

INTERFERENCIA

dr. Erdei Gábor, 2018-10-15

AJÁNLOTT SZAKIRODALOM:

Klein-Furtak, Optics
Richter, Bevezetés a modern optikába
Born-Wolf, Principles of optics
Füzessy Zoltán: A fotonika optikai alapjai

AZ INTERFERENCIA FOGALMA

Az előzőekben bemutatott geometriai optikai (azaz nulla hullámhosszúságú) közelítésben differenciálegyenletekkel írtuk le az EM hullámok fázisának és intenzitásának térbeli változását. Mivel ennek a tárgyalásmódnak az a feltételezés az alapja, hogy a terjedést nem befolyásolja a tér amplitúdója (csak a törésmutató térbeli eloszlása), a nyaláb egyik részének a másikra gyakorolt hatása így nem írható le. Ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy a geometriai optikai differenciálegyenletek csak reguláris tartományokban használhatók, azaz ott, ahol a hullám egyik irányból érkező része sosem fed át a másik irányból érkező részével (másképpen: amikor a fénysugarak nem keresztezik egymást). Emiatt a hiányosság miatt a differenciálegyenletes leírásmódot csak korlátozottan lehet alkalmazni. Helyette inkább az energia és fázisterjedés irányát reprezentáló fénysugarakat használják a fényeloszlás meghatározására. Minden fénysugárhoz rendelhető egy kis teljesítményadag, amelyet inkoherens (azaz diffúz) megvilágítás esetén az optikai rendszer tetszőleges felületére lehet összegezni, meghatározván ezzel az ott áthataladó teljesítményt, felületegységre vonatkoztatva pedig az intenzitást. Egyszerűen megfogalmazva: ahol sűrűbb a fénysugarak felület menti eloszlása ott nagyobb az intenzitás, ahol ritkább ott kisebb. Térben és időben koherens sugárzásokra (pl. lézerefény) az összegzést nem teljesítmény, hanem komplex amplitúdóra vonatkoztatva kell elvégezni – ilyen esetekben interferencia lép fel.

Az interferencia az a jelenség, amikor két v. több diszkrét hullám fázishelyes szuperpozíciója során a térben állóhullámkép alakul ki, ami elektromágneses hullámok esetén (általában) világos-sötét interferenciacsíkok formájában figyelhető meg. A modellezését gyakran geometriai optikai közelítésben szokták elvégezni, amikor az interferáló nyalábok fázisát a fénysugarak mentén mért úthosszból határozzák meg, a közegben mért hullámhosszanként mindig 2π radián fázistolást hozzáadva. A diszkrét szuperpozíció természetesen olyan esetekben is használható, amikor a független nyalábok terjedése csak diffrakcióval írható le.

Mi a továbbiakban a geometriai optikai leírásmóddal foglalkozunk. Mint azt már láttuk, az eikonál segítségével a tér fázisának hely- és időfüggése a következőképpen adható meg:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r})}, \quad (1)$$

ahol $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ jelöli a térerősség valós vektoramplitúdóját. Itt jól láthatóan ismét alkalmazzuk a pozitív térbeli fáziskésleltetés módszerét („avanzsáló” hullám). Geometriai optikai közelítésben a lokális hullámszámvektor:

$$\mathbf{k}_{lok} = k_0 \cdot \text{grad}(S(\mathbf{r}_0)). \quad (2)$$

Mivel $n = |\text{grad}(S)|$, ennek hossza a következő:

$$k_{lok} = k_0 \cdot n(\mathbf{r}_0) \Rightarrow \lambda_{lok}(\mathbf{r}_0) = \lambda_0 / n(\mathbf{r}_0). \quad (3)$$

A fény két pont (P_1 és P_2) közötti fáziskülönbsége tehát:

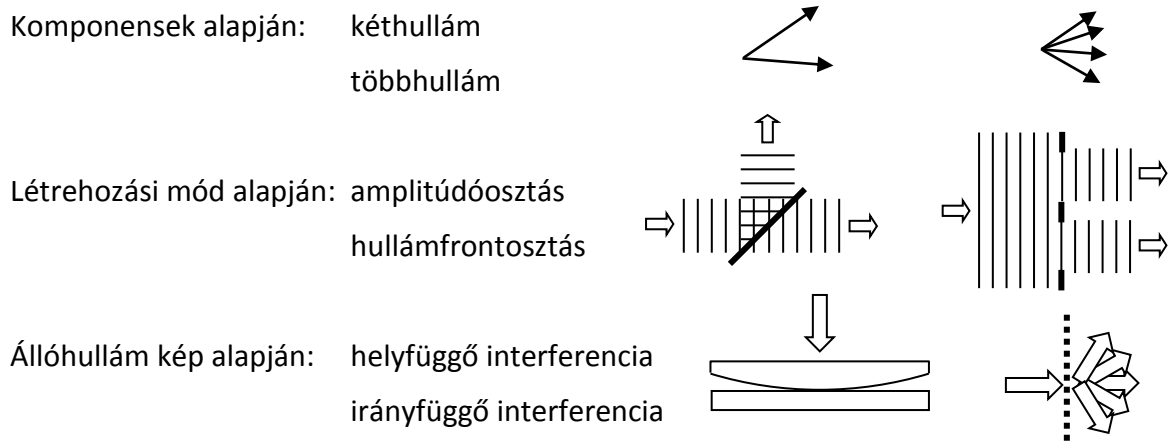
$$\Delta\varphi(P_1, P_2) = k_0 \cdot \int_g n(\mathbf{r}) dr = k_0 \cdot OPL(P_1, P_2), \quad (4)$$

ahol $g(\mathbf{r})$ egy tetszőleges fénysugár pályája. A téramplitúdót az egyszerűség kedvéért a továbbiakban skalár mennyiségnek fogjuk tekinteni, vagyis azt feltételezzük, hogy az EM tér polarizációs állapota a fényterjedés során kb. mindig megmarad:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \approx \tilde{E}(\mathbf{r}, t) \quad ; \quad \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \approx E_0(\mathbf{r}) . \quad (5)$$

Ez akkor igaz, ha a vizsgált fénynyalábok nem zárnak be túl nagy szöget egymással. Az általános esetet a teljesség kedvéért a jegyzet végén lévő mellékletben tárgyaljuk röviden.

