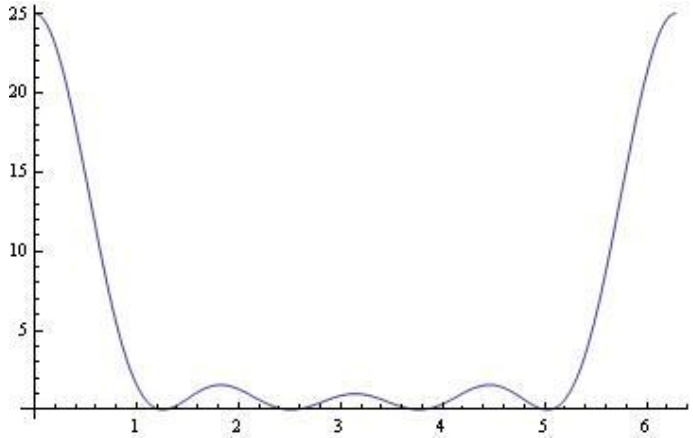
N=4 Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 2





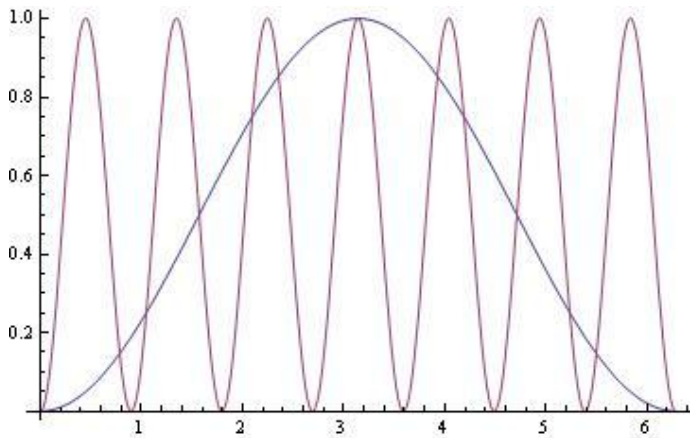
N=5 Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 3

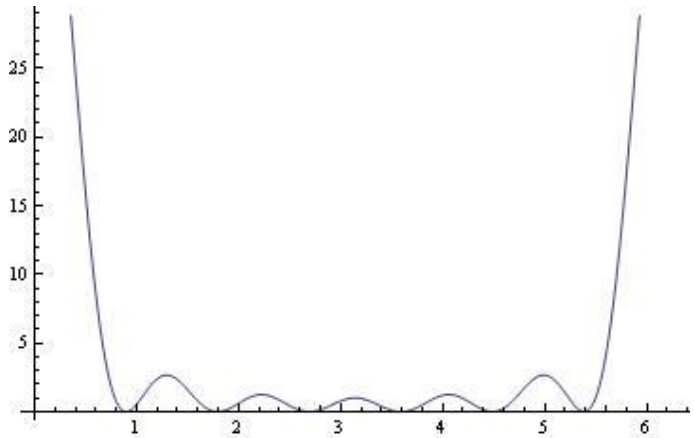




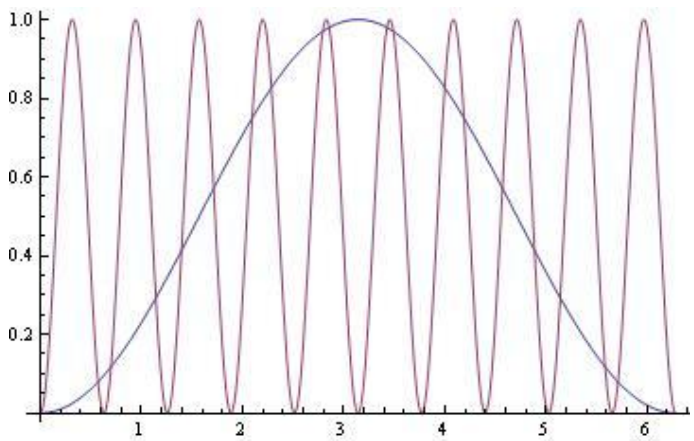
Fő- és mellékmaximumok (3)

