

# AZ OPTIKAI TERVEZÉS ALAPJAI

Dr. Erdei Gábor, egyetemi docens

[erdei@eik.bme.hu](mailto:erdei@eik.bme.hu)



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Természettudományi Kar, Atomfizika Tanszék

v. 2020.02.26.

# TARTALOMJEGYZÉK

<b>TARTALOMJEGYZÉK</b> .....	<b>2</b>
<b>1. BEVEZETÉS, ALAPFOGALMAK ÖSSZEFOGLALÁSA</b> .....	<b>3</b>
1.1. CÉLKITŰZÉS, TEMATIKA, TÁRGYKÖR.....	3
1.2. AZ ELEKTROMÁGNESES SPEKTRUM TARTOMÁNYAI.....	4
1.3. ALAPFOGALMAK ÖSSZEFOGLALÁSA.....	5
1.4. ALAPVETŐ KÖZELÍTÉSEK.....	11
<b>2. A PARAXIÁLIS KÖZELÍTÉS ELMÉLETÉNEK ÁTTEKINTÉSE</b> .....	<b>12</b>
2.1. LENCSERENDSZEREK FELÉPÍTÉSE, ELŐJELSZABÁLYOK.....	12
2.2. ELSŐRENDŰ KÖZELÍTÉS (paraxiális v. Gauss-féle közelítés).....	13
2.3. MÁTRIXOS FORMALIZMUS.....	14
<b>3. PARAXIÁLIS KÖZELÍTÉS A GYAKORLATBAN</b> .....	<b>20</b>
3.1. REKESZEK, PUPILLÁK.....	20
3.2. NEVEZETES SUGARAK.....	21
3.3. ALKALMAZÁSI PÉLDÁK.....	22
<b>4. AZ ABERRÁCIÓELMÉLET ALAPJAI</b> .....	<b>29</b>
4.1. KÉPALKOTÁSI HIBÁK (ABERRÁCIÓK).....	29
4.2. TRANSZVERZÁLIS, MONOKROMATIKUS ABERRÁCIÓK.....	32
4.3. AZ ABERRÁCIÓK KVANTITATÍV VIZSGÁLATA.....	35
<b>5. ABERRÁCIÓELMÉLET A GYAKORLATBAN</b> .....	<b>38</b>
5.1. ELSŐRENDŰ SZÍNHIBÁK (KROMATIKUS ABERRÁCIÓK).....	38
5.2. SEIDEL-EGYŰTTHATÓK.....	39
5.3. AZ ABERRÁCIÓELMÉLETBŐL LEVONT KÖVETKEZTETÉSEK.....	41
<b>6. GEOMETRIAI OPTIKA, RADIOMETRIA</b> .....	<b>48</b>
6.1. VALÓS SUGÁRÁTVEZETÉS.....	48
6.2. RADIOMETRIA.....	51
6.3. FÉNYKÉPEZŐGÉP-OBJEKTÍV FÉNYEREJÉNEK MEGHATÁROZÁSA.....	54
6.4. A MEGVILÁGÍTÁS $\cos^4$ TÉTELÉNEK LEVEZETÉSE.....	55
<b>7. A KÉPALKOTÁS DIFFRAKCIÓS VIZSGÁLATA</b> .....	<b>56</b>
7.1. HULLÁMFRONT-ABERRÁCIÓ.....	56
7.2. DIFFRAKCIÓS KÖZELÍTÉSEK.....	58
7.3. GÖMBHULLÁM DIFFRAKCIÓJA.....	61
<b>8. DIFFRAKCIÓS HATÁSOKAT JELLEMZŐ MÉRŐSZÁMOK</b> .....	<b>64</b>
8.1. DIFFRAKCIÓKORLÁT KÖZELI RENDSZEREK JELLEMZÉSE.....	64
8.2. LEKÉPEZÉSI HIBÁK MÉRŐSZÁMAINAK ÖSSZEFOGLALÁSA.....	67
<b>9. KITERJEDT TÁRGYAK LEKÉPEZÉSÉNEK VIZSGÁLATA</b> .....	<b>69</b>
9.1. KONVOLÚCIÓS TÁRGYALÁSMÓD.....	69
9.2. MODULÁCIÓ-ÁTVITELI FÜGGVÉNY (MTF).....	70
9.3. AZ MTF KISZÁMÍTÁSA AUTOKORRELÁCIÓVAL.....	72
<b>10. AZ OPTIKAI TERVEZÉS FOLYAMATA</b> .....	<b>75</b>
10.1. AZ OPTIKAI TERVEZÉS MENETE.....	75
10.2. OPTIKAI TERVEZŐ PROGRAMOK.....	77
10.3. ALAPFOGALMAK DEFINÍCIÓI.....	78
10.4. A MEGFELELŐ KÉPALKOTÓRENDSZER KIVÁLASZTÁSÁNAK SZEMPONTJAI.....	81
<b>11. ALAPVETŐ KÉPALKOTÓ RENDSZEREK BEMUTATÁSA</b> .....	<b>83</b>
11.1. ELŐADÁSON BEMUTATOTT RENDSZEREK.....	83
11.2. GYAKORLATON BEMUTATANDÓ RENDSZEREK.....	97
<b>IRODALOMJEGYZÉK</b> .....	<b>98</b>
<b>KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS</b> .....	<b>98</b>

# 1. BEVEZETÉS, ALAPFOGALMAK ÖSSZEFOGLALÁSA

## 1.1. CÉLKITŰZÉS, TEMATIKA, TÁRGYKÖR

### Célkitűzés

Az optikai tervezéssel számos remek szakkönyv foglalkozik, bőséges információt kínálva azok számára, akik alkalmanként kénytelenek egy-egy konkrét optikai rendszert megtervezni. Akik viszont hivatásszerűen űzik ezt a tevékenységet, vagy esetleg fizikusként pontosabban szeretnék megismerni az optikai tervezésben használt fogalmak, összefüggések, közelítések hátterét, nemigen találnak összefoglaló anyagot – ennek a hiánynak a pótlására tesz kísérletet a jelen jegyzet. A szerző tapasztalatai alapján azért szükségesek a továbbiakban taglalt ismeretek, mert az optikai tervezés nagyon magas szinten épít a fizikára: speciális fogalmakat használunk, emellett egy egyszerű gyakorlatias képlet levezetése az elektrodinamika Maxwell-egyenleteiből adott esetben órákat is igénybe vehet, az alkalmazott közelítések száma pedig rengeteg. A lényeg itt is a részletekben rejlik: ha nem ismerjük precízen a fogalomdefiníciókat és az alkalmazott modellek (közelítések) érvényességi határait, teljesen hihető, de valójában hibás eredményeket kaphatunk. Az optika szakterületén egy hibás tervezési lépés pedig (az időigényes gyártási folyamatoknak köszönhetően) több havi, akár fél éves csúszást is eredményezhet. A költségvonzatok is rendszerint sokkal nagyobbak, ha általános elektronikai, gépészeti stb. megoldásokhoz viszonyítjuk őket.

A fentieknek megfelelően a következő célokat tűzzük ki a tananyag keretein belül: az optikai tervezés fogalom- és modellrendszerének elsajátítása; leképezőrendszerek szokásos minősítési módszereinek megismerése; fontos optikai leképezőeszközök működésének áttekintése; optikai tervezőprogram lehetőségeinek megismerése és használatának alapszintű elsajátítása; leképezőrendszerek specifikálása, konstrukciójának meghatározása, tervezőprogrammal történő vizsgálata, a képminőség javítása automatizált optimalizációval; a gyártási hibák hatásának figyelembevétele; foglалástechikai alapfogalmak megismerése; optikai gyártási rajzok értelmezése; anyag- és alkatrészbeszerzés lehetőségeinek megismerése; kész rendszerek visszafejtése (reverse engineering), jusztirozása.

Jelen jegyzet erőteljesen épít optikai alapismeretekre elsősorban a geometriai optika, paraxiális közelítés, skalár diffrakció, elektrodinamika, térbeli/időbeli koherencia témaköreiből. Bizonyos fogalmak tehát nem kerülnek elmagyarázásra, másokat pedig csak tömören összefoglalunk ismétlés gyanánt. Az anyag oktatása alkalmazott jellegű fizikusképzésben, tipikusan MSc, I. évfolyamán ajánlott. A jegyzet előadás formájában bemutatva 12-13 db 2×45 perces óra alatt leadható. A fejezetek is nagyjából ehhez vannak igazítva, de beosztásuknál egyértelműen a témakörökre bontásra fektettük a hangsúlyt. Önálló képzés esetén a kevésbé kifejtett részek az ajánlott szakirodalmi hivatkozásokból szükség esetén kiegészítendőek. A tárgy közlendőjének legjobb átadását kiegészítő számítógépes gyakorlatokkal lehet elérni (11-12 db 2×45 perces óra). Teljesen önálló felkészülés elsősorban azoknak ajánlott, akik már rendelkeznek némi alapismerettel valamelyik optikai tervezőszoftverrel kapcsolatban.

### Előadástematika

- Modellek, közelítések, összefüggések
- A leképezés minősítésének módszerei
- A tervezés menete, számítógéppel támogatott tervezés
- Néhány leképezőrendszer vizsgálata

## Gyakorlattematika

- Programhasználat
- Lencserendszerek modelljének felépítése
- Leképezési jellemzők
- Lencserendszerek tervezése
- Foglalási eljárások alapjai
- Tűrésanalízis

## Tárgykör definiálása

- Leképezőrendszerek (ld. még megvilágítórendszerek) tervezése és minősítése
- Tengelyszimmetrikus rendszerek (ld. még „freeform” felületek)
- Törő/tükröző felületek (ld. még diffraktív, Fresnel-felületek, gradiensindexű anyagok)
- „Sorrenti” fényterjedés (ld. még nemsorrenti sugárátvezetés)
- Lencserendszerek ki-/bemenete, mechanikai környezete (ld. még termikus, vegyi hat.)
- Látható (optikai) hullámhossz tartomány (400-750 nm)

## 1.2. AZ ELEKTROMÁGNESES SPEKTRUM TARTOMÁNYAI

Az 1. táblázatban összefoglaltuk az elektromágneses spektrum fontosabb tartományait, ahol  $\lambda_0$  jelöli a hullámhosszat vákuumban. A látható tartomány elsődleges fényforrásunk, a Nap földfelszínen 5500 K-es feketetest sugárzásának megfelelő emissziós spektrumának maximuma környezetébe esik. E tartomány további praktikus tulajdonsága, hogy mind a légkör, mind fő alkotóelemünk a víz, valamint számos egyéb anyag átlátszó 400-750 nm között, ugyanakkor az ilyen sugárzás erős rezonanciát mutat az atomok külső elektronhéjai-val, emiatt könnyen detektálható. A látható hullámhosszak elegendően rövidek ahhoz, hogy a fiziológiai szükségletekhez szükséges felbontást a szem képes legyen elérni.