AZ INTERFERENCIAJELENSÉGEK CSOPORTOSÍTÁSA



KÖZELÍTÉSEK, FELTÉTELEK, JELÖLÉSEK

közelítések: homogén, lineáris, izotróp közeg, skalár közelítés

feltétel 1: azonos frekvencia (különben nincs állóhullám)

feltétel 2: azonos polarizáció (különben nincs érzékelhető szuperpozíció)

feltétel 3: térben és időben koherens hullámok (láthatóság romlik, ld. bővebben később)

feltétel 4: a két hullám intenzitása legyen azonos (különben a láthatóság romlik)

jelölések: T – periódusidő

ν – frekvencia ($= 1/T$)

ω – körfrekvencia ($= 2\pi/T$)

λ – hullámhossz (közegben)

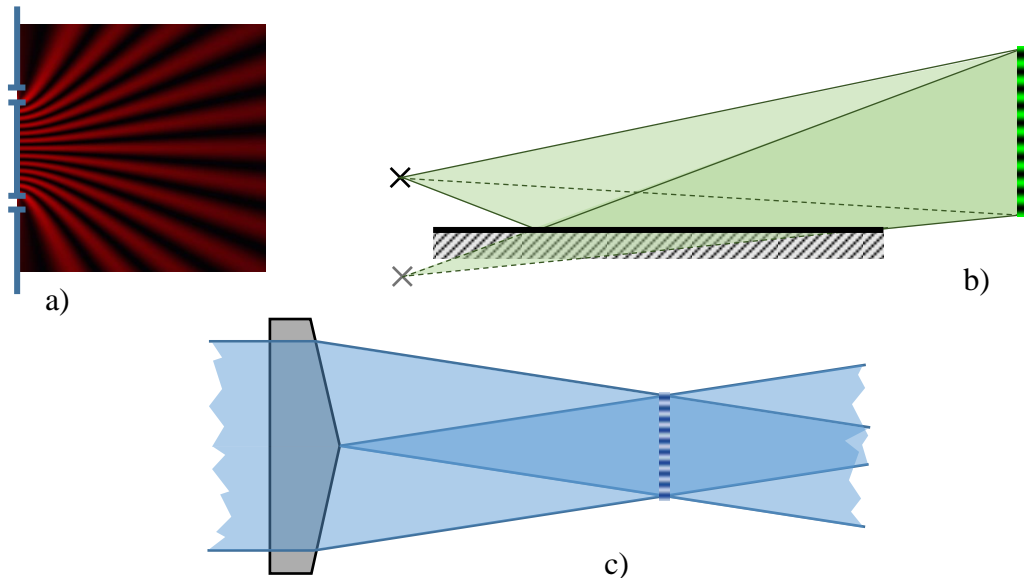
k – hullámszám ($= 2\pi / \lambda$)

v – fénysebesség közegben ($= \lambda \cdot \nu = \omega / k$)

MŰSZAKI PÉLDÁK KÉTHULLÁM INTERFERENCIÁRA

Hullámfrontosztó:

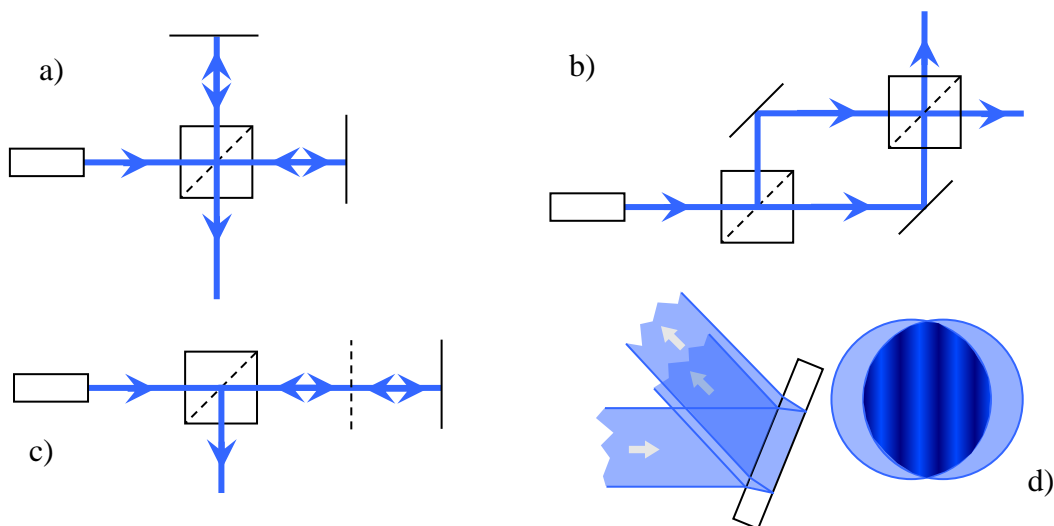
- Young-féle kétréses kísérlet
- Lloyd-tükör
- Fresnel-biprizma



Hullámfrontosztó interferométerek vázlatos felépítése. A Young-féle kétréses kísérletnél (a) feltüntettük a térerősségamplitúdó-négyzet térbeli eloszlását.

Amplitúdóosztó:

- a) Michelson-interferométer (Id. még Twyman-Green-interferométer)
- b) Mach-Zehnder-interferométer
- c) Fizeau interferométer (pl. légrés két üveglemez között, Newton-gyűrűk)
- d) Síkpárhuzamos lemez (nyíró interferométer – shearing interferometer)



Példák amplitúdóosztó interferométerekre. d) esetében tökéletesen párhuzamos lemezzel akkor látunk csíkokat, ha a beérkező hullám gömbi hullámfrontokkal rendelkezik.

A Michelson-interferométert távolságmérésre, Fourier-transzformációs spektrometriára, felületalak mérésre használják, a Mach-Zehnder holografikus elrendezésekben vagy gázok törésmutatójának mérésére alkalmazzák, Fizeau-interferométereket elsősorban felület és hullámfrontalak mérésre használnak, a nyíró interferométereket pedig lézerek kollimáltságának vizsgálatára/beállítására használják (azaz annak eldöntésére, mennyire sík a hullámfrontjuk).

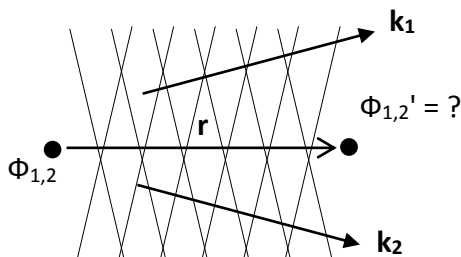
KÉT SÍKHULLÁM INTERFERENCIÁJA PARAXIÁLIS KÖZELÍTÉSBN

Vizsgáljuk meg a legegyszerűbb esetet, amikor két azonos irányban lineárisan polarizált, de nem azonos irányban terjedő síkhullám találkozik:

$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{r}, t) &= E_{01} \cdot \cos(-\omega t + \mathbf{k}_1 \mathbf{r} + \varphi_1) = E_{01} \cdot \cos(\Phi_1) \\ E_2(\mathbf{r}, t) &= E_{02} \cdot \cos(-\omega t + \mathbf{k}_2 \mathbf{r} + \varphi_2) = E_{02} \cdot \cos(\Phi_2) \end{aligned} \quad (6)$$

Ennél a tárgyalásnál kivételesen *valós* terminológiát használunk, az intenzitászámolásnál ui. így látványosabb lesz az időátlagolás hatása. Az eredő térerősség így:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t) \quad (7)$$



Alapprobléma

A teljesítménysűrűséget a Poynting-vektor hossza adja meg:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

amely dielektrikumban terjedő síkhullám esetén a következő alakú:

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{k}{\mu\omega} E(\mathbf{r}, t)^2 = v \cdot \varepsilon \cdot E(\mathbf{r}, t)^2. \quad (9)$$

