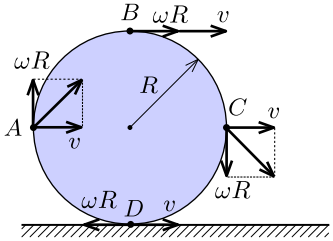
Fizika 1i, 2019 őszi félév, 3. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

F1. Ha a henger középpontjával együtt mozgunk v sebességgel, akkor azt látjuk, hogy minden egyes pontja ω szögsebességgel forog a középpont körül. A talajhoz képesti sebességeket úgy kapjuk meg, hogy az egyes pontokhoz tartozó ωr kerületi sebességet (r az adott pont és a henger középpontjának távolsága) és a középpont sebességet mint vektorokat összeadjuk. Ehhez tekintsük az ábrát.

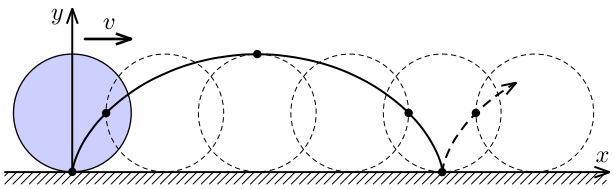


Mivel a henger tisztán gördül, azaz a talajjal érintkező D pontja áll (pillanatnyi forgástengely), ezért $v = \omega R$. Tehát az egyes pontok sebessége:

$$v_A = v_C = \sqrt{v^2 + (\omega R)^2} = v \cdot \sqrt{2},$$
$$v_B = v + \omega R = 2v.$$

A sebességek iránya merőleges az adott pontot és a D pontot összekötő szakaszra.

F2**. *a*) Használjuk az ábrán látható koordinátarendszert.



Üljünk bele a v sebességgel mozgó henger középpontjába. Ha a henger alsó pontja $\alpha = \omega t = v/R \cdot t$ szöggel fordul el a mozgás t ideje alatt, akkor ennek a pontnak a helykoordinátái:

$$x' = -R \sin \alpha,$$
$$y' = R(1 - \cos \alpha).$$

A talaj rendszerében pedig

$$x = vt - x' = vt - R \sin\left(\frac{v}{R} t\right),$$
$$y = y' = R\left[1 - \cos\left(\frac{v}{R} t\right)\right].$$

b) A legmagasabb pont sebessége $2v$, távolsága a talajjal érintkező pillanatnyi forgástengellyel $2R$, azaz a görböleti sugár is ennyi. Azonban ez az eredmény HIBÁS! Ugyanis a pillanatnyi forgástengely mozgásban van a talajhoz képest.

Ismét üljünk bele a gördülő henger középpontjába. Ebben a rendszerben a felső pont sebessége v és R sugarú körmozgást végez, azaz a gyorsulása $a = v^2/R$. Ha visszatérünk a talajhoz rögzített koordináta-rendszerbe, akkor ugyanezt a gyorsulást kell tapasztalnunk, hiszen a henger középpontja állandó sebességgel halad, azaz az előző eredményt egy inerciarendszerben kaptuk, és ha áttérünk egy másik inerciarendszerbe (talaj), akkor a gyorsulásnak ugyanakkorának kell lennie. Viszont a talajhoz képest a legfelső pont sebessége $2v$, tehát a gyorsulása $a = (2v)^2/r$, ahol r a kérdéses görbületi sugár. Összevetve a kétféle módon kapott gyorsulásokat, a görbületi sugárra $r = 4R$ adódik.

F3. Ha az m tömegű műhold geostacionárius pályán mozog, akkor az M tömegű Föld körüli keringési ideje megegyezik a Föld tengelye körüli körülfordulás idejével, azaz $T = 1$ nappal. A műhold r sugarú körmozgását a műhold és a Föld között ható gravitációs vonzóerő biztosítja:

$$\frac{GmM}{r^2} = m\omega^2 r,$$

ahol $\omega = 2\pi/T$. Innen a geostacionárius pálya sugara a Föld középpontjától mérve (felhasználva az ismert adatokat):

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} \approx 42200 \text{ km}.$$

A Föld felszínétől számítva $r' = r - R_\mathrm{F} = 35800$ km.

F4*. Mindkét esetben képzeljük el, hogy a rugórendszerre F erővel hatunk.

a) Sorba kapcsolt esetben minkét rugót ugyanaz az F erő feszíti. Az egyes rugók megnyúlásai $\Delta\ell_1$ és $\Delta\ell_2$, azaz

$$F = D_1 \Delta\ell_1 = D_2 \Delta\ell_2.$$

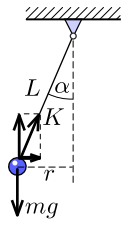
A rendszer teljes megnyúlása $\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$. Olyan rugót keresünk a kettős rugórendszer helyett, ami F erő hatására $\Delta\ell$-lel nyúlik meg:

$$D = \frac{F}{\Delta\ell} = \frac{F}{\frac{F}{D_1} + \frac{F}{D_2}} = \frac{1}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}} = 36 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

b) Párhuzamos kapcsolás esetén mindkét rugó ugyanannyival ($\Delta\ell$) nyúlik meg. Az egyes rugókban fellépő erő $F_1 = D_1 \Delta\ell$ és $F_2 = D_2 \Delta\ell$. A teljes rendszerre $F = F_1 + F_2$ erő hat, így az eredő rugóállandó:

$$D = \frac{F_1 + F_2}{\Delta\ell} = D_1 + D_2 = 150 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