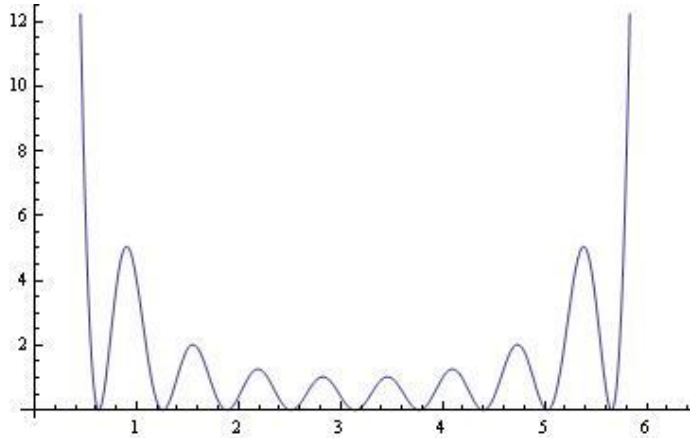
N=7 Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 5





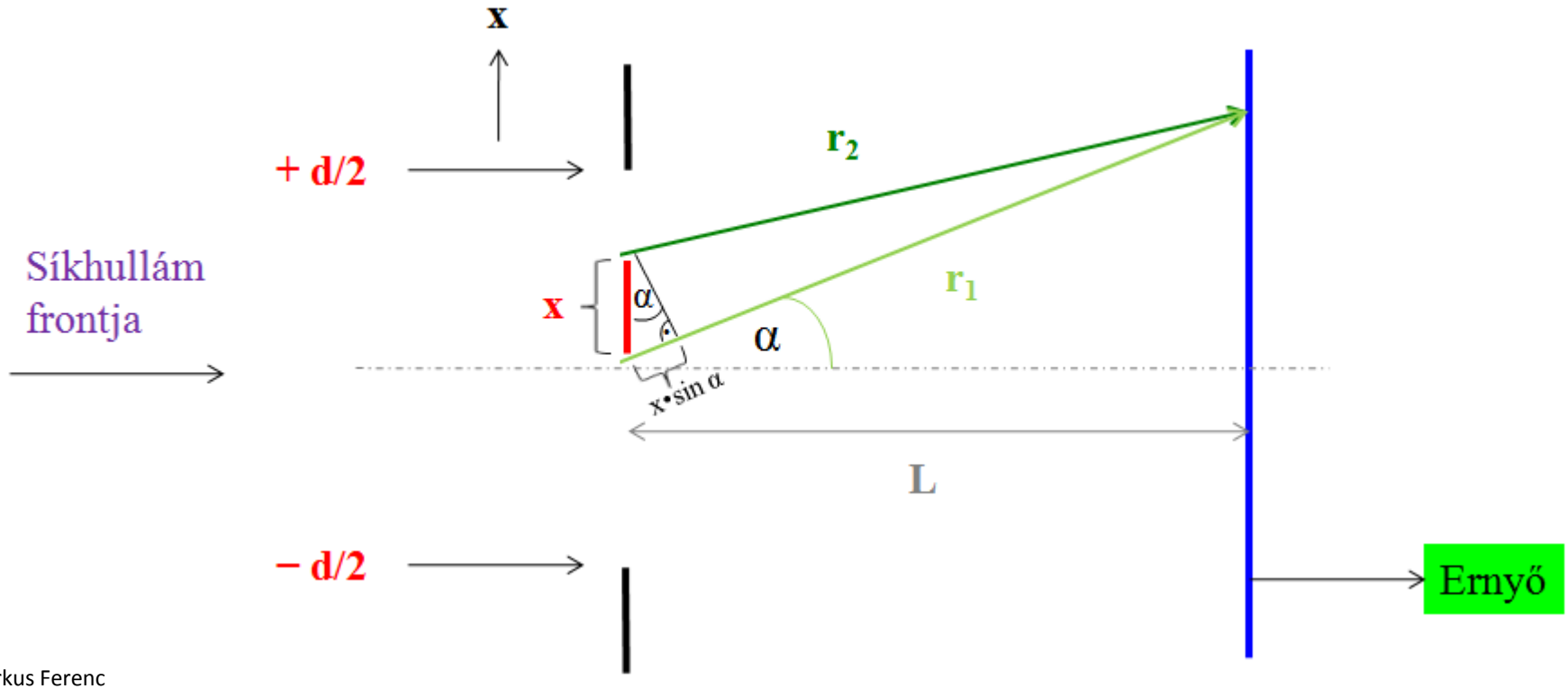
N=10 Főmaximumok száma: 2; mellékmaximumok száma: 8





