Fizika 1i, 2020 őszi félév, 5. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

F1. Ha az $r/2$ sugarú részt visszahelyezzük, akkor az r sugarú körlap középpontja lesz a tömegközéppont helye. Ezért ha az $r/2$ sugarú és a lyukas körlapot tekintjük, akkor ezek közös tömegkőzéppontja a teljes körlap középpontjában van. Legyen a lyukas körlap tömegközéppontja x távolságra a teljes körlap középpontjától. Ha az r sugarú körlap tömege m, akkor az $r/2$ sugarúé

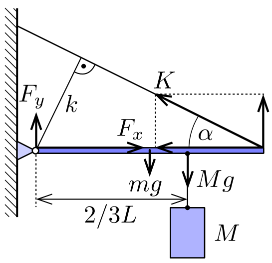
$$\frac{(r/2)^2\pi}{r^2\pi}\cdot m=\frac{m}{4}.$$

A közös tömegközéppontra felírhatjuk, hogy

$$\frac{m}{4}\cdot\frac{r}{2}=\frac{3m}{4}\cdot x$$

(a teljes körlapot középen alátámasztva, nem billen le, a forgatónyomatékok kiegyenlítik egymást). Ebből az egyenletből kapjuk a lyukas lemez tömegközéppontjának helyét: $x=r/6$.

F2. *a*) Rajzoljuk be a rúdra ható erőket. A rendszer egyensúlyban van, ezért a rudat az M tömegű test Mg erővel húzza az akasztási pontban.



A rúd akkor van egyensúlyban, ha nemcsak a rá ható erők eredője nulla, hanem bármelyik tengelyt tekintve a forgatónyomaték is eltűnik. Mivel a csuklóban ismeretlen F erő hat (az ábrán vízszintes és függőleges irányú komponensekre felbontva), ezért érdemes erre vonatkoztatva felírni a forgatónyomatékok egyensúlyát:

$$mg\cdot\frac{L}{2}+Mg\cdot\frac{2L}{3}=K\cdot k,$$

ahol $k=L\sin\alpha$ a K fonálerő erőkarja. Innen kifejezhetjük a fonálerőt:

$$K=\frac{\frac{mg}{2}+\frac{2Mg}{3}}{\sin\alpha}.$$

b) Az erőegyensúly miatt függőleges irányban:

$$F_y+K\sin\alpha=(m+M)g,$$

ahonnan felhasználva az *a*) rész eredményét

$$F_y=(m+M)g-\frac{mg}{2}-\frac{2Mg}{3}=\frac{mg}{2}+\frac{Mg}{3}.$$

Vízszintes irányban:

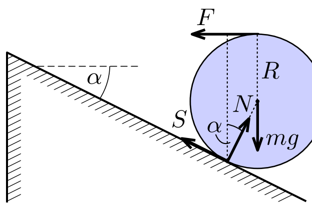
$$F_x=K\cos\alpha=\left(\frac{mg}{2}+\frac{2Mg}{3}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

A csuklóban ható erő nagysága és iránya:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2},\quad \tan\varphi=\frac{F_y}{F_x},$$

ahol φ a csuklóerő vízszintessel alkotott szöge.

F3. Ismét a hengerre ható erők berajzolásával kezdjük a megoldást.



A forgatónyomatékok összege nulla a henger lejtővel érintkező pontjára:

$$mgR\sin\alpha=F(R+R\cos\alpha).$$

Tehát a kérdéses erő:

$$F=mg\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

A tapadási súrlódási erőre $S\le\mu_0 N$. A henger középpontjára nézve a forgatónyomatékok egyensúlya: $FR=SR$, azaz $S=F$. A nyomóerőt a lejtőre merőleges irányban felírt erőegyensúlyból kapjuk:

$$N=mg\cos\alpha+F\sin\alpha.$$

Ezekből

$$F\le\mu_0\left(mg\cos\alpha+F\sin\alpha\right),$$

azaz a tapadási súrlódási együttható:

$$\mu_0\ge\frac{1}{\sin\alpha+\frac{mg}{F}\cos\alpha}.$$

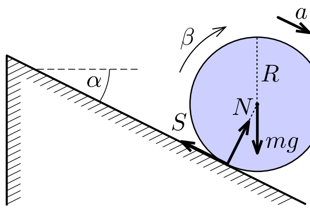
Behelyettesítve F kifejezését, majd átalakítások után