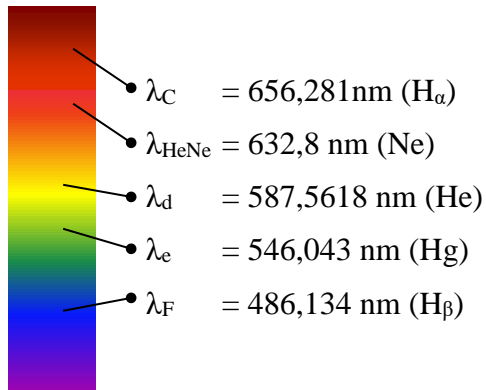
Elnevezés	$\lambda_0$	Egység	Angol rövidítés	Tipikus kibocsátási mód
Rádióhullámok	> 100	mm	RW	antenna, töltött részecskék mozgása
Mikrohullám	1-10	mm	MW	üregrezonátor, antenna
Terahertz-sugárzás	30-300	$\mu\text{m}$	TR (Far-IR)	
Hosszúhullámú infravörös	8-15	$\mu\text{m}$	LWIR	molekularezonancia
Közepes infravörös	3-5	$\mu\text{m}$	Mid-IR	(vibrációs, rotációs, torziós)
Közeli infravörös	0,75-1,5	$\mu\text{m}$	NIR	vegyértékelektron átmenet
Látható	400-750	nm	VIS	
Közeli ultraibolya „A”	320-400	nm	UVA	
Közepes ultraibolya „B”	280-320	nm	UVB	
Távoli ultraibolya „C”	100-280	nm	UVC, Deep-UV	
Extrém távoli ultraibolya	10-100	nm	EUV	
Lágy Röntgen-sugárzás:	1-10	nm	Soft X-ray	fékezési- v. szinkrotronsugárzás
Kemény Röntgen-sugárzás	0,1-1	nm	Hard X-ray	törzselektron átmenet
Gamma-sugárzás	0,1- 10	pm	$\gamma$ -ray	nukleáris folyamatok, annihiláció
Kozmikus sugárzás	< 0,01	pm	CR	részecskék

**1. táblázat.** Az elektromágneses spektrum fontosabb tartományai ( $\lambda_0$  a vákuumbeli hullámhossz).

Látható példák:

Távoli UV példák: 254 nm Hg (fénycső)

193 nm ArF lézer (50 nm LW litográfia)



1. ábra. Példák látható és távoli UV tartományokba eső nevezetes hullámhosszakra.

### 1.3. ALAPFOGALMAK ÖSSZEFOGLALÁSA

#### A fény tulajdonságai

- intenzitás, besugárzás
- hullámfront (azonos fázisú pontok által alkotott felület)
- fénysugár (hullámfrontok ortogonális trajektóriái –  $\mathbf{k}$  vagy Poynting-vektor irány –  $\mathbf{S}$ , melyek iránya anizotróp közegben egymástól eltér)
- optikai úthossz (vákuumra redukált út)

$$\text{OPL} = n \cdot d ; \Delta\varphi = \text{OPL} \cdot 2\pi / \lambda_0 \text{ [rad]} \quad (1)$$

- időbeli koherencia (monokromatikus v. polikromatikus fény, esetleg impulzus)
- térbeli koherencia (diffúz megvilágítás – definiálható-e hullámfront?)
- polarizáció (az elektromos/mágneses térerősség vektor rezgésének hosszútávú térbeli vagy időbeli rendezettsége, periodicitása)

#### Intenzitás, besugárzás

A fény teljesítményviszonyait leíró „I” intenzitás esetünkben némi megfontolást igényel. Elektrodinamikában a tér adott pontjában a következőképpen definiáltuk egy térben koherens sugárzás intenzitását:

$$I \equiv \langle \mathbf{S} \rangle, \quad (2)$$

ahol  $\mathbf{S}$  jelöli a Poynting-vektort. Ez a képlet az  $\omega$  körfrekvenciájú monokromatikus síkhullám esetére a következő alakot ölti:

$$I \equiv \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{\mu} \frac{k}{\omega} \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2} = v \cdot \varepsilon \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2}, \quad (3)$$

ahol  $\mathbf{E}_0$  jelöli a térerősség amplitúdó vektorát, „k” a hullámszám vektor hosszát,  $\mu$  a mágneses permeabilitás,  $\langle \mathbf{S} \rangle$  pedig a teljesítménysűrűséget leíró Poynting-vektor időátlaga. Az ekvivalens megfogalmazásnál „v” az adott közegben mért fénysebesség,  $\varepsilon$  a dielektromos permittivitás. Alkalmazott optikai szempontból az intenzitás nem a legmegfelelőbb mennyiség, mert detektoraink nem közvetlenül ezt mérik, hanem a dA felületeleмен *merőlegesen* áthaladó teljesítményt:

$$dP = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{A} = I \cdot \cos(\theta) \cdot dA, \quad (4)$$

ahol  $\theta$  jelöli a felületormális Poynting-vektorral (hullámfrontnormálissal) bezárt szögét. A helyzetet tovább bonyolítja, hogy a felületelemen nem feltétlenül csak ez a sugárzás halad át, hanem térben inkoherens (diffúz) megvilágítás esetén érkezik fény más irányból is. A diffúz módon sugárzó terek leírásával, mérés technikájával foglalkozik a radiometria, amit egy későbbi fejezetben tekintünk át. Az egységnyi felületelemen merőlegesen áthaladó összteljesítményt (azaz amit a detektoraink, szemünk érzékelnek) az MSZ 9620-1 fénytechnikai terminológiát tartalmazó szabvány „besugárzott felületi teljesítmény”-nek nevezi. Mivel ez a megfogalmazás a gyakorlatban nehézkesen használható, helyette a tömörebb és szintén elfogadott *besugárzás* (irradiance) kifejezést használjuk ebben a jegyzetben. A besugárzás (H) pontos definícióját a (106) képlet adja meg, ennek egyszerűbb változata látható alább, térben koherens (azaz lokálisan egyetlen hullámfronttal reprezentálható) terek esetére:

$$H \equiv I \cdot \cos(\theta) \Rightarrow dP = H \cdot dA. \quad (5)$$

A továbbiakban mindkét mennyiséget fogjuk használni, emiatt fontos megérteni a közöttük lévő különbséget.

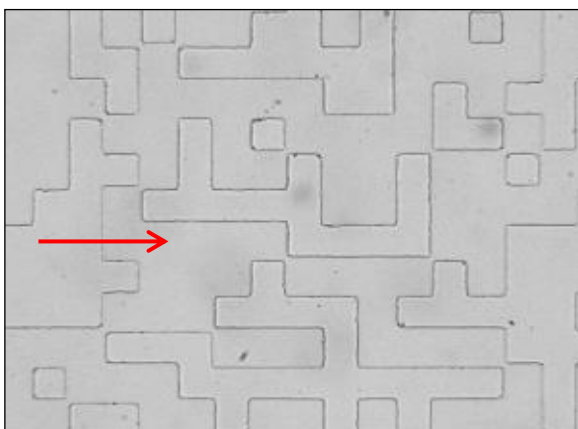
### Időbeli koherencia

$$\Delta\nu \approx 1/\tau_c; \Delta\lambda_0 = \Delta\nu \cdot \lambda_0^2 / c \quad (6)$$

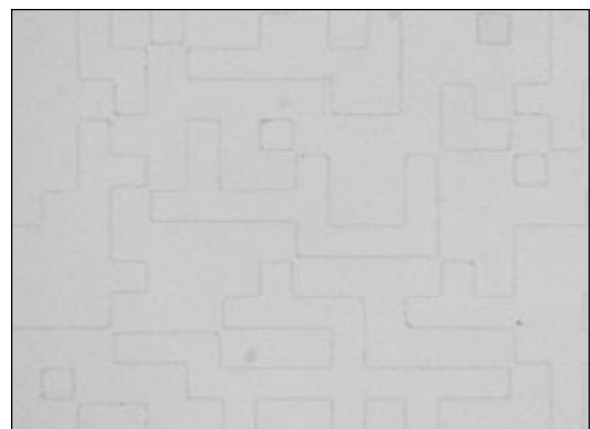
Látható fényforrások:	Gázlézer:	$\Delta\lambda_0 \sim 0,01 \text{ nm}$
	Szilárdtestlézer:	$\Delta\lambda_0 \sim 0,1 \text{ nm}$
	Félvezetőlézer:	$\Delta\lambda_0 \sim 1 \text{ nm}$ (+ hőmérsékleti ingadozás: $2 \text{ nm}/10^\circ\text{C}$ )
	LED:	$\Delta\lambda_0 \sim 10 \text{ nm}$

### Térbeli koherencia

Térben inkoherens módon világító tárgy esetén a tárgy felületének pontjai egymáshoz képest véletlen fázisban vannak, és a közöttük lévő relatív fázis időben gyorsan változik. Az ilyen tárgyról kiinduló ún. diffúz sugárzásban sem lokálisan sem nagyobb területeken nem határozható meg hullámfront. (Más megfogalmazásban: a sugárzási tér minden pontján végtelen számú hullámfront halad át.) A tárgy felületének pontjai közötti átlagos távolság, amelyen belül még időben állandónak tekinthető a relatív fázis a *koherencia hossz*. Térben koherens sugárzás esetén a tárgy és a sugárzási tér pontjai időben állandó relatív fázissal rendelkeznek, ezért ilyenkor meghatározhatóak a hullámfrontok (a koherencia hossz végtelen).