A hullámok elhajlásának jelensége (13) – elhajlás résen

A *d* szélességű rést a *–d/2* és *+d/2* intervallumban helyezzük el. A rés minden pontja elemi hullámok kiindulópontja. Itt most a hullámok kiindulási pontja folytonosan helyezkednek el.



A hullámok elhajlásának jelensége (14) – elhajlás résen

Az *x* koordinátájú pontból származó járulékot az előzőek szerint

$$e^{ikx\sin\alpha}$$

kifejezéssel adhatjuk meg. Ezért a teljes réstől származó *S* összeg egy integrállal adható meg:

$$S = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{ikx\sin\alpha}\, dx$$

A hullámok elhajlásának jelensége (15) – elhajlás résen

Az integrál kiszámolása:

$$S = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cos\left(kx \sin\alpha\right)\, dx + i \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sin\left(kx \sin\alpha\right)\, dx$$

A második integrál zérus, így nincs komplex rész. Az eredmény:

$$S = \frac{2}{k \sin\alpha} \sin\frac{kd \sin\alpha}{2}$$

Az intenzitás e kifejezés négyzetével arányos.

A hullámok elhajlásának jelensége (16) – elhajlás résen

Az $y = \frac{kd\sin\alpha}{2}$ definícióval az intenzitás alakja:

$$I \sim S^2 = d^2 \frac{\sin^2 y}{y^2}$$

Ennek első minimumhelye: $\frac{kd\sin\alpha}{2} = \pi$

A kioltáshoz tartozó szög:

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}$$

Kör alakú rés esetén:

$$\sin\alpha = 1{,}22\frac{\lambda}{d}$$

A hullámok elhajlásának jelensége (17) felbontóképesség

Felbontóképesség: két közeli pont megkülönböztethetőségével kapcsolatos. A megkülönböztethetőség határa, hogy az egyik elhajlási kép első minimumánál van a másik elhajlási kép főmaximuma.

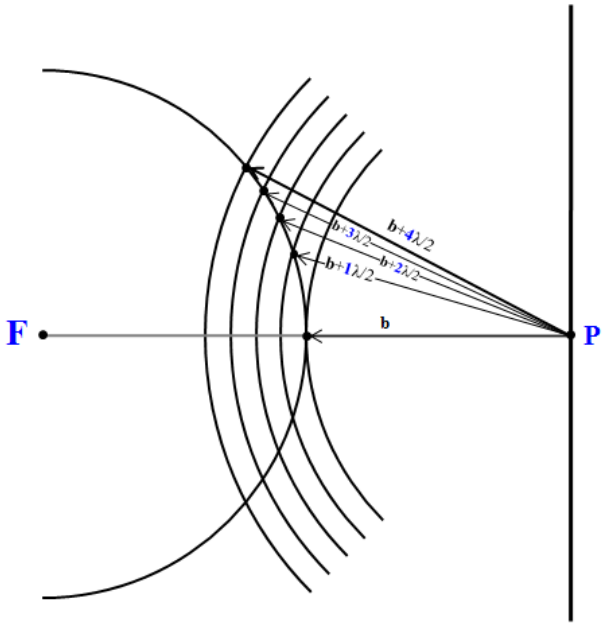
A hullámhossz csökkentésével a felbontóképesség növelhető!

látható fény →
ultra viola sugárzás →
röntgen sugárzás →
gyorsított elektronok (elektronmikroszkóp) →
fókuszált ionnyaláb (!)