A fenti képletben „v” jelöli a terjedési sebességet. S-nek T időre vett időátlaga az intenzitás:

$$I(\mathbf{r}, T) \equiv \langle S(\mathbf{r}, t) \rangle \Rightarrow I(\mathbf{r}) = v \cdot \varepsilon \cdot \langle E(\mathbf{r}, t)^2 \rangle, \quad (10)$$

mivel harmonikus jel esetén „I” T-től független, ha $T \rightarrow \infty$. Amennyiben \mathbf{k}_1 közel párhuzamos \mathbf{k}_2 -vel, azaz paraxiális közelítésben vagyunk, E helyére síkhullámok összegét is beírhatjuk az eredő intenzitás meghatározása végett. Nagyszögű fényterjedés esetén \mathbf{E}_1 és \mathbf{E}_2 nem párhuzamos, ami bonyolultabbá teszi a tárgyalást (ld. melléklet). Tehát paraxiális, skalár közelítésben az interferenciakép intenzitása a következő:

$$I(\mathbf{r}) = v \cdot \varepsilon \cdot \langle (E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t))^2 \rangle. \quad (11)$$

A négyzetreemelés argumentumába behelyettesítve az (6) térerősségeket:

$$(E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t))^2 = E_{01}^2 \cdot \cos^2(\Phi_1) + E_{02}^2 \cdot \cos^2(\Phi_2) + 2E_{01}E_{02} \cdot \cos(\Phi_1) \cdot \cos(\Phi_2). \quad (12)$$

A vegyes szorzat a $2\cos(\alpha)\cos(\beta) \equiv \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$ azonosság felhasználásával:

$$2E_{01}E_{02} \cdot \cos(\Phi_1) \cdot \cos(\Phi_2) = E_{01}E_{02} \cdot (\cos(\Phi_1 - \Phi_2) + \cos(\Phi_1 + \Phi_2)). \quad (13)$$

A fáziskülönbséget leíró tag (6) alapján időfüggetlen:

$$\delta(\mathbf{r}) = \Phi_1 - \Phi_2 = (\omega - \omega) \cdot t + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + (\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \Delta\varphi. \quad (14)$$

A fázisok összege pedig:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 2\omega \cdot t + (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + (\varphi_1 + \varphi_2), \quad (15)$$

aminek a koszinusza az időátlagolás után zérus. Így (11)-ből a következő marad:

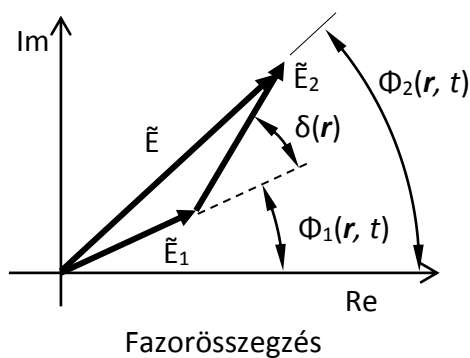
$$I(\mathbf{r}) = v \cdot \varepsilon \cdot \left[\frac{E_{01}^2 + E_{02}^2}{2} + E_{01} \cdot E_{02} \cdot \cos(\delta(\mathbf{r})) \right]. \quad (16)$$

Mivel a két nyaláb ω -ja azonos, az átlagolásnál az időfüggő tagok kiesnek, tehát interferencia lép fel: az intenzitáskép időben állandó, és a „cos” függvény miatt periódikusan változik δ -val.

Az interferencia komplex jelölésmóddal is jól leírható:

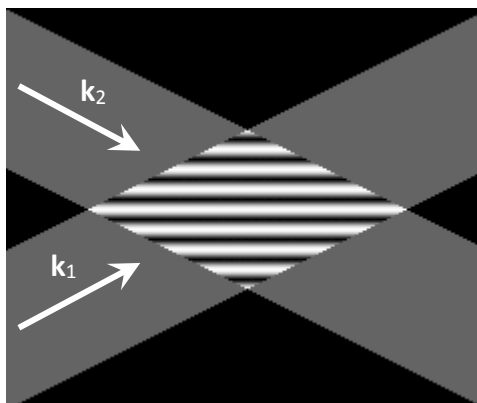
$$I = v\varepsilon \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^* = v\varepsilon \cdot (\vec{E}_1\vec{E}_1^* + \vec{E}_2\vec{E}_2^* + \vec{E}_1\vec{E}_2^* + \vec{E}_2\vec{E}_1^*), \quad (17)$$

ami ugyanarra vezet mint (16), csak elrejtí elölünk az időátlagolást. Ha a térerősségeket a komplex síkon ábrázoljuk, a jelenség a következő módon értelmezhető:

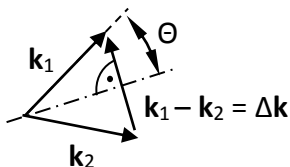


$\Delta\varphi$ -n keresztül a fáziskülönbséghez hozzáadódhat optikai úthosszkülönbség (OPD – Optical Path Difference), vagy időkésteltesítés (τ):

$$OPD \equiv OPL_1 - OPL_2 : \Delta\varphi = 2\pi/\lambda_0 \cdot OPD ; \tau = t_1 - t_2 : \Delta\varphi = \omega \cdot \tau \quad (18)$$



CSÍKSEREG PERIÓDUSÁNAK MEGHATÁROZÁSA



(14)-ből látszik, hogy a csíksereg hullámszámvektora formailag mintha $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ lenne. Ebből a periódus (p) könnyen megkapható:

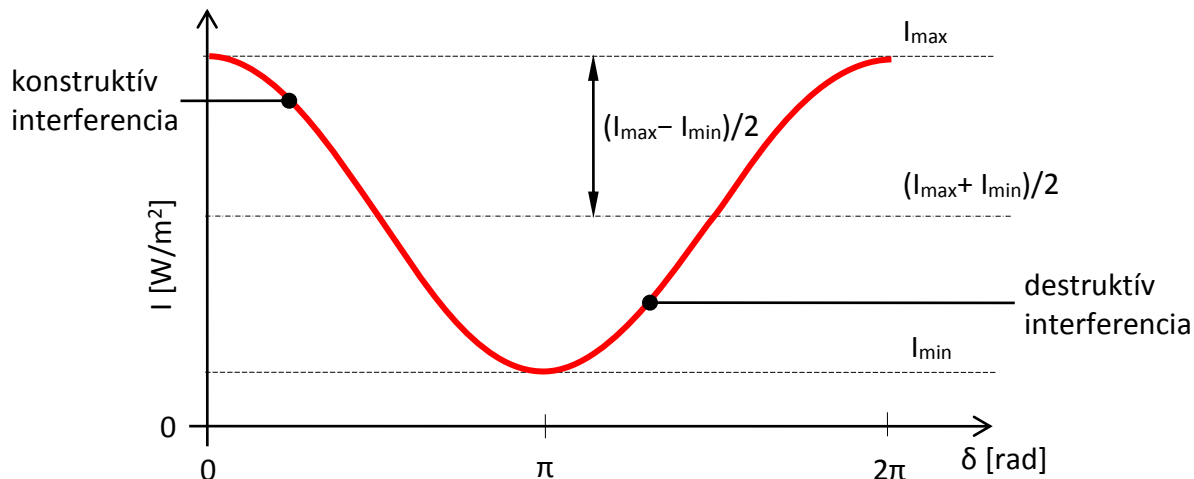
$$p = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|} = \frac{2\pi}{2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin \Theta} = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \Theta}. \quad (19)$$