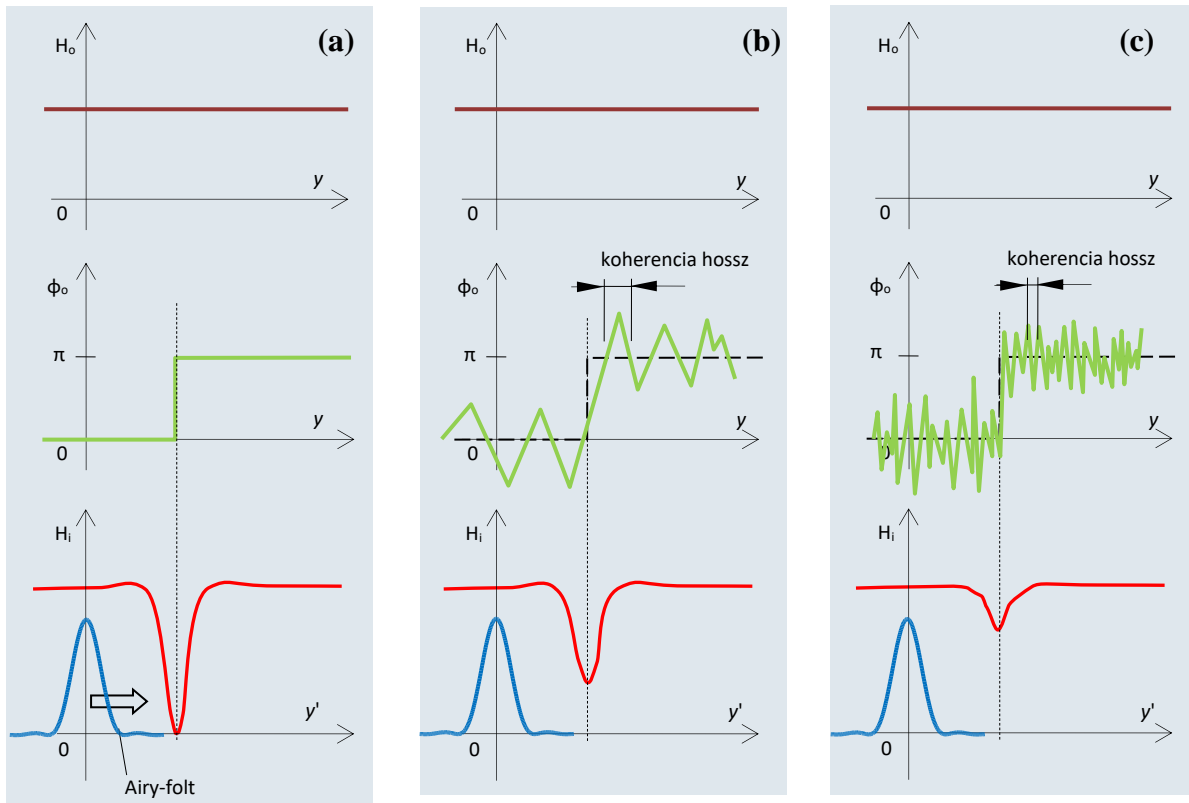


**2. ábra.** Fázistárgy leképzése térben koherens fényvel. Fekete vonalként jól látható a fázislépcsők határán fellépő destruktív interferencia.

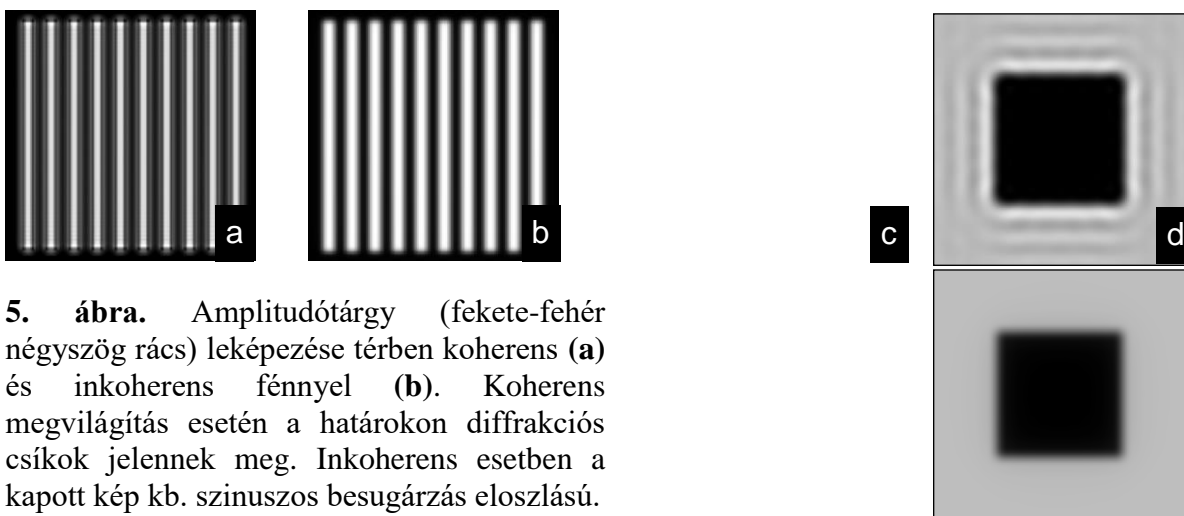


**3. ábra.** Fázistárgy leképzése térben inkoherens fényvel. A fázislépcsők határán fellépő destruktív interferencia láthatósága jelentősen romlott.

Magyarázatképpen ábrázoltuk (4. ábra) a tárgy („o” - object) besugárzás (H) és fázis-, valamint a kép („i” - image) térbeli besugárzáseloszlását a piros nyíl (ld. 2. ábra) mentén. („H” definícióját ld. alább.) Koherens esetben egy ideálisan leképező optika diffrakciós foltja (Airy-folt) a fázisugrás pozíciójában összeátlagolja a bal oldali 0 [rad] fázistolást a jobboldali  $\pi$  [rad] fázistolással, tökéletes destruktív interferenciát okozva. A képen ennek eredményét fekete vonalként látjuk a fázisugrás mentén. Inkohereus esetben a tárgy térbeli koherenciahossza jóval kisebb mint az Airy-folt, emiatt az átlagolási tartományba véletlen fázisú pontok sokasága esik, jelentősen rontva a destruktív interferencia láthatóságát. (Azaz a fekete csík majdnem eltűnik.)



**4. ábra.** A tárgy („o” - object) besugárzás (H) és fázis-, valamint a kép („i” - image) térbeli besugárzáseloszlása a piros nyíl (ld. 2. ábra) mentén. **a)** Térben koherens megvilágítás esete, **b)** részlegesen koherens megvilágítás esete, **c)** térben inkohereus megvilágítás esete.



**5. ábra.** Amplitudótárgy (fekete-fehér négyszög rács) leképezése térben koherens **(a)** és inkohereus fényvel **(b)**. Koherens megvilágítás esetén a határokon diffrakciós csíkok jelennek meg. Inkohereus esetben a kapott kép kb. szinuszos besugárzás eloszlású.

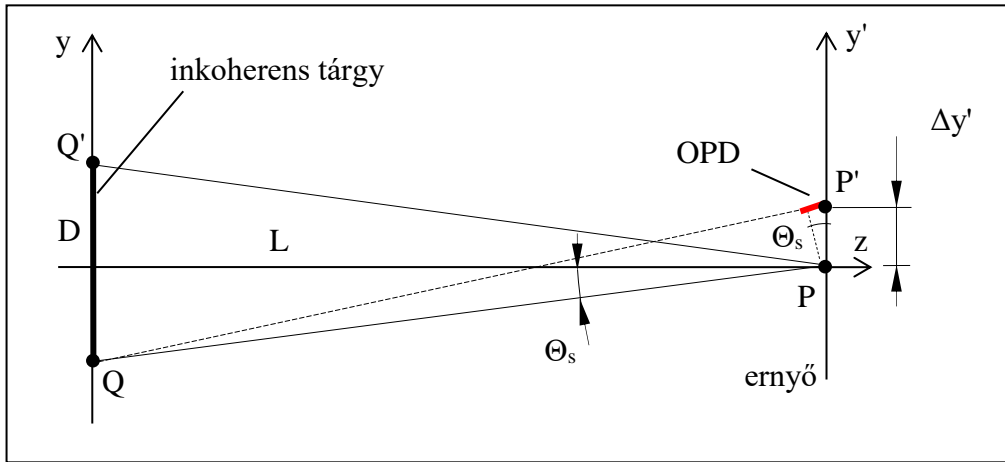
**6. ábra.** Amplitudótárgy (négyzet) leképezése térben koherens (c) és inkoherens fényel (d).

Amennyiben egy „D” oldalhosszúságú, négyzet alakú,  $\lambda$  hullámhosszon sugárzó, térben inkoherens fényforrástól „L” távolságban elhelyezünk egy ernyőt, azon megváltozik a térbeli koherencia hossza a forráséhoz képest. Ennek oka, hogy a távolság növekedésével csökken a tárgy  $\Theta_s$  látszólagos szöge az ernyőről nézve. A magyarázat szemléltetéséhez felhasználhatjuk a Huygens-Fresnel elvet, ld. a 7. ábrát, ahol a forrás pontjaiból kiinduló elemi gömbhullámok interferenciája hozza létre a diffrakciós mintázatot az ernyőn. Tegyük fel, hogy az ernyő  $y' = 0$  pontjában, a „t” időpillanatban véletlenül éppen konstruktív interferencia lép fel, és a besugárzás maximális. Vizsgáljuk meg ekkor, hogy a forrás „Q” pontjából az ernyő P illetve P' pontjaiba érkező sugárzás között mekkora a fáziskülönbség ( $\Delta\varphi$ ), amit a pirossal jelölt optikai úthosszkülönbség (OPD) okoz. Feltételezve, hogy  $z \gg D$  (Fresnel-tartomány), és  $D \gg \Delta y'$ :

$$OPD \approx \Delta y' \frac{y}{z} \Rightarrow \Delta\varphi \approx \Delta y' \frac{y}{z} \frac{2\pi}{\lambda} ; y = -D/2..+D/2 , \quad (7)$$

azaz a forrás felületén  $-y$  és  $+y$  pozíciókban lévő Q pontokból P'-be érkező fény fáziskésése ellentétes előjelű. Amennyiben  $y = \pm D/2$  szélsőértékeinél a fáziskülönbség éppen  $\pi$ , a P' pontban destruktív interferencia, azaz kioltás lép fel (Svelto, Lanna, „Principles of Lasers”):