F5*. Rajzoljuk fel az ingatestre ható erőket.



a) Függőleges irányban a test nem gyorsul, ezért

$$mg = K\cos\alpha \;\rightarrow\; K = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Vízszintes irányban a testnek centripetális gyorsulása van, hiszen vízszintes síkú körmozgást végez:

$$K\sin\alpha = m\frac{v^2}{r},$$

ahol $r = L\sin\alpha$. Behelyettesítve ebbe K fenti alakját a

$$g\tan\alpha = \frac{v^2}{L\sin\alpha} \tag{1}$$

egyenlet adódik. Mivel a körmozgás sebessége állandó nagyságú, ezért $v = 2\pi r/T = 2\pi L\sin\alpha/T$. Ezt felhasználva (1)-ben

$$\cos\alpha = \frac{gT^2}{4\pi^2 L}$$

adódik, amiből az adatok behelyettesítése után $\alpha \approx 60°$-ot kapjuk.

b) A kötélerő

$$K = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{4\pi^2 mL}{T^2} \approx 6\ \text{N}.$$

F6*. *a*) Az autót körpályán a tapadási súrlódási erő tartja, ami a megcsúszás határesetében $S = \mu mg$. A körmozgásra:

$$S = m\frac{v^2}{r},$$

amiből a maximális sebesség $v_{\max} = \sqrt{\mu g r}$. A megadott adatokkal 14 m/s $\approx$ 50 km/h.

b) Az autóra ható tapadási súrlódási erő sugárirányú komponense (S_1) felel a körpályán tartáshoz (centripetális gyorsulás), érintőirányú komponense (S_2) pedig a tangenciális gyorsulást eredményezi. A tapadási súrlódási erő maximuma most is $S = \mu mg$. Sugárirányban:

$$S_1 = m\frac{v^2}{r},$$

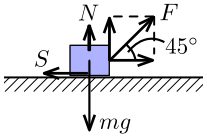
érintőirányban:

$$S_2 = ma_{\text{t}}.$$

Mivel $S^2 = S_1^2 + S_2^2$, innen adódik a maximális kezdeti sebesség:

$$v_{\max} = \sqrt[4]{(\mu^2 g^2 - a_{\text{t}}^2)\, r^2} \approx 11\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

F7*. *a*) Jelöljük μ_0-lal a tapadási súrlódási együtthatót. Az ábrán berajzoltuk a testre ható erőket.



Ha még éppen nem mozdul el a test, a tapadási súrlódási erő maximuma hat és az erők eredője nulla. Vízszintes irányban:

$$F\cos 45° = S,$$

függőleges irányban:

$$mg = F\sin 45° + N,$$

valamint

$$S = \mu_0 N.$$

Az N nyomóerő második egyenletből történő kifejezése, majd annak a harmadikba való behelyettesítése után az első egyenlet felhasználásával adódik a legkisebb erő

$$F = \frac{\mu_0 mg}{\mu_0\sin 45° + \cos 45°} \approx 14\ \text{N}.$$

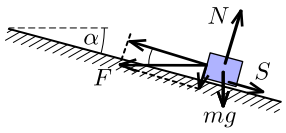
b) Amikor a test mozgásban van, rá az S csúszási súrlódási erő hat (a csúszási súrlódási együttható μ). A következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$F\cos 45° - S = ma,$$
$$mg = F\sin 45° + N,$$
$$S = \mu N.$$

Az egyenleteket hasonló módon rendezve, mint az *a*) részben, valamint felhasználva annak végeredményét, a gyorsulás

$$a = \left[\frac{\mu_0(\cos 45° + \mu\sin 45°)}{\cos 45° + \mu_0\sin 45°} - \mu\right] g = \frac{g}{15} \approx 0{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

F8*. *a*) Rajzoljuk le a ládára ható erőket.



A láda lejtőre merőlegesen egyensúlyban van, így a nyomóerő

$$N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha \approx 397\ \text{N}.$$

A súrlódási erő:

$$S = \mu N \approx 79\ \text{N}.$$

b) A láda gyorsulva mozog, tehát lejtőirányban a mozgásegyenlete:

$$F\cos\alpha - S - mg\sin\alpha = ma.$$

Ebből a láda gyorsulása $a \approx 6{,}1\ \text{m/s}^2$.

c) Ebben az esetben a test nem gyorsul, és a tapadási súrlódási erő maximuma hat. Az egyenletek

$$N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha,$$
$$S = \mu N,$$
$$F\cos\alpha = S + mg\sin\alpha.$$

Ezekből az egyenletekből

$$F = \frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\cdot mg \approx 220\ \text{N}.$$