MECHANIKA 1	B) HF 08-09

B15.)

Adott egy függőleges felfelé mutató („+z”) tengelyű, egyenes körkúp alakú tölcsér. A kúp alkotója a „+z” tengellyel ϑ_0 szöget zát be. A tölcsér belső felületén, egy „m” tömegű pont szabadon (súrlódásmentesen) mozoghat. A tömegpont helyzetét (r, ϑ, φ) gömbi koordinátarendszerben adjuk meg.

a.) Mekkora a rendszer szabadsági fokainak száma? Miért?

b.) Írja fel a tömegpont Lagrange függvényét úgy, hogy az általános koordinátának (r, φ)-t választja!

c.) Határozza meg a Lagrange-függvényt, és bizonyítsa be, hogy φ ciklikus!

d.) A Lagarnge2 egyenletekkel adja meg a tömegpont mozgásegyenleté(i)t!

e.) Adja meg a Jacobi-integrált, és ellenőrizze, hogy a mozgásegyenlet megőrzi!

f.) A fentiek alapján mutassa meg, hogy a tömegpont mozgása egy centrális térben való mozgással írható le.

g.) Határozza meg a stabil körpálya körüli kis amplitúdójú oszcillációk periódus idejét és vesse ezt össze a körmozgás periódus idejével!

h.) Mlyen szögűnek kell lennie a kúpnak, hogy a két periódus megegyezzen?

B16.)

Adott a függőleges (x,y) síkban egy ún. „inverz matematikai inga”. A függőleges „+y” tengely felfelé mutat. A „b” hosszúságú, merev, vékony, tömegtelen pálca egyik végén egy „m” tömegű, pontszerű test van. A pálca másik végét egy, az origóban lévő tengelyhez csapágyaztuk úgy, hogy a pálca a tengely körül szabadon elfordulhat. Az álló tengelyt és az elforduló pálcát egy spirál rugó köti össze.

A megfeszülő spirál rugó a pálcára egy „N” nagyságú forgató nyomatékot fejt jt ki. Az „N” akkor zérus, ha a pálca függőlegesen „felfelé” áll. Ha a pálca a (+y) függőleges iránnyal „φ” szöget zár be, akkor rugóban ébredő, visszatérítő „N” forgató nyomaték nagysága N=D φ .

a.) Határozza meg a rendszer Lagrange fügvényét! Válassza általános koordinátának a fent megnevezett „φ” szöget!

b,) Adja meg a Lagrange 2 mozgásegyenletet!

c.) A mozgásegyenlet alapján határozza meg az N(φ) függvényt

d.) Az N(φ) ismeretében állapítsa meg, hogy az (m,b,D,g) adatoktól függően az ingának hány darab egyensúlyi helyzete van! Jelölje „φ_0” az egyensúlyi helyzethez tartózó szögeket!

e.) Rajzolja fel az egyensúlyi „φ_0” szögeket tartalmazó V(φ) potenciális energia függvényeket és állapítsa meg, hogy stabilis vagy labilis egensúly van –e ezekben a helyzetekben!

f.) Legyen $\varphi = \varphi_0 + \alpha$, ahol $\alpha << \varphi_0$! Határozza meg a stabil egyensúlyi „φ_0” szögek körüli kis amplitúdójú α(t) rezgések ω körfrekvenciáit!

g.) Határozza meg a labilis egyensúlyi „φ_0” szög kis környezetében ($\varphi = \varphi_0 + \alpha$, és $\alpha << \varphi_0$) az inga φ(t) mozgásfüggvényt, ha az kis Ω_0 kezdő szögsebességgel indul el!

B17.)

Függőleges helyzetű, rögzített, “a” sugarú hengeres rúd végét egy “a” sugarú gömbfelülettel legömbölyítettük. Vegyünk egy igen vékony falú, merev, zérus tömegű, “2a” sugarú, félgömb-héját és a peremére erősítsünk egy “m” tömegű gyűrűt! Helyezzük a félgömb héját a legömbölyített rúd tetejére úgy, hogy a gyűrű vízszintes legyen. A félgömb kitérítjük ebből az egyensúlyi helyzetéből és az **kis amplitúdóval** billeg úgy, hogy nem csúszik meg.

A billegés azt jelenti, hogy a gyűrű középpontja a csak függőleges síkban mozog. A félgömb helyzetét a gyűrű síkjának a vízszintessel bezárt „ φ ” szögével jellemezzük.

a.) Adja meg a csúszásmentes billegésből adódó kényszerfeltételt!

b.) Határozza meg a rendszer szabadságfokát és válasszon általámos koordinátá(ka)t úgy, hogy legyen közötte a φ szög is!

c.) Határozza meg a billegő gömbhéj kinetikus energiáját!

d.) Határozza meg a rendszer potenciális energiáját!

e.) Adja meg a rendszer Lagrange függvényét!

f.) Írja fel a Lagrange2 mozgásegyenlete(ke)t!

g.) Határozza meg a gömbhéj kis amplitúdójú φ (t) mozgás függvényét!

h) **(EXTRA, gyakorlásra!)** Helyezzük a szóban forgó félgömbhéjat a legömbölyített rúdra úgy, hogy annak egyensúlyi helyzete $\varphi = \varphi_0$ szögnél legyen! Miként módosul ez előzőekben kapott $\varphi(t) = \varphi_0 + \gamma(t)$ időfüggvény , ha $\gamma(t) << \varphi_0$?

--

B18.)

Adott a mellékelt ábrán látható mechanikai elrendezés.
Az elhanyanyagolható tömegű, hosszú, keskeny, merev lap végeinél lévő tengelyek egymástól „3a” távolságra vannak. Az egyik tengelyt egy vízszintes síklapon átfúrt lyukba illesztettük Ezáltal a merev lap a vízszintes síkban szabadon foroghat. A merev lap másik tengelyre egy „M” tömegű, „a” sugarú, tömör, homogén korongot csapágyaztunk. A korogra egy vékony, nyújthatatlan fonalat csévéltünk. A vízszintes lapon átmenő tengelybe egy függőleges (a síkon átmenő) lyukat fúrtunk. Ezen a lyukon átfűztük a fonal szabad végét, majd reá egy „m” tömegű kis testett lógattunk.

A rendszert kezdetben nyugalomban tartjuk, majd elengedjük.

A fémlap vízszintes elfordulását az „φ” szöggel jellemezzük. A korongnak a fémlaphoz képesti elfordulását az „α” szög adja meg. Jelölje „x” az „m” tömegnek a sík eljától mért távolságát!

a.) Határozza meg a fonál letekeredését leíró matematikai formulát!

b.) Határozza meg a rendszer szabadságfokát és válasszon általános koordinátá(ka)t úgy, hogy legyen köztűk az „α” és/vagy a „φ” szög!

c.) A választott általános koordináták ismeretében határozza meg a korong teljes (transzlációs + rotációs) kinetikus energiáját!

d.) A választott általános koordináták ismeretében határozza meg az „M” tömeg kinetikus energiáját!

e.) Írja fel a rendszer Lagrange függvényét!

f.) Írja fel a Lagrange2 mozgásegyenlete(ke)t!

g.) Határozza meg az φ (t) függvényt!

h.) Határozza meg az x(t) függvényt!

--