$$\Delta y' \frac{D}{2L} \frac{2\pi}{\lambda} = \pi . \quad (8)$$



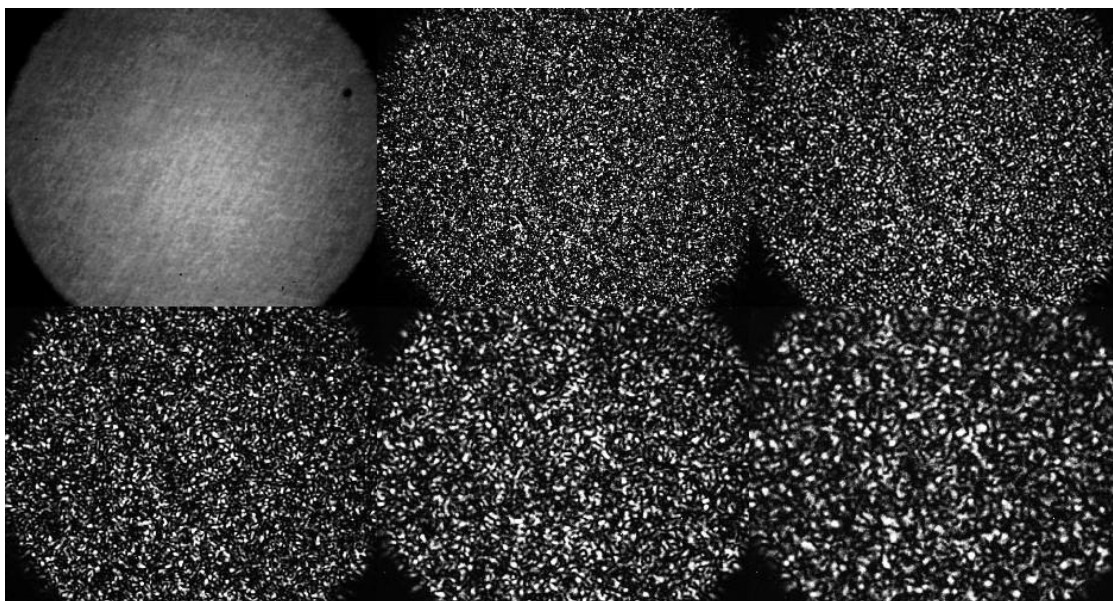
**7. ábra.** A Huygens-Fresnel elv alkalmazása a koherenciahossz becslésére: azt vizsgáljuk, hogy a forrás alján (Q) és tetején (Q') elhelyezkedő pontforrásból érkező fény mely P' pontban kerül épp ellenfázisba.

A gondolatmenet csak közelítő jellegű, mert  $y < D/2$  értékeknél kisebb a fáziskülönbség mint  $\pi$ , ettől függetlenül a zérus besugárzású pontok átlagos távolságára ad egy becslést:

$$2\Delta y' = 2 \frac{L\lambda}{D} . \quad (9)$$

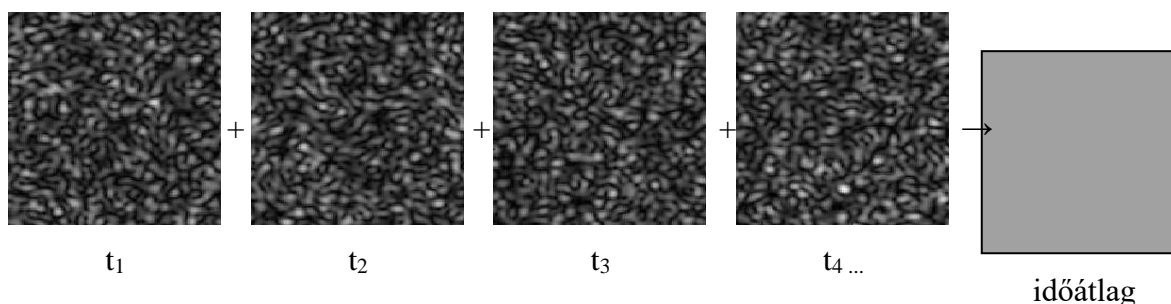
Az eredményt a 8. ábra szemlélteti: „t” időpillanatban egy szemcseképet (speckle) látunk az ernyőn, amelynek átlagos szemcsemérete ( $2\Delta y'$ ) növekszik a tárgytól mért távolság növekedésével.





**8. ábra.** A speckle átlagos szemcsemérete növekszik a tárgytól mért távolság növekedésével (soronként balról jobbra növekvő távolság). <http://luxrerum.icmm.csic.es/?q=node/research/interference>

Amennyiben más „ $t_{1,2,3,4...}$ ” időpillanatban vizsgálódunk, az  $y' = 0$  pozícióban nem konstruktív interferenciát fogunk tapasztalni, hanem mindig más és más besugárzás értéket, azaz a szemcsekép pillanatról pillanatra változik. (De az átlagos szemcseméret mindegyiken ugyanaz!) A sok eltérő szemcsekép összege, azaz az általunk érzékelt időátlag inkohereus megvilágítás esetén egy térben homogén ernyő kivilágítást eredményez:



**9. ábra.** Az  $t_{1,2,3,4...}$ ” időpillanatok szemcseképeinek összege, azaz az általunk érzékelt időátlag inkohereus megvilágítás esetén egy térben homogén ernyő kivilágítást eredményez.

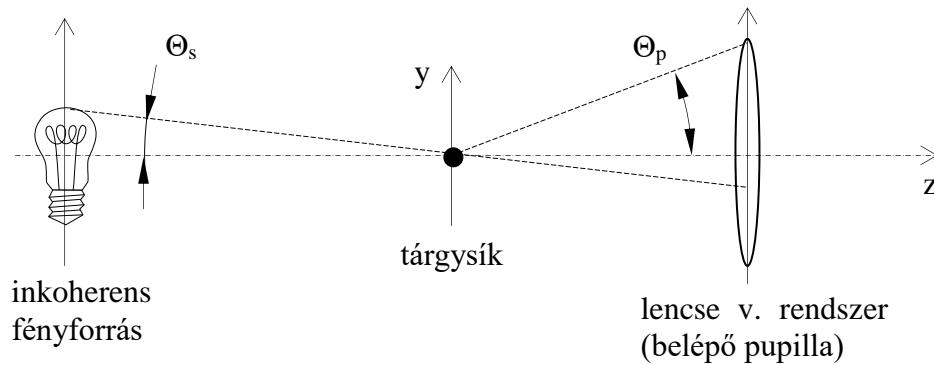
A fentiek alapján az ernyőn mérhető térbeli koherenciahossz tulajdonképpen  $\Delta y'$ , mivel az ernyő ilyen távolságúnál közelebbi pontjai minden időpillanatban közel azonos besugárzásúak és azonos fázisban vannak.

Most az előbbi forrással megvilágított ernyő legyen egy leképező rendszer tárgysíkja (pl. mikroszkóp tárgylemez), amit egy  $\sin(\Theta_p)$  numerikus apertúrájú lencsével vizsgálunk. A fentiek alapján megállapítható, hogy a leképezés minőségére gyakorolt hatás szempontjából a térbeli koherencia relatív fogalom, mivel a koherencia hosszt (speckle), ld. (9) képlet, kell összevetni a leképezőrendszer felbontásával (Airy-folt):

$$R_{Airy} = 0,61 \frac{\lambda}{NA} \approx 0,61 \frac{\lambda}{\Theta_p} \Leftrightarrow \Delta y' = \frac{L\lambda}{D} \approx 0,5 \frac{\lambda}{\Theta_s}. \quad (10)$$

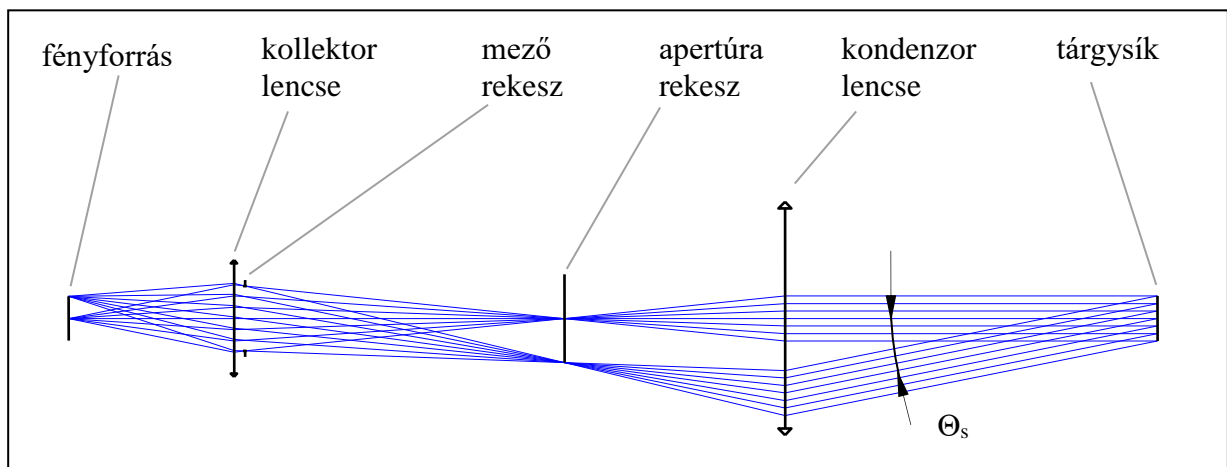
Összefoglalva:

Térbeli koherencia feltétele:  $\Delta y' \gg R_{\text{Airy}} \rightarrow \Theta_s \ll \Theta_p$   
 Térbeli részleges koherencia:  $\Delta y' \approx R_{\text{Airy}} \rightarrow \Theta_s \approx \Theta_p$   
 Térbeli inkoherencia feltétele:  $\Delta y' \ll R_{\text{Airy}} \rightarrow \Theta_s \gg \Theta_p$



**10. ábra.** Inkoherens fényforrás világítja meg egy leképező rendszer tárgy síkját. A leképezőrendszer képminősége szempontjából a térbeli koherencia relatív: A koherencia hossz ( $\Delta y'$ ) kell összevetni a leképezőrendszer felbontásával ( $R_{\text{Airy}}$ ).