Hangya elektronmikroszkópos képe (Wikipedia)

Fresnel-féle zónák

Tekintsünk egy gömb alakú hullámfrontot. Ekkor egy hullámfronton kívüli *P* pontból olyan kúpfelület sorozat szerkeszthető a hullámfelületen, amelyek kúpokhoz tartozó úthossz-különbség a fél hullámhossz egészszámú többszöröse: $m\frac{\lambda}{2}$

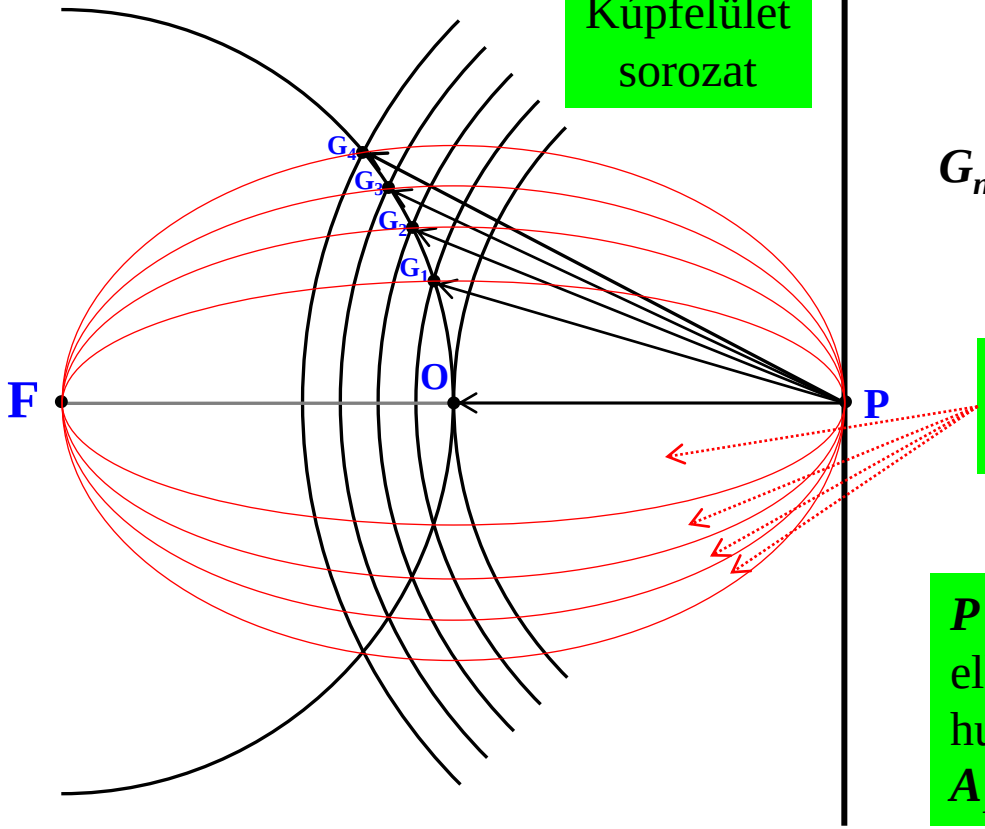


Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Fresnel-féle zónák

Gömb alakú hullámfront felülete

Kúpfelület sorozat



$$\overline{PG_n} - \overline{PO} = \frac{n\lambda}{2}$$

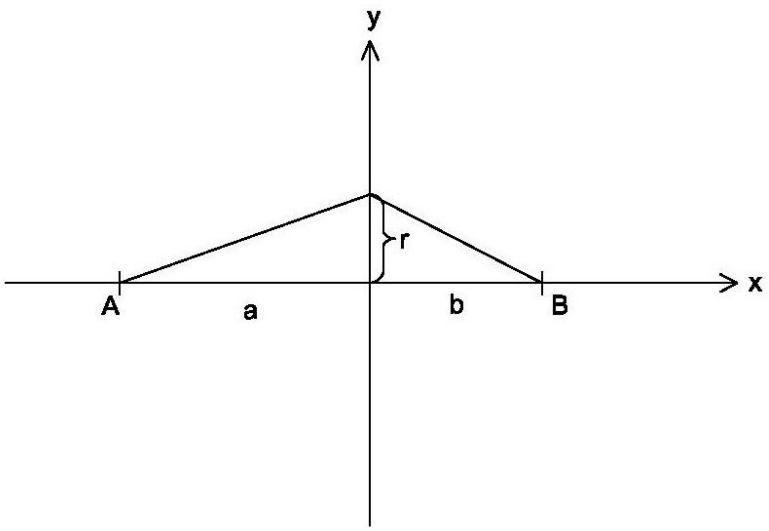
P = hullámfronton kívüli pont
G_n; ***O*** = hullámfronton lévő pontok
n = pozitív egész szám

A kúpfelület sorozatok kimetszik a Fresnel-féle zónákat.

P pontba szomszédos zónákból ellentétes fázissal érkeznek a hullámok, tehát az eredő amplitúdó: $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots$

Fresnel-féle zónalencse (1)