AZ INTERFERENCIACSÍKOK LÁTHATÓSÁGA

Az interferenciajelenségek erősségét az ún. láthatósággal jellemezzük. Legyen a két hullám intenzitása külön-külön I_1 és I_2 . Ekkor (16) a következő alakú lesz:

$$I_1 = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} \cdot E_{01}^2 ; I_2 = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} \cdot E_{02}^2 \Rightarrow I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\delta(\mathbf{r})) \quad (20)$$

Az $I(\delta)$ függvényt az alábbi diagrammon ábráztuk.



A láthatóság definíciója a következő, ami (20) alapján számolható ki:

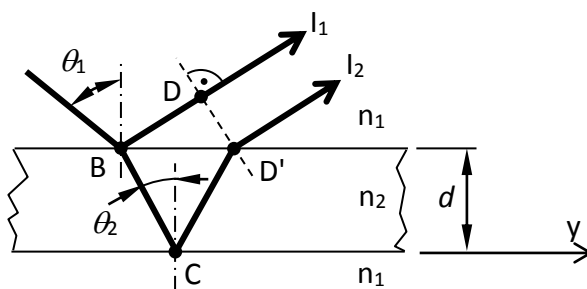
$$V \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2 \cdot E_{01} \cdot E_{02}}{E_{01}^2 + E_{02}^2} \quad (21)$$

$V_{\max} = 1$, ha $I_1 = I_2$. Ebben az esetben:

$$I(\mathbf{r}) = 4 \cdot I_1 \cdot \cos^2\left(\frac{\delta(\mathbf{r})}{2}\right). \quad (22)$$

PÉLDA: SÍKPÁRHUZAMOS LEMEZ

A felületre beeső, áthaladó és visszavert síkhullámokat egy-egy fénysugárral reprezentáljuk.



Feltétel: a reflektancia kicsi: $R \ll 1$ (pl. levegő-üveg esetén 4% merőleges beesésnél).

Mivel $I_1 \approx I_2$, az interferenciajelenség kéthullám közelítésben tárgyalható. A felületről visszavert két síkhullám közötti fáziskülönbség az optikai úthossz alapján számolható:

$$OPD_{BD'-BD} = n_2 \cdot 2d / \cos(\theta_2) - n_1 \cdot 2d \cdot \sin(\theta_1) \cdot \text{tg}(\theta_2) = 2d \cdot n_2 \cdot \cos(\theta_2) \quad (23)$$

Mivel $n_2 > n_1$ esetén B pontban (fordított esetben C pontban) az elektromágneses tér reflexió esetén π fázisugrást szenved, a $BD'-BD$ közötti fázistolás:

$$\delta = OPD_{BD'-BD} \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} + \pi = \frac{4\pi \cdot n_2 d}{\lambda_0} \cdot \cos(\theta_2) + \pi . \quad (24)$$

(20) egyenlet alapján konstruktív interferenciát (magnövekedett reflexiót) akkor látunk, ha $\delta = m \cdot 2\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Destruktív az interferencia (csökken a reflexió), ha $\delta = m \cdot 2\pi + \pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Merőleges beesésnél, $d \rightarrow 0$ esetén $\delta \rightarrow \pi$, azaz a reflexió zérus, a lemez „eltűnik”.

Haidinger-csíkok: ha $d(y) = \text{const.}$, az interferenciakép θ_2 -irányfüggő.

Newton-gyűrűk: ha $\theta_2 = \text{const.}$, akkor az interferenciakép y -helyfüggő $d(y)$ -on keresztül.

AZ INTERFERENCIA IDŐBELI KOHERENCIA-FELTÉTELE

Interferencia időben koherens, vagy részlegesen koherens nyalábok szuperpozíciója esetén lép fel. Ez utóbbi esetben az egyik nyalábot alkotó ω körfrekvenciájú spektrumkomponensek csak a másik nyaláb azonos körfrekvenciájú komponenseivel képesek interferálni. Ha a két nyaláb között Δt az időkülönbség, minden nyalábpárra a fáziskülönbség más: $\delta(\omega)$. Akkor látunk interferenciát, ha a spektrum összes (ω_1 -től ω_2 -ig terjedő) ω -jára teljesül az alábbi feltétel (ld. (18) összefüggés):

$$2\pi \gg \delta(\omega_1) - \delta(\omega_2) = \omega_1 \cdot \Delta t - \omega_2 \cdot \Delta t = \Delta\omega \cdot \Delta t \rightarrow 1 \gg \Delta\nu \cdot \Delta t \quad (25)$$

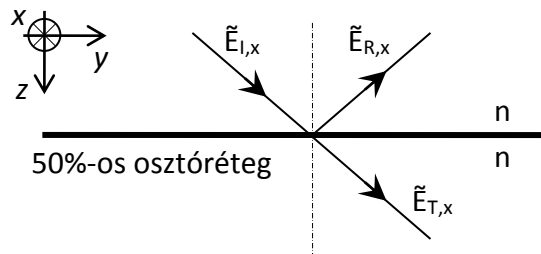
Egyenlőség esetén:

$$\tau_c \equiv \Delta t \rightarrow \tau_c = 1/\Delta\nu \rightarrow \tau_c \gg \Delta t \quad \text{v.} \quad L_L = c \cdot \tau_c \gg OPD, \quad (26)$$

ahol L_L jelöli a longitudinális koherenciahosszat. A jelenséget a statisztikus optikával foglalkozó előadáson tárgyaljuk részletesen.

HOVÁ LESZ A FÉNY KÉTHULLÁM-INTERFEROMÉTEREKBEN?

A fény által hordozott teljesítményt interferenciával nem lehet eltüntetni, csak a térbeli vagy időbeli eloszlását megváltoztatni ill. átrendezni! (Energiamegmaradás törvénye.)



Vizsgáljuk meg a legtöbb interferométerben alkalmazott 50%-os intenzitásosztó felület hatását a térerősségvektorra. Az egyszerűség kedvéért csak az \mathbf{E} vektor beesési síkra merőleges (x) komponensét tekintjük, ami „S” polarizációs állapotnak felel meg, vagyis ha a beeső fény (E_i) x -irányban polarizált, áthaladás (E_T) és visszaverődés (E_R) után a polarizációs állapota nem változik meg. A többi térvektor komponensre a vizsgálat analóg módon lefolytatható. A vizsgált tér monokromatikus, ezért leírására a komplex formalizmust használjuk, az időfüggő $e^{-i\omega t}$ tényező elhagyásával. Az ábrának megfelelően, „ n ” törésmutatójú közegben lévő 50%-os osztóréteg esetén a komplex térerősség-amplitúdókra és intenzitásokra igazak az alábbi egyenletek.