$$\mu_0\ge\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Megjegyzés: A tapadási súrlódási tényezőt úgy is megkaphatjuk, ha F támadási pontjára alkalmazzuk a forgatónyomatékok eltűnésének feltételét. Ez csak úgy lehetséges, ha a súrlódási erő és a nyomóerő eredője átmegy ezen a ponton, hiszen az mg és F erőkre ez teljesül. Ebből a kerületi és középponti szögek tételével adódik, hogy $\mu_0\ge\tan(\alpha/2)$. Belátható, hogy ez az eredmény a fentivel azonos.

F4. *a*) A felrajzolt erőkkel felírva a henger mozgásegyenleteit ($\sum F=ma$ a lejtővel párhuzamos és arra merőleges irányban, valamint a tömegközéppontra a $\sum M = \Theta\beta$ forgásegyenletet):

$$mg\sin\alpha - S = ma,$$
$$N = mg\cos\alpha,$$
$$SR = \frac{1}{2}mR^2\beta.$$



Mivel a henger nem csúszik meg (de nem biztos, hogy a tapadási súrlódási erő maximuma hat)

$$a = \beta R.$$

Ezekből az egyenletekből a gyorsulás $a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$.

b) A tapadási súrlódási erő az *a*) rész alapján:

$$S = \frac{1}{2}ma = \frac{1}{3}mg\sin\alpha \le \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\alpha.$$

Ebből

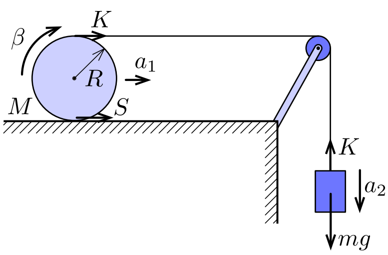
$$\mu_0 \ge \frac{1}{3}\tan\alpha.$$

c) Mivel a $\mu = \frac{1}{6}\tan\alpha$ súrlódási együttható kisebb, mint a tiszta gördüléshez szükséges érték, ezért a henger csúszva gördül lefelé. Tehát az $a = \beta R$ összefüggés nem érvényes, de ismerjük a (csúszási) súrlódási erőt: $S = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Tehát:

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma,$$

azaz $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \frac{5}{6}g\sin\alpha$.

F5. Legyen a henger tömegközéppontjának gyorsulása a_1, a testé pedig a_2. A testekre ható erőket az ábra mutatja.



A függőlegesen mozgó testre:

$$mg - K = ma_2. \quad (1)$$

A hengerre:

$$K + S = Ma_1, \quad (2)$$

$$(K - S)R = \frac{1}{2}MR^2\beta. \quad (3)$$

A henger legfelső pontjának érintőirányú gyorsulása a talajról nézve $a_1 + \beta R$. Mivel a fonál nem nyúlik meg, azért ugyanekkora gyorsulással mozog az m tömegű test, azaz $a_2 = a_1 + \beta R$. Másrészt a henger tisztán gördül, ezért $a_1 = \beta R$. Tehát $a_2 = 2a_1$.

A (2) és (3) egyenlet összeadásával és a kényszerfeltétellel:

$$K = \frac{1}{2}Ma_1 + \frac{1}{4}MR\beta = \frac{3}{4}Ma_1.$$

Ezt felhasználva (1)-ben:

$$mg - \frac{3}{4}Ma_1 = 2ma_1,$$

ahonnan a henger gyorsulása

$$a_1 = \frac{4m}{8m + 3M}g.$$

F6. *a*) A lejtő első felén legördülve a tapadási súrlódási erő nem végez munkát, hiszen a henger talajjal érintkező pontja áll. Ezért ebben az esetben alkalmazhatjuk a mechanikai energiamegmaradás törvényét. A helyzeti energia nullszintjét a pálya aljához választva:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2,$$

ahol $v = R\omega$, mivel a henger tisztán gördül. Innen a sebesség és a szögsebesség a pálya alján:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}, \quad \omega = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{gh}{R^2}}.$$

b) A súrlódásmentes részen mozogva a henger pálya elján elért szögsebességét megtartja, hiszen nincs olyan erő, ami ezt megváltoztatná. Tehát amikor a henger eléri a legmagasabb helyzetét, sebessége nulla lesz, de szögsebessége ugyanakkora, mint legalul. Mechanikai energiamegmaradás most is alkalmazható (a forgási energiát nem kell felírni, mert az a mozgás során változatlan):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh'.$$