Az optikai tengelyen elhelyezkedő *A* pontból a *B* pontba érkeznek a hullámok egy az *AB* tengelyre merőleges síkfelületen keresztül. (Az *A* pont távolsága a síktól *a*, míg a *B* ponté *b*.) A két utat (*A* és *B* pontok között közvetlenül ill. a síkfelületen felvett *r* sugarú kör egy pontján keresztül) tekintve kiszámoljuk az úthossz-különbséget:



$$\Delta s = \sqrt{a^2 + r^2} - a + \sqrt{b^2 + r^2} - b$$

Átalakítva:

$$\Delta s = a\left(\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}} - 1\right) + b\left(\sqrt{1 + \frac{r^2}{b^2}} - 1\right)$$

Fresnel-féle zónalencse (2)

A gyökös kifejezések kis *r* értékekre közelíthetők:

$$\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}} \approx 1+\frac{r^2}{2a^2}$$

Ezekkel az úthossz-különbség:

$$\Delta s \approx \frac{\mathrm{r}^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{b}}\right)$$

Az *i*-edik: $\Delta s_i = i\frac{\lambda}{2}$

$$i\frac{\lambda}{2} = \frac{r_i^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{b}}\right)$$

Fresnel-féle zónalencse (3)

Bevezetve az:

$$f = \frac{r_i^2}{i\lambda}$$

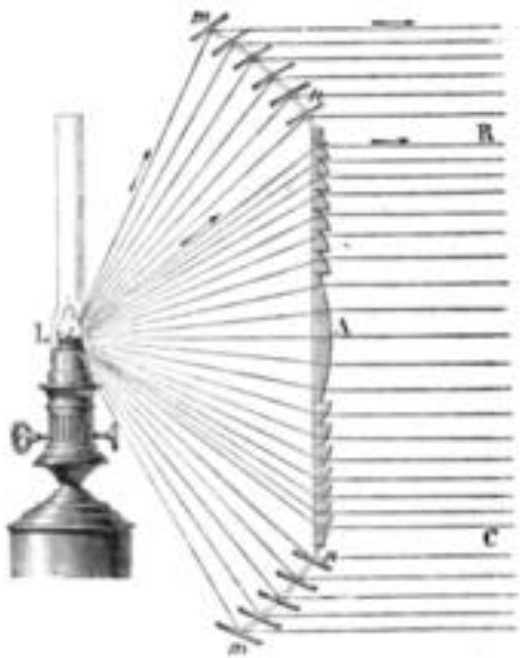
jelölést az előző összefüggést átmegy a geometriai optikából ismert leképezés törvénybe:

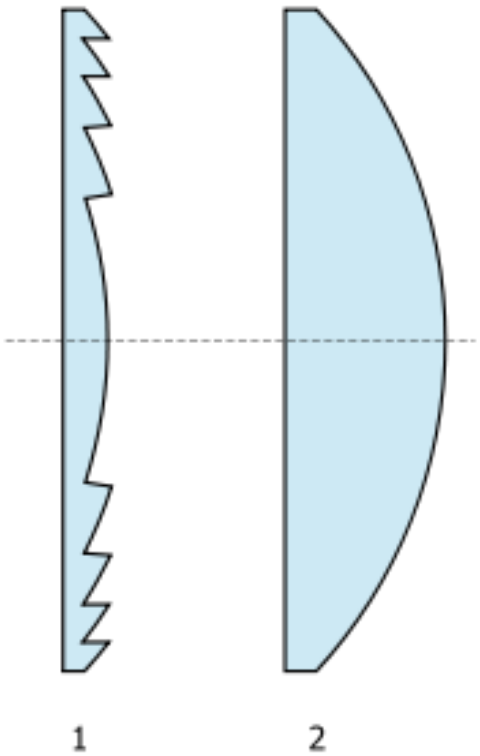
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Ha minden második körgyűrűt kitakarjuk, akkor csak az egymást erősítő hullámok maradnak, így az elrendezés lényegében egy f fókuszú lencseként működik.

Fresnel-lencsék (1)