Összintenzitás állandó – energiamegmaradás:

$$|\tilde{E}_{l,x}|^2 = |\tilde{E}_{T,x}|^2 + |\tilde{E}_{R,x}|^2 \quad (27)$$

50%-os intenzitás osztási arány:

$$|\tilde{E}_{T,x}|^2 = |\tilde{E}_{R,x}|^2 \quad (28)$$

\tilde{E} -tangenciális komponensére vonatkozó határfeltétel:

$$\tilde{E}_{T,x} = \tilde{E}_{l,x} + \tilde{E}_{R,x} \quad (29)$$

(27) és (29)-ből:

$$|\tilde{E}_{T,x}|^2 + |\tilde{E}_{R,x}|^2 = |\tilde{E}_{T,x} - \tilde{E}_{R,x}|^2 \rightarrow \tilde{E}_{T,x} \cdot \tilde{E}_{R,x}^* = -\tilde{E}_{T,x}^* \cdot \tilde{E}_{R,x} \rightarrow \tilde{E}_{T,x}^* = -\frac{\tilde{E}_{T,x} \tilde{E}_{R,x}^*}{\tilde{E}_{R,x}} \quad (30)$$

(28) annak felel meg, hogy:

$$\tilde{E}_{T,x} \cdot \tilde{E}_{T,x}^* = \tilde{E}_{R,x} \cdot \tilde{E}_{R,x}^* \quad (31)$$

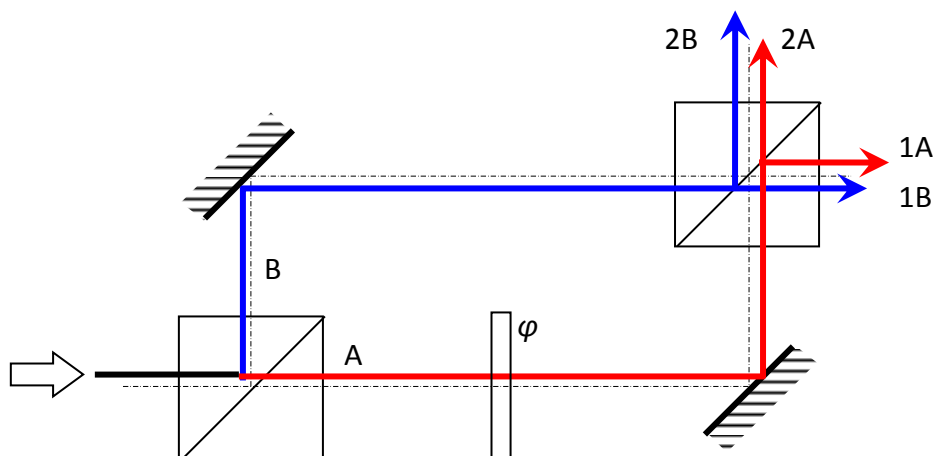
Ezt összevetve (30)-al a következőt kapjuk:

$$\tilde{E}_{T,x} \cdot \tilde{E}_{T,x} = -\tilde{E}_{R,x} \cdot \tilde{E}_{R,x} \rightarrow \tilde{E}_{R,x} = \pm i \cdot \tilde{E}_{T,x} \quad (32)$$

A \pm előjel értékét az osztóréteg fizikai megvalósítása határozza meg; mi a pozitívát választjuk, az intenzitásokra kapott értékekre ez amúgy sem lesz hatással. A fenti összefüggés azt jelenti, hogy bármilyen módon is állítunk elő egy 50%-os osztóréteget (dielektrikumtükör, fémréteg stb.), a visszavert és áthaladó térerősségek között éppen $\pi/2$ fáziskülönbség van! A fenti egyenletekből az alábbiak is levezethetők:

$$\tilde{E}_{R,x} = 2^{-1/2} \cdot e^{i \cdot 3/4 \pi} \cdot \tilde{E}_{l,x} \quad \text{illetve} \quad \tilde{E}_{T,x} = 2^{-1/2} \cdot e^{i \cdot 1/4 \pi} \cdot \tilde{E}_{l,x} \quad (33)$$

Vizsgáljuk most meg az interferenciát egy Mach-Zehnder interferométerben, ahol a fényút „A” ágában egy φ fáziskésleltető lemez (retarder) van.



Ha a belépő nyaláb \tilde{E}_l , akkor (33) segítségével az \tilde{E}_1 és \tilde{E}_2 kilépő nyalábok a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= \tilde{E}_{1A} + \tilde{E}_{1B} = \tilde{E}_l \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot 1/4 \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot 3/4 \pi} \cdot e^{i \varphi} + \tilde{E}_l \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot 3/4 \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot 1/4 \pi} \\ \tilde{E}_2 &= \tilde{E}_{2A} + \tilde{E}_{2B} = \tilde{E}_l \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot 1/4 \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot 1/4 \pi} \cdot e^{i \varphi} + \tilde{E}_l \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot 3/4 \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot 3/4 \pi} \end{aligned} \quad (34)$$

Az egyenleteket egyszerűsítve:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1 &= \frac{\tilde{E}_I}{2} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{i\varphi} + \frac{\tilde{E}_I}{2} \cdot e^{i\pi} = -\frac{\tilde{E}_I}{2} (e^{i\varphi} + 1) \\ \tilde{E}_2 &= \frac{\tilde{E}_I}{2} \cdot e^{i\frac{1}{2}\pi} \cdot e^{i\varphi} + \frac{\tilde{E}_I}{2} \cdot e^{-i\frac{1}{2}\pi} = i \cdot \frac{\tilde{E}_I}{2} (e^{i\varphi} - 1)\end{aligned}\quad (35)$$

Ebből az intenzitások:

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{v\varepsilon}{2} |\tilde{E}_1|^2 = \frac{v\varepsilon}{2} \frac{|\tilde{E}_I|^2}{4} \cdot (1 + 1 + e^{i(\pi+\varphi-\pi)} + e^{i(-\pi-\varphi+\pi)}) = \frac{I_I}{4} \cdot (2 + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ I_2 &= \frac{v\varepsilon}{2} |\tilde{E}_2|^2 = \frac{v\varepsilon}{2} \frac{|\tilde{E}_I|^2}{4} \cdot (1 + 1 + e^{i(\frac{1}{2}\pi+\varphi+\frac{1}{2}\pi)} + e^{i(-\frac{1}{2}\pi-\varphi-\frac{1}{2}\pi)}) = \frac{I_I}{4} \cdot (2 + e^{i(\pi+\varphi)} + e^{-i(\pi+\varphi)}),\end{aligned}\quad (36)$$

ahol I_I a megvilágító nyaláb intenzitása. A fenti egyenletekből adódik a végeredmény:

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{I_I}{2} \cdot (1 + \cos(\varphi)) \\ I_2 &= \frac{I_I}{2} \cdot (1 + \cos(\varphi + \pi))\end{aligned}\quad (37)$$