Ebből – felhasználva az *a*) rész eredményét:

$$h' = \frac{v^2}{2g} = \frac{2}{3}h.$$

F7. *a*) a korongok között fellépő súrlódási erő forgatónyomatéka az egyik korong forgását lassítja, a másikét gyorsítja. A teljes rendszert tekintve ezen forgatónyomatékok összege nulla, valamint a külső erők forgatónyomatékai is nullák, ezért a rendszer összeperdülete nem változik. Azaz

$$\Theta_m\omega_0 = (\Theta_m + \Theta_M)\omega,$$

ahol $\Theta_m = \frac{1}{2}mr^2$ és $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$ az egyes korongok tehetetlenségi nyomatéka a középpontjukon átmenő forgástengelyükre vonatkoztatva. Innen:

$$\omega = \frac{mr^2}{mr^2 + MR^2}\omega_0.$$

b) A kezdeti energia

$$E_0 = \frac{1}{2}\Theta_m\omega_0^2 = \frac{1}{4}mr^2\omega_0^2.$$

Az ütközés utáni energia:

$$E = \frac{1}{2}(\Theta_m + \Theta_M)\omega^2.$$

Az *a*) rész eredményével:

$$E = \frac{1}{4}mr^2\omega_0^2\frac{mr^2}{mr^2 + MR^2}.$$

A disszipálódott energia relatív nagysága:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E_0 - E}{E_0} = 1 - \frac{E}{E_0} = 1 - \frac{mr^2}{mr^2 + MR^2}.$$

F8. *a*) Az ütközés során a zsanérokon átmenő tengelyre vonatkoztatva a perdület megmarad.

$$mv_0(L-d) = \left[\frac{1}{3}ML^2 + m(L-d)^2\right]\omega,$$

ahonnan a szögsebesség:

$$\omega = \frac{mv_0(L-d)}{\frac{1}{3}ML^2 + m(L-d)^2} = 6{,}6\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

b) Az ütközés előtti energia:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = 25\ \mathrm{kJ}.$$

Az ütközés utáni energia:

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}ML^2 + m(L-d)^2\right]\omega^2.$$

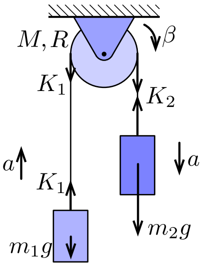
Felhasználva az *a*) rész eredményét:

$$E = \frac{1}{2}\frac{m^2v_0^2(L-d)^2}{\frac{1}{3}ML^2 + m(L-d)^2} = 0{,}13\ \mathrm{kJ}.$$

Vagyis a disszipálódott energia:

$$\Delta E = E - E_0 = -24{,}87\ \mathrm{kJ}.$$

F9. Mivel a csiga tömege nem elhanyagolható, a két oldalán lévő kötélrészben különböző erő lép fel.



Az ábrán látható jelöléseket használva a mozgásegyenletek a testekre:

$$K_1 - m_1g = m_1a, \tag{4}$$
$$m_2g - K_2 = m_2a. \tag{5}$$

A csiga forgására:

$$(K_2 - K_1)R = \Theta\beta. \tag{6}$$

Mivel a kötél nem csúszik meg a csigán, ezért a csiga éritnőirányú gyorsulása a kötél gyorsulásával egyezik meg: $a = \beta R$.

A (4) és (5) egyenletek összegéből:

$$K_2 - K_1 = (m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)a.$$

Ezt és a kényszerfeltételt kihasználva (6)-ban:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{\Theta}{R^2}}g.$$

Ha a csiga (henger) tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{2}MR^2$, akkor a gyorsulás:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}g.$$

Látható, hogy ha $M = 0$, akkor visszakapjuk a könnyű csigára vonatkozó eredményt.