A fókuszból induló nyalábok párhuzamosan haladnak



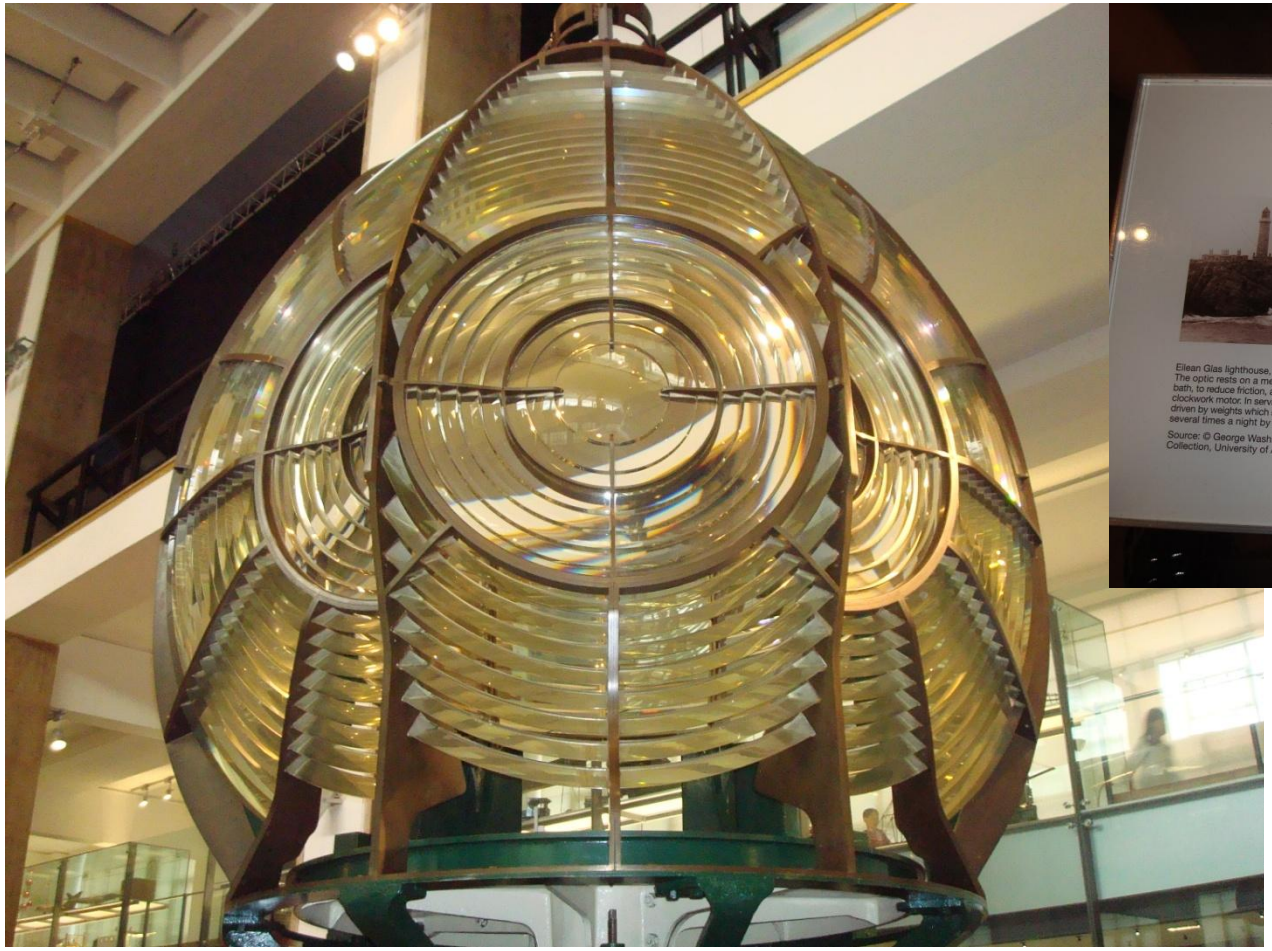


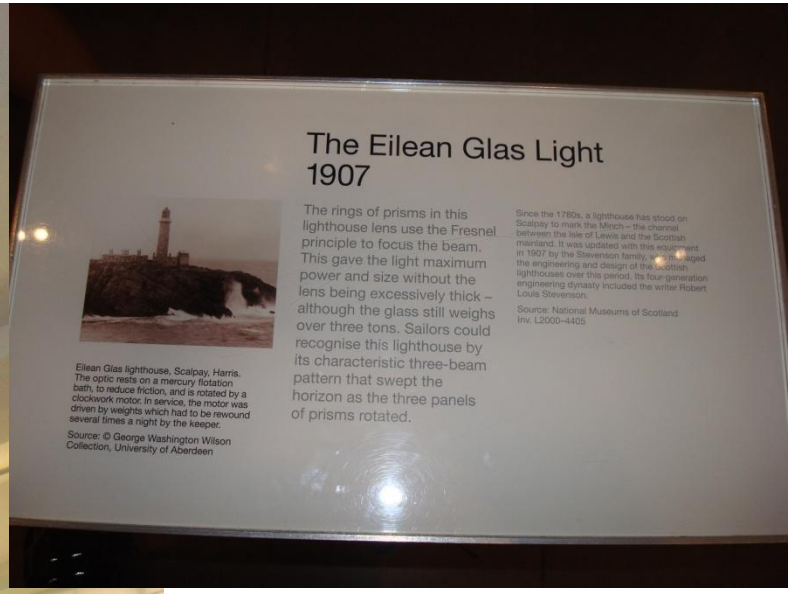
http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_lens

Fresnel-lencsék (2)

http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_lens

Fresnel-lencsék (3)





Science Museum, London

Somogyi Dániel fotói (2012)

Fresnel-lencsék (4)

Science Museum, London
Somogyi Dániel fotói (2012)

A geometriai optika mint a hullámoptika határesete (1)

Felvetődik a kérdés, hogy milyen esetekben szükséges az optikai jelenségeket feltétlenül a hullámoptika eszköztárával tárgyalni?

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Keressük a megoldást a

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = A(\boldsymbol{r})e^{i(k_0 S(\boldsymbol{r})-\omega t)}$$

alakban, ahol k_0 az adott hullámszám vákuumbeli értékét jelöli, míg az $S(\mathbf{r})$ a hullám térbeli – különböző anyagi közegeken keresztüli – terjedését is kifejező hely-dimenziójú függvény.