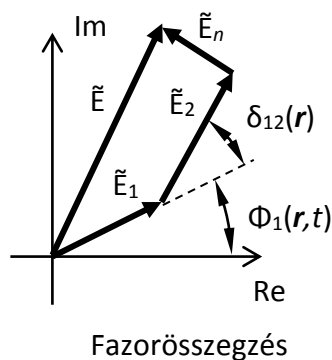
Azaz, az interferométer után kapott két nyaláb között mindig π fáziskülönbség van, vagyis az 1. és 2. nyalábok MINDIG ellenfázisban vannak. Más szóval, a Mach-Zehnder interferométernél (ill. bármely másíknál) a fény hol az egyik kimenő nyaládba megy, hol a másikba, az úthosszkülönbségnek (φ fáziskülönbségnek) megfelelően. Ha $\varphi = 0$, akkor az összes fény az 1. nyaládba megy. Ugyanígy a Michelsonnál a fény vagy elhagyja az interferométert, vagy visszaverődik a fényforrás felé.

„N” DB SÍKHULLÁM INTERFERENCIÁJA (TÖBBHULLÁM INTERFERENCIA)

Amennyiben nem két, hanem több, azonos ω körfrekvenciájú síkhullám interferenciáját vizsgáljuk (továbbra is paraxiális, skalár közelítésben), (7)-ből a következő lesz:

$$\tilde{E} = \sum_{n=1}^N \tilde{E}_{0n} = \sum_{n=1}^N E_{0n} \cdot e^{i\Phi_n} \quad (38)$$

Mivel a kéthullám interferenciánál már láttuk az időátlagolás hatását, a továbbiakban a sokkal egyszerűbb komplex formalizmust használjuk.



Az intenzitás értéke:

$$I = \langle S \rangle = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left| \sum_{n=1}^N E_{0n} \cdot e^{i\Phi_n} \right|^2 \right\} = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^N E_{0n}^2 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \sum_{m=1}^N E_{0n} E_{0m} \cdot e^{i(\Phi_m - \Phi_n)} \right\}. \quad (39)$$

A vegyes szorzatban minden tag kétszer szerepel. Mivel ezek páronként komplex konjugáltjai egymásnak, a képzetes rész mindenhol kiesik. Az eredmény:

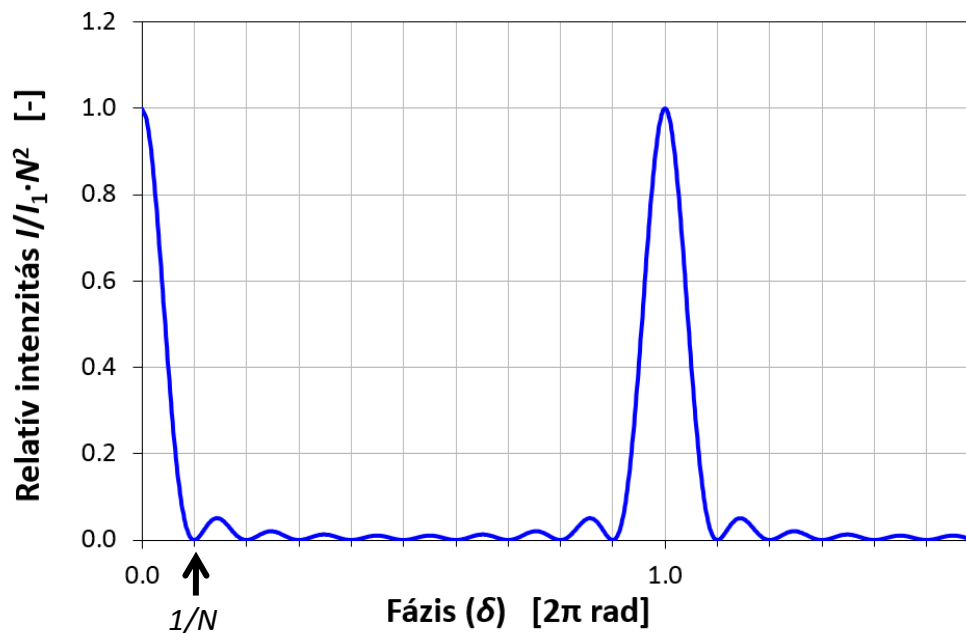
$$I = \sum_{n=1}^N I_n + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \sum_{m=1}^N \sqrt{I_n I_m} \cdot \cos(\Phi_m - \Phi_n) \quad (40)$$

Feltevés: $\delta_{n+1,n} = \Phi_{n+1} - \Phi_n = \delta = \text{const.}$ és $I_n = I_1 = \text{const.}$

A fenti feltételezések mellett a sorösszegzés analitikusan elvégezhető:

$$I(\delta) = \frac{I_1}{N^2} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{N \cdot \delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)^2; \quad m \equiv \frac{\delta}{2\pi}. \quad (41)$$

A kapott interferogram $N = 10$ hullám esetére az alábbi ábrán látható. Konstruktív interferenciát ekkor kapunk: $\delta_m = m \cdot 2\pi$, ahol $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – itt vannak a nagy csúcsok. A minimumhelyek távolsága pedig $\Delta\delta = 2\pi/N$, összesen $N-1$ van két csúcs között.



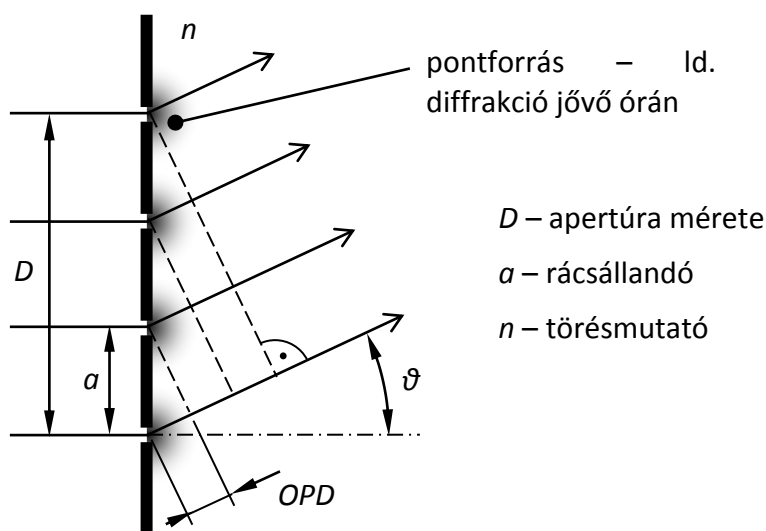
Interferogram $N = 10$ db hullámkomponens esetén.