A fenti elvi ábra konkrét megvalósítása a Köhler-féle megvilágító rendszer (11. ábra), amelyet főként mikroszkópiában alkalmaznak izzószálas fényforrás esetén. A tárgy síkon mért térbeli koherencia hossza a megvilágító rendszer apertúra rekeszével szabályozható. (Magyarázat: ennek nyitásával megnövelhető a tárgy síkon áthaladó független síkhullámkomponensek szög spektrumának szélessége –  $\Theta_s$  –, azaz a forrás kollimáltból diffúzzá tehető.)



**11. ábra.** Köhler-féle megvilágítás sémája ideális vékonylencsékkel.

A térbeli koherencia szerepe kitüntetett véges kiterjedésű tárgy leképezésének modellezésénél: képanalízis, moduláció átviteli függvény, azaz MTF számítás. Méréstechnikai alkalmazására szép példa a Michelson-féle „stellar” interferométer, aminek segítségével a csillagok átmérője meghatározható.

#### 1.4. ALAPVETŐ KÖZELÍTÉSEK

- lineáris közegek (egymást keresztező fénynyaláboknál a szuperpozíció elve érvényes)
- izotróp közegek (nincs irány- és polarizációfüggés)
- homogén közegek (a törésmutató felületekkel határolt tértartományokon belül állandó)
- szigetelő anyagok (a törésmutató valós és nincs abszorpció,  $\sigma = 0$ )
- nem mágnesezhető anyagok (a fényterjedés megfordítható,  $\mu_r = 1$ , ellenpld. Faraday-eff.)
- skalár közelítés (  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow E(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})$  , ha  $NA = n \cdot \sin \Theta_p < 0,6$  )
- geometriai optikai közelítés ( $\lambda \ll$  optikai rendszer méretek és fénynyaláb méretek)
- időben koherens (monokromatikus) fényforrás
- térben koherens pontszerű tárgy (gömbhullám) – **tervezéskor** (ld. konvolúció-tétel!)
- térben inkohereus (diffúz) kiterjedt tárgy – **kiértékeléskor** (ha szükséges)

#### JÖVŐ ÓRÁN

**Elsőrendű közelítés:** mátrixos formalizmus, vékony- vastaglencse, fősíkok

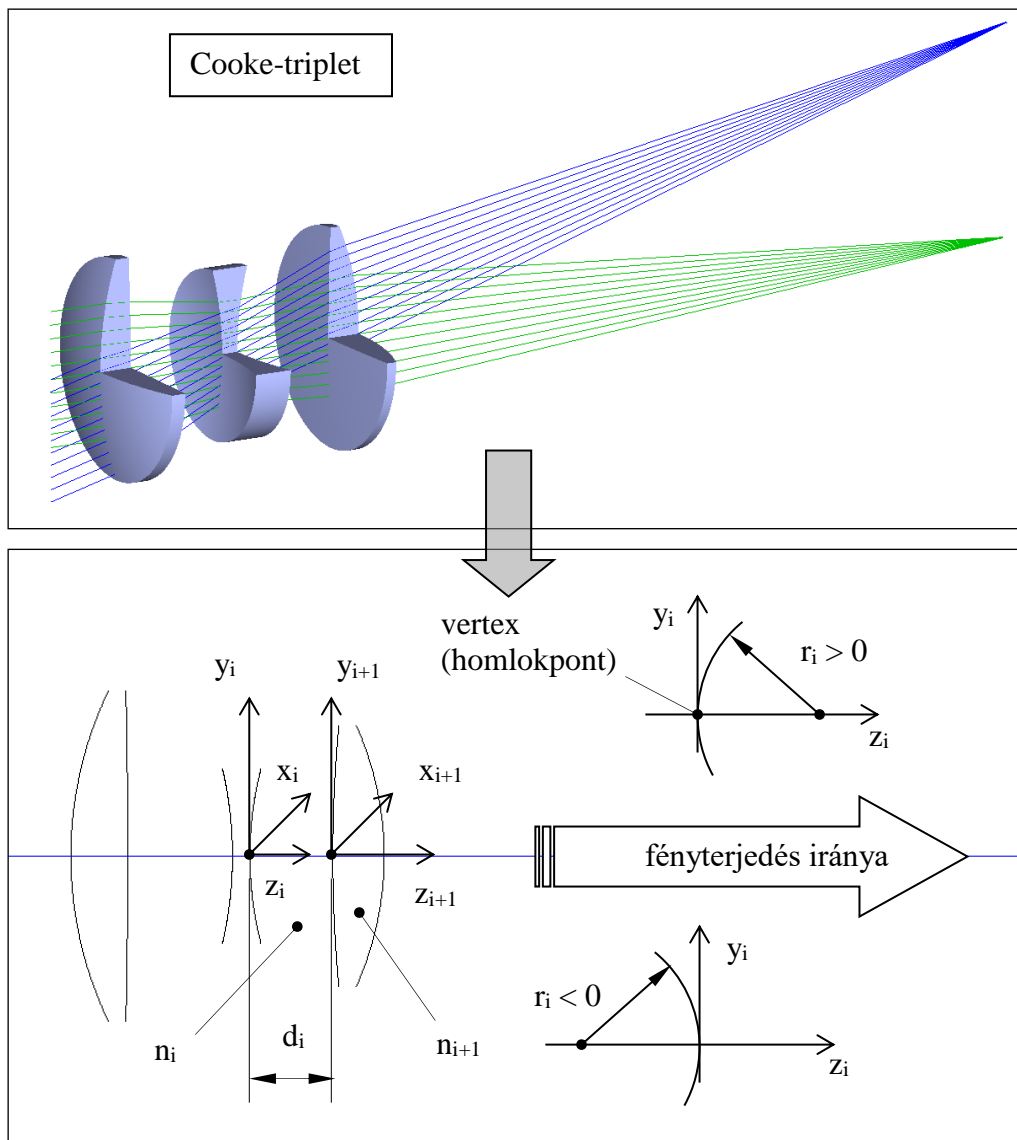
## 2. A PARAXIÁLIS KÖZELÍTÉS ELMÉLETÉNEK ÁTTEKINTÉSE

ISMÉTLÉS

**Közelítések:** lineáris, izotróp, homogén, szigetelő, skalár, időben és térben koherens eset

### 2.1. LENCSERENDSZEREK FELÉPÍTÉSE, ELŐJELSZABÁLYOK

sorrendi sugárátvezetés



**12. ábra.** A Cooke triplet modellje. Minden törőfelületet egy felület modellez, melynek a paraméterei: a felület sorszáma ( $i$ ), görbületi sugár ( $r_i$ ), a következő közeg törésmutatója ( $n_i$ ), a következő felület távolsága az optikai tengely mentén ( $d_i$ ). Sorrendi sugárátvezetés esetén minden fénysugár csak egyszer, a felületek sorszámának megfelelő sorrendben éri el a felületeket.

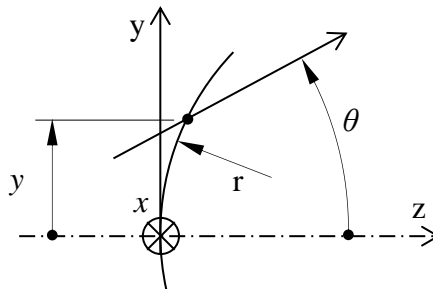
- Tárgyfelület sorszám:  $i = 0$ .
- Az  $(x_i, y_i, z_i)$  koordináta rendszer az „ $i$ ” felület lokális koordináta rendszere.
- Általános, nem tengelyszimmetrikus esetben az egymást követő felületek lokális koordináta rendszerei el lehetnek tolvá és forgatva egymáshoz képest.
- Meridionális sík: bármely, az optikai tengelyt tartalmazó sík.
- Előjel konvenciók: pozíció, szög, irány és görbületi sugár

## 2.2. ELSŐRENDŰ KÖZELÍTÉS (paraxiális v. Gauss-féle közelítés)

### Ideális leképezés definíciója

- pontot pontba képez le (a leképezés „szigmatikus”), a képpont a tárgy pont „konjugáltja”,  $OPD = 0$  minden sugárra tetszőleges tárgy-képpont párra – Fermat-elv
- a tárgy tér egyeneseit a képtér egyeneseibe képezze le (az első feltétellel együtt emiatt síkot síkba képez le)
- létezzen egy egyenes amit a rendszer önmagába képez le (optikai tengely, szimmetria tengely)
- az optikai tengelyt tartalmazó („meridionális”) síkok önmagukba képződjenek le
- az optikai tengelyre merőleges síkok ugyanilyen síkokba képződjenek le
- az optikai tengelyre merőleges síkokban lévő alakzatok hasonló alakzatokba képződjenek le (azaz torzításmentesen)

### Paraxiális közelítés



**13. ábra.** Egy  $r$  görbületi sugarú törőfelület a lokális  $x, y, z$  koordináta rendszerében.

A paraxiális közelítés feltétele: A felületet elérő fénysugár az optikai tengely közelében metszi a felületet, az optikai tengellyel bezárt szöge pedig kicsi, ld. (11) egyenlet.

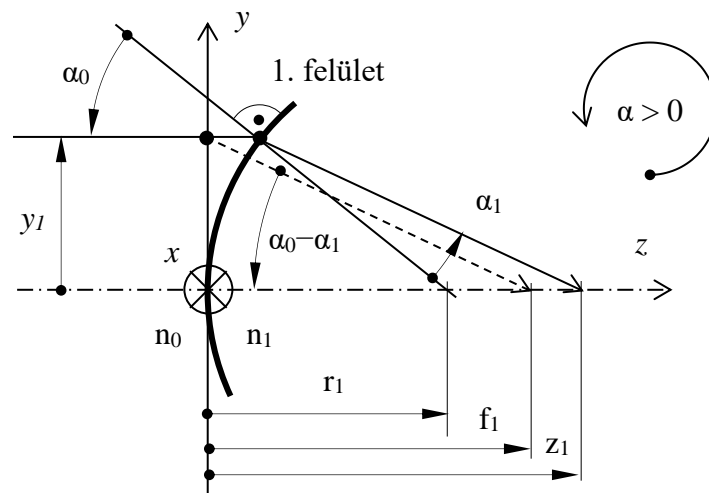
$$\left. \begin{aligned} \theta &\approx \sin(\theta) \approx \operatorname{tg}(\theta) \\ y &\ll r \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ahol „ $r$ ” az adott felület görbületi sugara. Ekkor a törő/tükröző felületeket síkkal helyettesíthetjük.