A geometriai optika mint a hullámoptika határesete (2)

A deriváltakat célszerű előre külön-külön kiszámolni:

$$\nabla\psi(\boldsymbol{r},t) = \left(\nabla A(\boldsymbol{r}) + ik_0 A(\boldsymbol{r})\nabla S(\boldsymbol{r})\right)e^{i(k_0 S(\boldsymbol{r})-\omega t)}$$

$$\Delta\psi(\boldsymbol{r},t) = (\Delta A(\boldsymbol{r}) + 2ik_0\,\nabla A(\boldsymbol{r})\nabla S(\boldsymbol{r}) + ik_0\,A(\boldsymbol{r})\Delta S(\boldsymbol{r}) - k_0^2 A(\boldsymbol{r})(\nabla S(\boldsymbol{r}))^2)e^{i(k_0 S(\boldsymbol{r})-\omega t)}$$

$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = -i\omega A(\boldsymbol{r})e^{i(k_0 S(\boldsymbol{r})-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A(\boldsymbol{r})e^{i(k_0 S(\boldsymbol{r})-\omega t)}$$

A geometriai optika mint a hullámoptika határesete (3)

A formulákat egy egyenletté összeírva:

$$\Delta A(\boldsymbol{r}) + 2ik_0\,\nabla A(\boldsymbol{r})\nabla S(\boldsymbol{r}) + ik_0\,A(\boldsymbol{r})\Delta S(\boldsymbol{r}) - k_0^2 A(\boldsymbol{r})(\nabla S(\boldsymbol{r}))^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\,A(\boldsymbol{r})$$

Amennyiben a hullámszámról feltehető, hogy $k_0 \to \infty$, azaz a hullámhossz $\lambda \to 0$, valamint az amplitúdó és a törésmutató helytől függő változása kicsi, akkor

$$k_0^2(\nabla S(\boldsymbol{r}))^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

A geometriai optika mint a hullámoptika határesete (4)

Felhasználva:

$$\frac{\omega}{k_0} = c_0 \qquad \frac{c_0}{c} = n$$

A geometriai optika alapegyenletét – az eikonál egyenletet – kapjuk:

$$(\nabla S(\boldsymbol{r}))^2 = n^2$$

Ez az egyenlet a geometriai optikában a Fermat-elv közvetlen következménye.

Kérdések (1)

Hogyan viselkednek az elektromos és mágneses teret leíró térmennyiségek a közegek határán?
Milyen egyenleteket kell felírni a törés és visszaverődés törvényeinek levezetéséhez? A felírt egyenletekből hogyan olvashatók ki a törvények és mik lesznek azok?
Mit állít a Brewster-törvény? Mik a levezetés kiindulási egyenletei?
Melyek a Brewster-törvény levezetésének főbb lépései?
Milyen eszközökben, természeti jelenségekben fordulhat elő a Brewter-törvény megvalósulása?
Mi a teljes visszaverődés fogalma? A hullámok esetén milyen érdekes jelenség tapasztalható és hogyan demonstrálható?
Milyen kifejezéseket tartalmaz az elektromágneses tér energiamérleg egyenlete?
Mi a Poynting-vektor és mi a fizikai jelentése?

Kérdések (2)

Mi az intenzitás és milyen a kapcsolata az elektromos térerősséggel?
Mit mond ki a szuperpozíció elve?
Mi az interferencia jelensége? Mi az interferencia feltétele?
Milyen a harmonikus gömbhullámok matematikai alakja?
Mit mond ki a Huygens-Fresnel-elv?
Mi az elhajlás jelensége? A jelenségre milyen példákat tud felsorolni?
Mi a kétréses kísérlet, és hogyan számolható ki az intenzitás?
Hogyan tárgyalható a rácson történő elhajlás jelensége, és hogyan számolható ki az intenzitás?
Mi a fő- és mellékmaximum?
Hogyan tárgyalható a résen történő elhajlás, és hogyan számolható ki az intenzitás?
Mi a felbontóképesség fogalma, milyen példákat tud ennek használatára említeni?

Kérdések (3)

Mik a Fresnel-féle zónák? Hogyan tárgyalható a Fresnel-féle zónalencse? Milyen példákat tud felsorolni?
Mit fejez ki az fogalom, hogy a geometriai optika előáll, mint a hullámoptika határesete? Mi a fizikai feltétel? Mi a levezetés kiindulásának alapötlete, mi a végső konklúzió? Mi a levezetés néhány főbb lépése?

(folyt. köv.)

(A ilyen színnel írt kérdések a mélyebben érdeklődők részére vannak.)