PÉLDÁK TÖBBHULLÁM-INTERFERENCIÁRA

- diffrakciós rács
- síkpárhuzamos lemez ($\rho \gg 0$)
- Fabry-Perot interferométer (v. etalon)
- vékonyréteg struktúrák (mátrixos leírás mód)

DIFFRAKCIÓS RÁCS

Egy egyszerű diffrakciós rács felépítése az alábbi ábrán látható. A struktúra egy dimenziós, azaz a papír síkjára merőleges irányban változatlan alakú. A rács N darab rést tartalmaz egy átlátszatlan ernyőn, amelyek mérete összemérhető a hullámhosszal (λ_0), így a fénydiffrakció miatt belőlük gyakorlatilag hengeres hullámfrontok terjednek tovább – ezek interferenciáját vizsgáljuk a távotérben.



A feladat két szomszédos pontforrásból a végtelent elérő hullámok fáziskülönbségének (δ) meghatározása. Amennyiben ez ismert, a fent tárgyalt többhullám interferencia mindkét feltétele fennáll, vagyis az interferogram (41) alapján kiértékelhető. A tér egy adott ϑ irányában, a rácstól nagy távolságban a hengeres hullámfrontok lokálisan síkhullámnak tekinthetők. E hullámfrontokat visszavetítve a rácsra (ld. szaggatott vonalak az ábrán) a fáziskülönbség az egyik rés és a szomszédos résnek megfelelő hullámfront közötti úthosszkülönbségből meghatározható:

$$OPD = n \cdot a \cdot \sin(\vartheta)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot OPD = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n \cdot a \cdot \sin(\vartheta) \quad (42)$$

(41) alapján konstruktív interferencia a következő diszkrét irányokban lép föl:

$$\delta_m = m \cdot 2\pi \Rightarrow \sin(\vartheta_m) = m \cdot \frac{\lambda_0}{n \cdot a} = m \cdot \frac{\lambda}{a}, \quad (43)$$

ahol m egész szám jelöli az ún. diffrakciós rendek sorszámát. Minél nagyobb a hullámhossz, annál nagyobb a rendek iránya közötti távolság. A valóságban a diffrakciós rács réseiből kiinduló hullámok intenzitása nem egyforma minden ϑ irányban, hanem a rések konkrét alakjától, méretétől (általában a transzmissziójuk térbeli eloszlásától) függő mértékben nullához tart amint $\vartheta \rightarrow 0$, ezért a diffrakciós rendek intenzitása is fokozatosan csökken, ahogyan m növekszik. Emellett a diffrakciós rendek száma is véges: mivel $\sin(\vartheta)$ max. értéke 1, az m legnagyobb értéke

$$m_{\max} = \frac{a}{\lambda}. \quad (44)$$

Felbontóképesség: $R \equiv \lambda/\Delta\lambda$ – azért így definiálták, mert ez a mennyiség egy adott rács esetén hullámhosszfüggetlen állandó (ld. (42) és alább).

Rayleigh-kritérium: Amikor $I(\lambda)$ minimuma $I(\lambda+\Delta\lambda)$ maximumához esik, ld. ábra.

Ez matematikailag azt jelenti, hogy:

$$\sin(\vartheta_m(\lambda)) + \Delta \sin(\vartheta_m(\lambda)) = \sin(\vartheta_m(\lambda + \Delta\lambda)) , \quad (45)$$

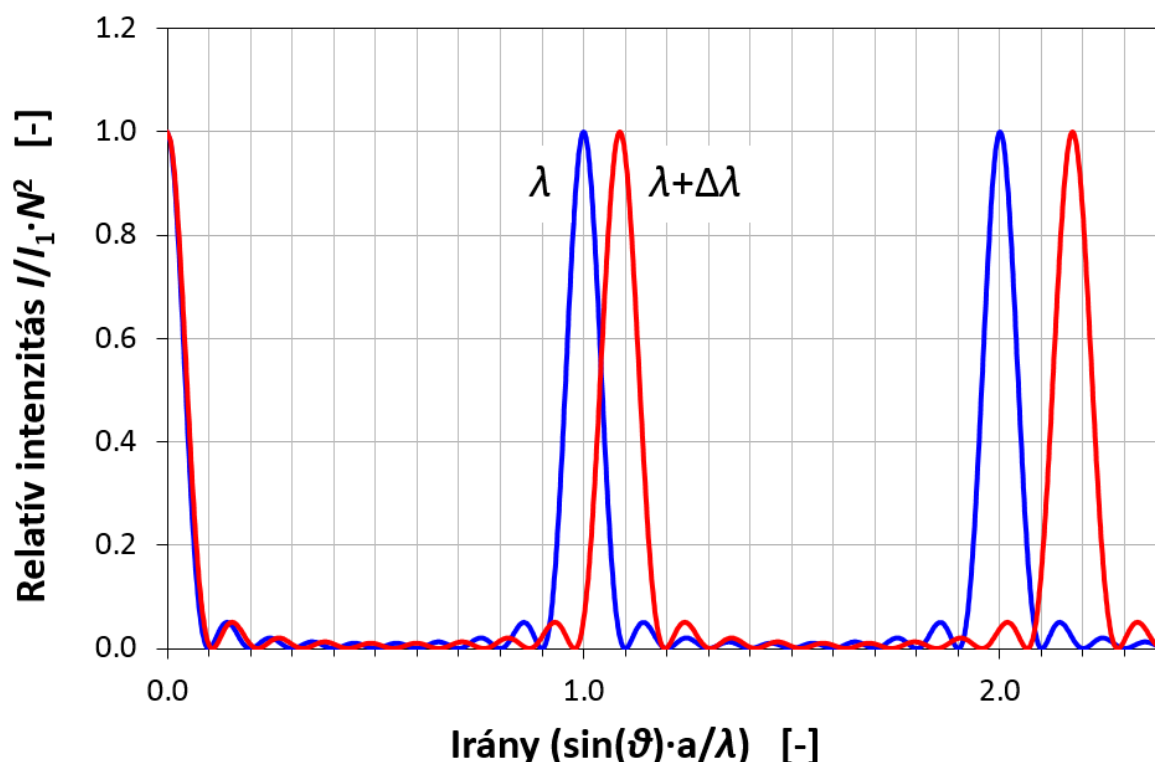
ahol $\Delta \sin(\vartheta_m(\lambda))$ az első minimumhelyre mutat. A feltételből meghatározható „ R ”:

$$\left. \begin{aligned} \delta_m &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin(\vartheta_m(\lambda)) = m \cdot 2\pi \Rightarrow \sin(\vartheta_m(\lambda)) = \frac{m \cdot \lambda}{a} \\ \Delta\delta &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \Delta \sin(\vartheta_m(\lambda)) = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \Delta \sin(\vartheta_m(\lambda)) = \frac{\lambda}{a \cdot N} \\ \delta_m(\lambda + \Delta\lambda) &= m \cdot 2\pi \Rightarrow \sin(\vartheta_m(\lambda + \Delta\lambda)) = \frac{m \cdot (\lambda + \Delta\lambda)}{a} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$\boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = R = m \cdot N = m \cdot \frac{D}{a}} .$$

Azaz minél nagyobb a rács D apertúrája a rácsállandóhoz képest (vagy más szóval minél több rés van az apertúrán belül), annál nagyobb a felbontás, tehát annál közelebbi spektrumvonalak is felbonthatók a ráccsal. A felbontóképesség m -el is nő.