- A sugarak hely / iránykoordinátái lineáris egyenletekkel számolhatóak.
- A paraxiális közelítésben teljesülnek az ideális leképezés feltételei.
- A sugarak  $XZ$ ,  $YZ$  meridionális vetületei függetlenül kezelhetők. (Tehát paraxiális közelítésben két merőlegesen elhelyezett hengerlencse helyettesít egy gömbi lencsét.)

## Törőfelület fókusztávolsága

$$\left. \begin{aligned} z_1 &\approx f_1 \\ n_0 \cdot \alpha_0 &= n_1 \cdot \alpha_1 \quad (\text{fénytörés}) \\ \alpha_0 \cdot r_1 &= y_1 \quad (\text{felületnormális}) \\ f_1 \cdot (\alpha_0 - \alpha_1) &= y_1 \quad (\text{ideális leképzés}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_1 = r_1 \cdot \frac{n_1}{n_1 - n_0} \quad [\alpha] = \text{rad !} \quad (12)$$



**14. ábra.** Az 1. törőfelület (12) fókusztávolságának felírásához használt mennyiségek magyarázata.

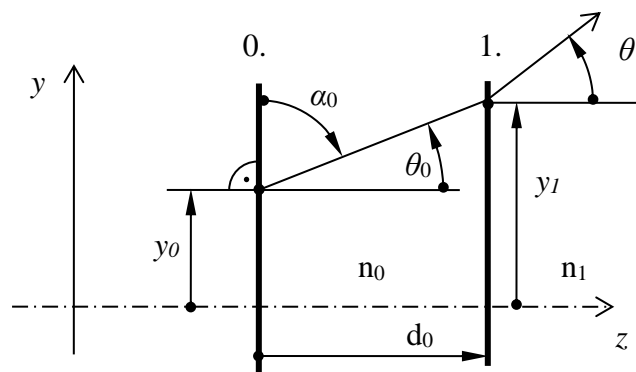
A törőerő definíciója:

$$p_1 \equiv n_1 / f_1 \quad [\text{dioptria} = \text{m}^{-1}] \quad (13)$$

Megjegyzendő, hogy a törőerőt gyakran szokták  $\phi$ -vel is jelölni. Tükör formális tárgyalása:  $n_1 = -n_0$ . (Ha  $r_{1,\text{tükör}} = -r_{1,\text{törő felület}}$  és  $p_{\text{tükör}} = p_{\text{törő felület}}$ , akkor  $n_1 = 3n_0$ -nak felel meg! Ha nem egyetlen szférikus felületet, hanem egy kétszerdomború lencsét használunk egy tükör helyettesítésére, amely rádiuszai megegyeznek a tükörével, akkor a tükörrel azonos törőerejű lencse létrehozásához a törésmutatónak:  $n_1 = 2n_0$ -nak kell lennie.)

## 2.3. MÁTRIXOS FORMALIZMUS

### Alapdefiníciók



**15. ábra.** Mátrixos formalizmusban különböző optikai felületen mért sugárkoordináták (sugármagasság ( $y$ ) és iránykoszinusz  $n \cdot \cos(\alpha)$ ) közötti összefüggést a két felület közötti átviteli mátrixszal fejezhetjük ki.

Fénysugár y-optikai iránykoszinusza:

$$q_0 \equiv n_0 \cdot \cos(\alpha_0) = n_0 \cdot \sin(\theta_0) \approx n_0 \cdot \theta_0, \quad (14)$$

vagyis az y-tengellyel bezárt szög koszinusza a z-tengellyel bezárt szög szinusa, ami paraxiális közelítésben maga a szög. A 0. és 1. síkokon mért sugárkoordináták között az átviteli (v. ABCD) mátrix teremt kapcsolatot (hasonlóan az x-p koordinátapárosra):

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ q_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

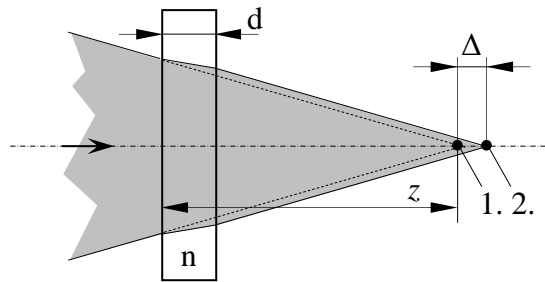
Ha két sík között leképezés áll fenn, akkor  $B = 0$  ! Lencsefelületen fénytörés:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Két felület között szabadtéri terjedés:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_0/n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

### Síkpárhuzamos üveglemez



**16. ábra.** Síkpárhuzamos üveglemez képeltoló hatásának vizsgálata

Most a mátrixos formalizmus segítségével azt vizsgáljuk meg, hogy egy törőerővel nem rendelkező üveglemez hogyan helyezi át a képet (pl. CCD fedőüveg). Bár elsőre szokatlan, de a 16. ábrán látható üveglemez egy leképezést valósít meg, az 1.-el jelölt (virtuális) tárgypontra, és a 2.-vel jelölt képpont között. E tárgy-képsík pár között felírjuk az 1. pontból (tárgysík) a 2. pontba (képsík) történő leképezés ABCD mátrixát:

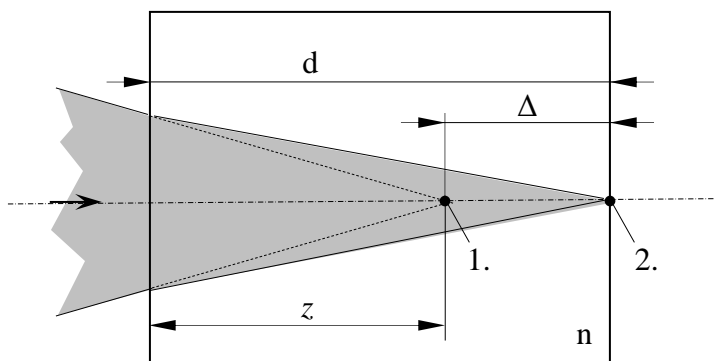
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z-d+\Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d-d \cdot n + \Delta \cdot n}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A tényezők értelmezése jobbról balra haladva a következő: az 1. ponttól az üveglemez belépő felületéig tartó virtuális terjedés; fénytörés (egységmátrix); a  $d$ -vastagságú lemezen való áthaladás; fénytörés (egységmátrix); az üveglemez kilépő felületétől a 2. pontig tartó fénytörés. A (18) összefüggés eredő mátrixára felírva a  $B \equiv 0$  leképezési feltételt, a képeltolás mértékére az adódik, hogy:

$$\Delta = d \cdot \frac{n-1}{n}. \quad (19)$$

Figyeljük meg, hogy „z” értéke kiesett a képletből, azaz a képeltolás mértéke független a lemez helyzetétől. Vegyük észre azt is, hogy ( $A = 1$ ) azt mutatja, hogy a nagyítás egységnyi.

Házi feladat: mennyit változik a fókuszpont *laterális* ( $x$ - $y$ ) helyzete, ha a fenti üveglemezt kicsiny  $a$  szöggel *megdöntjük*?



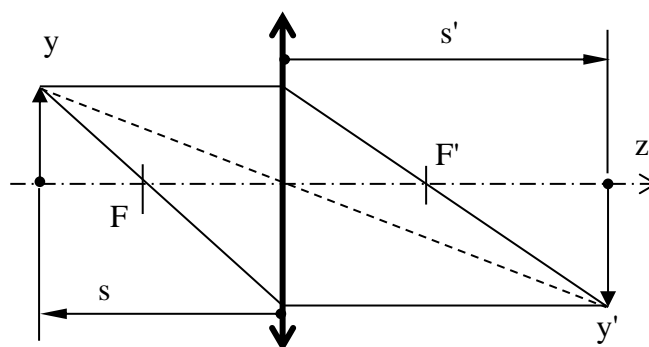
**17. ábra.** Anyagba fókuszált fénynyaláb pozíciójának megváltozása levegőbe fókuszált nyaláb esetéhez képest.

További érdekes kérdés, hogy adott anyagba fókuszált fénynyaláb optikai tengelyirányú pozíciója mennyivel változik meg ahhoz képest, ha ugyanezt a nyalábot levegőbe fókuszáljuk (ld. 17. ábra). Ez olyan, mintha a fókuszpont éppen az előbbi üveglemez hátsó falán lenne:

$$\Delta = d \cdot \frac{n-1}{n} \quad ; \quad d = z + \Delta = z + d \cdot \frac{n-1}{n} \Rightarrow d = \frac{z}{1 - \frac{n-1}{n}} = z \cdot n. \quad (20)$$

### Vékonylencse

Két, nulla távolságra elhelyezett törőfelület, ahol  $n_0 \neq n_1 \neq n_2$  és  $r_1$  és  $r_2 \gg D$  (átmérő). Tárgytávolság:  $s$ , képtávolság:  $s'$  (vékonylencsétől mérve!) ld. a 18. ábrán.  $n_0 = 1$ ;  $n_1 = n$ ;  $n_2 = 1$ .



**18. ábra.** Vékonylencse tulajdonságait leíró mennyiségek magyarázata.

$$\begin{bmatrix} y' \\ q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 - n/f_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix} \quad (21)$$

A vékonylencse törőereje tehát:

$$p = p_1 + p_2 = 1/f_2 + n/f_1. \quad (22)$$



Így tehát:

$$\begin{bmatrix} y' \\ q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix}, \text{ ahol } A = 1 - ps'; B = s'(1 + ps) - s; C = -p; D = 1 + ps. \quad (23)$$

Tárgy-képpont pár esetén  $y'$  független  $v$ -től, tehát  $B = 0$ , innen:

$$s'(1 + ps) - s = 0 \rightarrow 1/s' = p + 1/s, \quad (24)$$

ami nem más mint a lencsetörvény

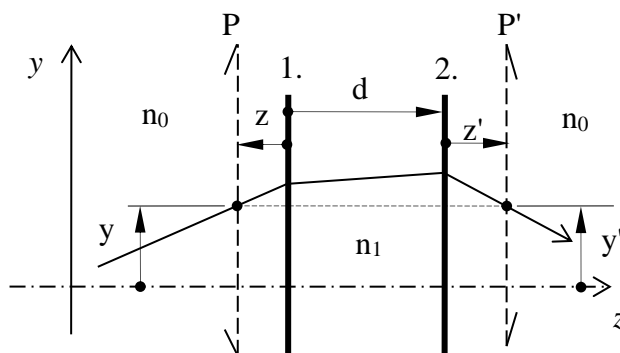
$$(p = 1/s' = 1/f, \text{ ha } s \rightarrow -\infty). \quad (25)$$

Ezt visszahelyettesítve megkapjuk a vékonylencse mátrixát leképezés esetére:

$$\begin{bmatrix} y' \\ q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s'/s & 0 \\ -p & s'/s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix}. \quad (\text{Nagyítás: } s'/s; \text{ szögnagyítás: } s/s') \quad (26)$$

**Vastaglencse :** Ld. mint fent, kivéve:  $d \neq 0$ .

**Fősíkok**



**19. ábra.** Első fősík (P) a hátsó fősík (P') fogalma és az ezek közötti fényterjedés leírásához használt mennyiségek magyarázata.