Diffrakciós rács interferogrammmja $N = 10$ db rés esetén. A pirossal ábrázolt függvénynél a hullámhosszat $\Delta\lambda$ -val megnöveltük a kékhez képest úgy, hogy éppen a Rayleigh-kritérium teljesüljön.

AZ INTERFERENCIA MŰSZAKI ALKALMAZÁSÁNAK TERÜLETEI

- spektroszkópia
- mérés technika
- holográfia
- interferenciaszűrők
- lézerek

MELLÉKLET - NAGYSZÖGŰ INTERFERENCIA

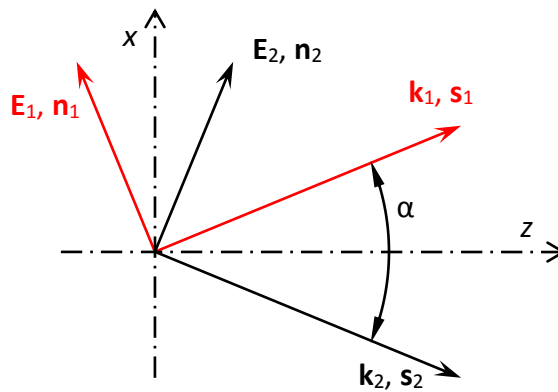
A fénymodelleket leíró előadásjegyzet (60) egyenlete alapján dielektrikumban terjedő síkhullám esetén a Poynting-vektor időátlaga (\mathbf{s} jelöli a hullámfrontnormális irányába mutató egységvektort):

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} = \frac{1}{2\mu\omega} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*) \} = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} \mathbf{E} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E}^*). \quad (47)$$

A valósrészképzést elhagyjuk, mivel dielektrikumokban \mathbf{E} és \mathbf{H} mindig fázisban vannak, valamint nem jelöltük a térérővektorok helyfüggését. A következő két tetszőleges szöget bezáró harmonikus síkhullám interferenciáját vizsgáljuk:

$$\tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1 \cdot e^{i\Phi_1(\mathbf{r})} \text{ és } \tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2 \cdot e^{i\Phi_2(\mathbf{r})}. \quad (48)$$

Az elektromos térerősségek legyenek az x - z síkban (P-polarizáció). Ugyanez a vizsgálat az S-polarizációra a továbbiakban leírtakkal analóg módon lefolytatható.



(47)-ba beírva a két síkhullám térerősségeinek az összegét (azaz $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ és $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ -t):

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} (\tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_2) \times (\mathbf{s}_1 \times \tilde{\mathbf{E}}_1^* + \mathbf{s}_2 \times \tilde{\mathbf{E}}_2^*). \quad (49)$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} (\tilde{\mathbf{E}}_1 \times (\mathbf{s}_1 \times \tilde{\mathbf{E}}_1^*) + \tilde{\mathbf{E}}_2 \times (\mathbf{s}_2 \times \tilde{\mathbf{E}}_2^*) + \tilde{\mathbf{E}}_1 \times (\mathbf{s}_2 \times \tilde{\mathbf{E}}_2^*) + \tilde{\mathbf{E}}_2 \times (\mathbf{s}_1 \times \tilde{\mathbf{E}}_1^*)). \quad (50)$$

A vektoriális szorzatokat $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \equiv (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ alapján felbontva:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} ((\tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1^*) \cdot \mathbf{s}_1 + (\tilde{\mathbf{E}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2^*) \cdot \mathbf{s}_2 + (\tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2^*) \cdot \mathbf{s}_2 + (\tilde{\mathbf{E}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1^*) \cdot \mathbf{s}_1 - (\tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \mathbf{s}_2) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2^* - (\tilde{\mathbf{E}}_2 \cdot \mathbf{s}_1) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1^*). \quad (51)$$

Az egyforma komponensek szorzatainál kiesett az $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ -nek megfelelő tag, mivel \mathbf{k} merőleges \mathbf{E} -re. A kereszttagoknál ugyanez nem mondható el, ezért benne maradtak az összefüggésben. Paraxiális közelítésben ezt a két utolsó tagot hanyagoljuk el, valamint felhasználva, hogy \mathbf{s}_1 közel párhuzamos \mathbf{s}_2 -vel, a tagokat skalárisan összegezzük. Az intenzitás ekkor

$$I(\mathbf{r}) = \langle S(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{v \cdot \varepsilon}{2} ((\tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1^*) + (\tilde{\mathbf{E}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2^*) + (\tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2^*) + (\tilde{\mathbf{E}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1^*)), \quad (52)$$

ami valóban ekvivalens (11)-el, illetve (16)-el. Amennyiben $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| = E$, de a két hullám nem egyirányú, hanem tetszőleges szöget zár be, (51)-ből a következő lesz:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = & \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}{2} \left(2E^2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathbf{s} + 2E^2 \cos(\delta) \cos(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathbf{s} + \right. \\ & \left. + \tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2^* \sin(\alpha) \cdot \mathbf{n}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1^* \sin(\alpha) \cdot \mathbf{n}_1 \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Itt \mathbf{s} a két hullámszámvektor szögfelezőjének irányába, \mathbf{n}_1 és \mathbf{n}_2 pedig a térerősségvektorok irányába mutató egységvektor. Ez utóbbiak különbsége éppen \mathbf{s} irányába mutat, így:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = & \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}{2} \left(2E^2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathbf{s} + 2E^2 \cos(\delta) \cos(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathbf{s} + \right. \\ & \left. + 2E^2 \cos(\delta) \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathbf{s} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

A fenti egyenletekben a fáziskülönbséget a szokásos módon jelöltük: $\delta \equiv \Phi_1 - \Phi_2$. Átalakítva:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot E^2 \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos(\delta) \cos(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos(\delta) \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \cdot \mathbf{s}, \quad (55)$$

ami trigonometrikus azonosságok felhasználásával roppantul leegyszerűsödik:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot E^2 (1 + \cos(\delta)) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathbf{s}. \quad (56)$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a teljesítmény a szögfelező irányába terjed, $\langle \mathbf{S} \rangle$ abszolútértéke pedig a keresett intenzitás:

$$\boxed{I(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot E^2 (1 + \cos(\delta(\mathbf{r}))) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (57)$$

A fenti képlet értelmezése igen egyszerű: minél nagyobb a nyalábok által bezárt α szög, a szögfelező irányába egyre kevesebb teljesítmény terjed, emiatt az intenzitás koszinuszosan gyengül. Mivel a levezetés S- és P-polarizációra ugyanazt adja, az (57) összefüggés két tetszőlegesen, de azonos irányban polarizált hullámra igaz. Amikor a két hullám terjedési iránya $\alpha = 180^\circ$ -ot zár be egymással, azaz pont egymással szembe haladnak, tökéletes állóhullám jön létre: a térerősség továbbra is harmonikusan rezeg, vannak csomópontok és duzzadási helyek, de energia nem terjed semmilyen irányba.