A fősíkok alkotják azt a tárgy-képsík párost, amelyet a rendszer +1 -es nagyítással képez le egymásba. Vékonylencse esetén ez egybeesik a vékonylencsével. Vastaglencse esetén, ha az első fősík távolsága az első lencsefelülettől:  $z$ , és a másodiké az utolsó lencsefelülettől  $z'$ , és a lencse törésmutatója  $n_1$ , a környezetéé pedig  $n_0$ , vastagsága  $d$ , rádiuszai  $r_1$  és  $r_2$ , akkor az első fősíkról (P) a hátsóra (P') történő fényterjedés mátrixa:

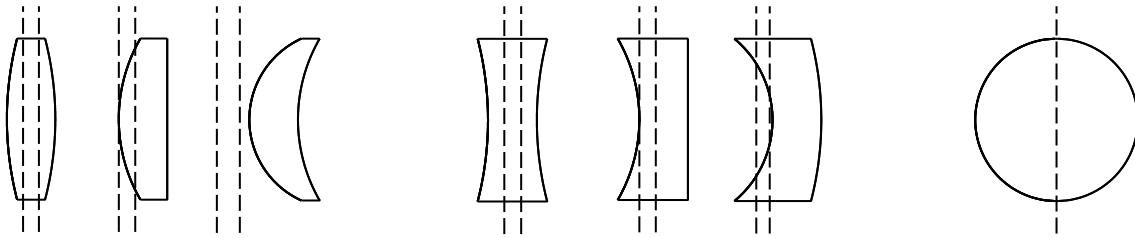
$$\begin{bmatrix} y' \\ q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z'/n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n_0/f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n_1/f_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -z/n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix} \quad (27)$$

A fősík definíciója miatt:  $y' = y$  tetszőleges  $v$ -re (tehát ABCD-ből  $A=1$  és  $B=0$ ). Ebből:

$$z = \frac{n_0 r_1 d}{n_1 (r_1 - r_2) - (n_1 - n_0) d} = \frac{d}{n_1} \frac{p_2}{p} \quad \text{és} \quad z' = \frac{n_0 r_2 d}{n_1 (r_1 - r_2) - (n_1 - n_0) d} = -\frac{d}{n_1} \frac{p_1}{p}, \quad (28)$$

ahol  $p_1$  és  $p_2$  az első és hátsó felületek törőereje,  $p$  pedig a lencse eredő törőereje. Ha a tárgy-, képtávolságot, valamint a fókusz-távolságot a fősíkoktól mérjük, a (vékony) lencsetörvényt

kapjuk vissza! A 20. ábra a fősíkok helyzetét mutatja azonos fókusz távolságú pozitív/negatív lencsék, illetve gömb esetére. A rajzok méretarányosak (paraxiális szimuláció).



**20. ábra.** A fősíkok helyzete azonos fókusz távolságú pozitív/negatív lencsék, illetve gömb esetén.

A fősíktól mért fókusz távolságot *effektív fókusz távolságnak* nevezzük. Ha a vastaglencse effektív fókusz távolsága  $f'$ , akkor a törőereje (a levezetés a félévi házfeladat része):

$$p \equiv \frac{n_0}{f'} = (n_1 - n_0) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{d}{n_1} \frac{(n_1 - n_0)^2}{r_1 r_2} \quad (29)$$

más formában:

$$p = p_1 + p_2 - p_1 p_2 \frac{d}{n_1}. \quad (30)$$

Ha  $d = 0$ , visszkapjuk a vékonylencse törőerejének képletét.

Ha a képtér törésmutatója  $n_2$  és a tárgytéré ettől eltérő  $n_0$ , akkor:

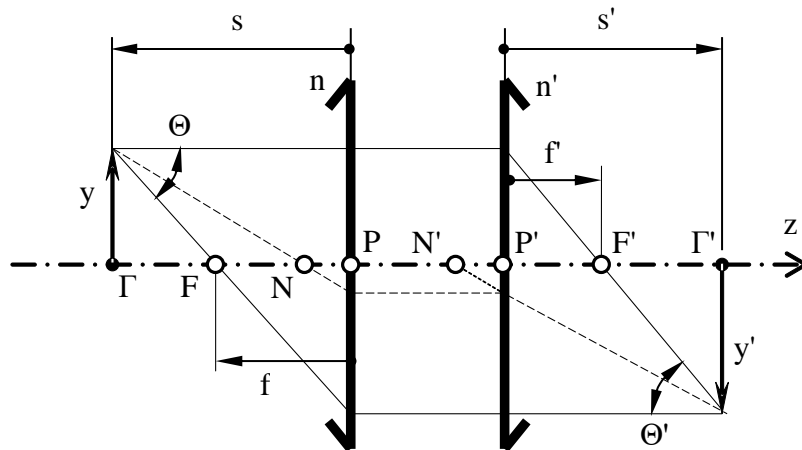
$$\frac{n_0}{f} = -\frac{n_2}{f'}. \quad (31)$$

Ha adott méretű és távolságú tárgyról az  $f'$  fókusz távolságú,  $n'$  képtéri törésmutatójú lencse adott méretű képet készít, akkor  $n' = 1$  képtéri törésmutató esetén  $f'_0$  fókusz távolságú lencse készít ugyanekkora képet ugyanerről a tárgyról:

$$f'_0 \equiv f' / n' \quad (32)$$

$f'_0$ -t (levegőre vonatkoztatott) ekvivalens fókusz távolságnak is nevezhetjük.

## Kardinális pontok, paraxiális jellemzők, képszerkesztés



21. ábra. Kardinális pontok szemléltetése

P – főpont (főszík tengelypontja)

N – csomópont

F – fókuszpont

Γ – tárgyszík (Gauss-után)

Γ' – képszík

Ha  $n = n'$  akkor  $P = N$ .

Paraxiális mennyiségek definíciói, összefüggései:

$$m \equiv y'/y \quad (33)$$

$$m_\alpha \equiv \Theta'/\Theta \quad (34)$$

$$m_L \equiv \frac{\partial s'}{\partial s} = \frac{n'}{n} m^2 \quad (35)$$

$$m_\alpha \cdot m = \frac{n}{n'} \quad (36)$$

A  $m$  és  $m_\alpha$  szorzata (paraxiális közelítésben) konstans, emiatt minden a tárgyszíkkal konjugált felületen állandó a sugársűrűség (radiance). (Lagrange-Helmholtz-egyenlet.)

JÖVŐ ÓRÁN

**Elsőrendű közelítés:** pupillák, rekeszek, fókuszmélység, mélységélesség

### 3. PARAXIÁLIS KÖZELÍTÉS A GYAKORLATBAN

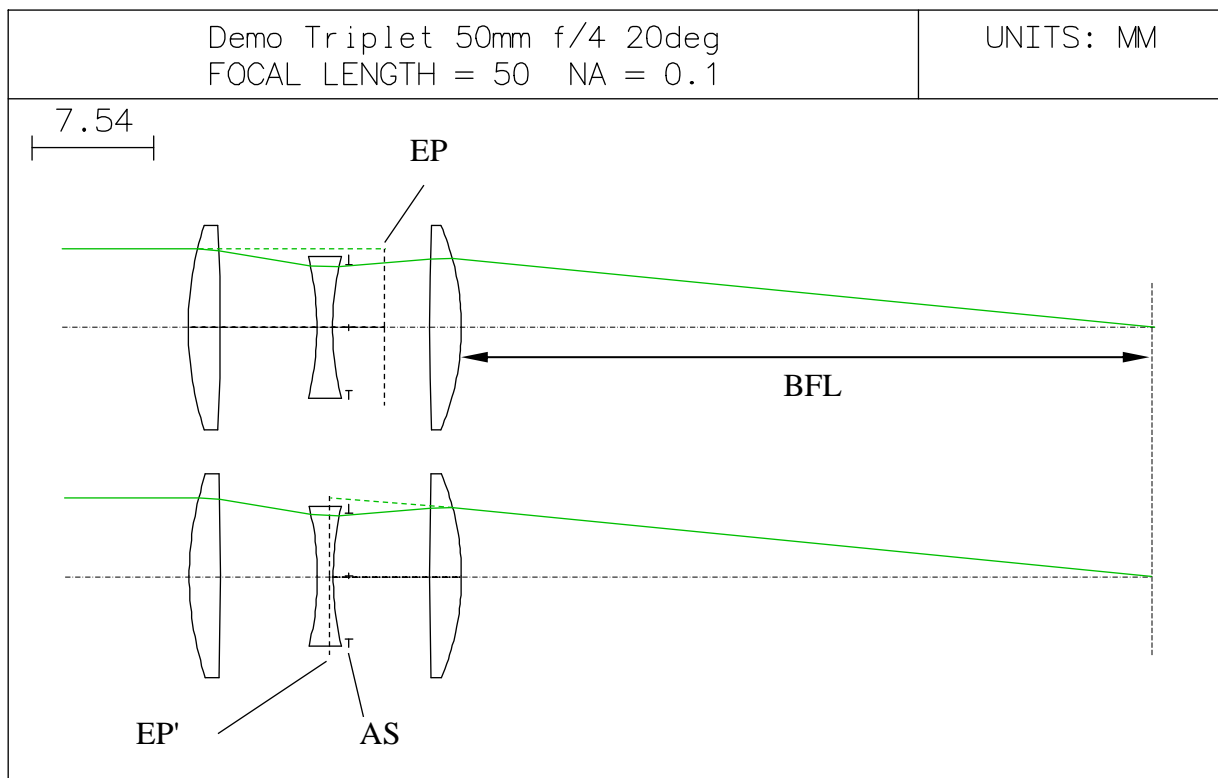
#### ISMÉTLÉS

**Ideális leképezés:** szigmatikus, egyenest egyenesbe, síkot síkba képez le, torzításmentes, meridionális sík meridionális síkba, tengelyre merőleges sík tengelyre merőleges síkba képződik le

**Paraxiális közelítés:** Az optikai tengellyel kis szöget bezáró és hozzá közel haladó sugarakra érvényes; teljesíti az ideális leképezés feltételeit. Minden leképező rendszer az optikai tengely közelében ideális.

**Első és hátsó fősík:** egymás +1-es nagyítású képei; ha a tárgy és képtávolságot tőlük mérjük, formálisan érvényes rájuk a lencsetörvény

#### 3.1. REKESZEK, PUPILLÁK



**22. ábra.** Belépő pupilla (EP), kilépő pupilla (EP') és apertúra rekesz (AS) helye egy triplet lencserendszer esetén. Hátsó fókusz távolság (BFL) értelmezésének magyarázata.

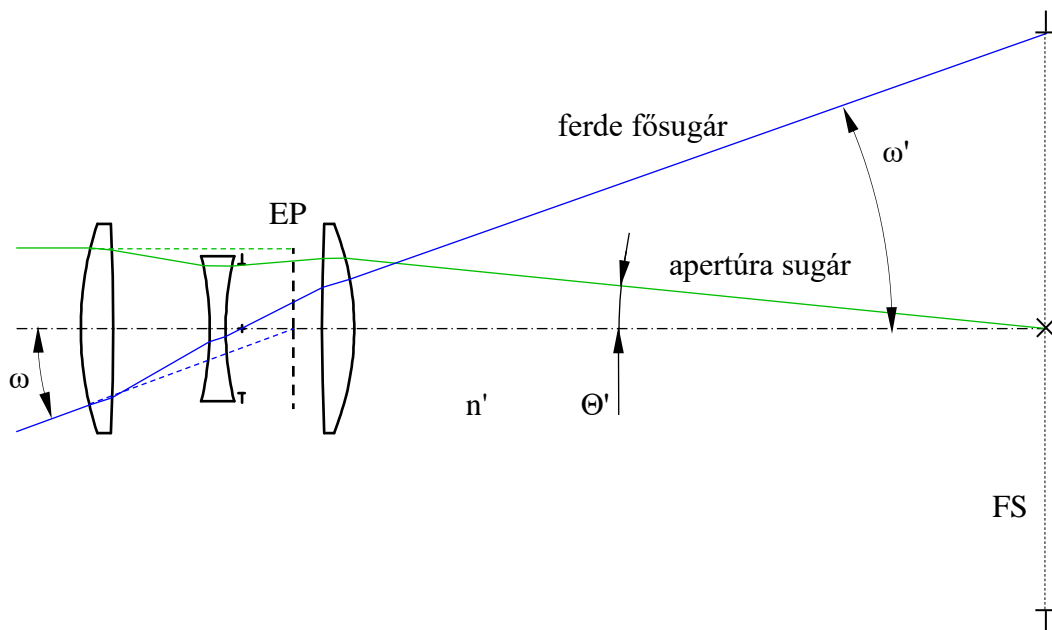
- AS – apertúra rekesz helye (aperture stop)
- FS – mező rekesz helye (field stop)
- EP – belépő pupilla helye (entrance pupil)
- EP' – kilépő pupilla helye (exit pupil)
- BFL – hátsó fókusz távolság (back focal length),  
az utolsó lencsefelülettől a fókuszpont távolsága

A belépő pupilla és az apertúra rekesz kölcsönösen konjugáltak.

A kilépő pupilla és az apertúra rekesz kölcsönösen konjugáltak.

A belépő pupilla és a kilépő pupilla kölcsönösen konjugáltak.

### 3.2. NEVEZETES SUGARAK



23. ábra. Nevezetes fénysugarak magyarázata

A **ferde fősugár** (chief ray) a tárgyter szélén lévő tárgypontból halad a belépő pupilla közepe felé.

Az **apertúra sugár** (axial ray v. marginal ray) az optikai tengelyen lévő tárgypontból halad a belépő pupilla széle felé. (ld. 23. ábra)

Numerikus apertúra Abbe-féle definíciója:

$$NA = n' \cdot \sin \Theta' \quad (37)$$

A diffrakciós fókuszolt sugara:

$$R_{\text{Airy}} = 0,61 \cdot \frac{\lambda_0}{NA} \quad (38)$$

Relatív nyílás (f-szám):

$$F/\# (= f_{\#}) \equiv \frac{f'_0}{D} \approx \frac{1}{2n' \tan(\Theta')} \approx \frac{1}{2NA} , \quad (39)$$

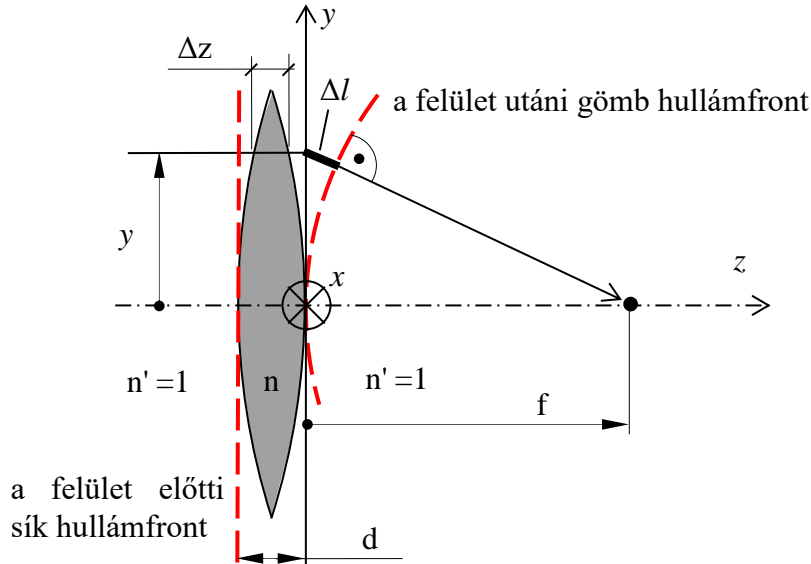
ahol „D” a belépő pupilla átmérője,  $f'_0$  pedig a képoldali (levegőre vonatkoztatott) ekvivalens fókusz távolság. Végtelesen végesbe történő leképezésnél használják.

Az NA-val a felbontóképességet, az  $F/\#$ -al a besugárzás mértékét szokás jellemezni (az optikai tengelyen). (A *besugárzás* radiometriai definíciója: egységnyi területen merőlegesen áthaladó fényteltjesítmény.) Radiometriai-fotometriai megfontolásokból következik, hogy egy ideális (ún. aplanatikus) leképezőrendszer és Lambert-sugárzó karakterisztikájú tárgy esetén a képsík közepén a besugárzás értéke  $\sim \sin^2 \Theta'$ , valamint az is, hogy a képsík besugárzása általában  $\sim \cos^4 \omega'$ . (Lambert-sugárzónak akkor nevezünk egy tárgyat, ha az általa kibocsátott fény sugársűrűsége irányfüggetlen. A *sugársűrűség* radiometriai definíciója: adott irányban, egységnyi felület merőleges vetülete által egységnyi térszögbe kisugárzott fényteltjesítmény.)

### 3.3. ALKALMAZÁSI PÉLDÁK

#### Vékonylencse által egy fénysugárhoz „hozzáadott” fáziskésés ( $\sim \Delta OPL$ )

A fókuszálás példáján bemutatva:



24. ábra. Hullámfront alakja vékonylencse előtt és után (piros szaggatott vonal).

A lencse előtti fázisfelület (hullámfront) és a lencse utáni hullámfront között minden fénysugár mentén ugyanakkora az optikai úthosszkülönbség ( $\Delta OPL$ ):

$$\Delta OPL(y) \equiv OPL(y) - OPL(0) = [(\Delta z \cdot n + (d - \Delta z)) + \Delta l] - n \cdot d = 0 \quad (40)$$

Ebből a lencse által okozott fáziskésés (a  $z = 0$  síkig):

$$\Delta \varphi = [(n-1) \cdot \Delta z + (1-n) \cdot d] \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = -\Delta l \cdot \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (41)$$

ahol  $\Delta l$  kifejezhető a gömbi hullámfront “ $f$ ” görbületi sugarával:

$$\Delta l = \sqrt{y^2 + f^2} - f = f \left( \sqrt{1 + \left(\frac{y}{f}\right)^2} - 1 \right) \approx \frac{y^2}{2f} \Rightarrow \Delta \varphi(y) = -\frac{y^2}{2f} \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (42)$$

Magyarázat a Taylor-sorfejtés:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{y}{f}\right)^2} - 1 \approx \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{f}\right)^2 \right) - 1 = \frac{y^2}{2f^2} \quad \text{ha } y \ll f \quad (43)$$

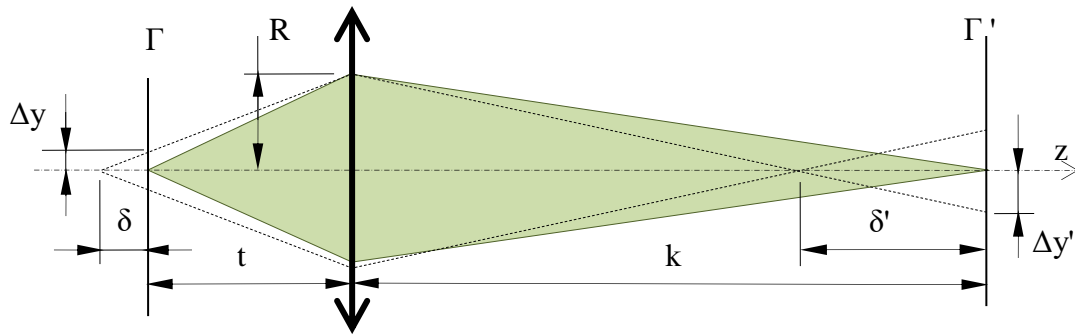
(41) alapján a lencse vastagságprofilja kb. parabolikus:

$$\Delta z = d - \frac{y^2}{2f} \frac{1}{n-1}. \quad (44)$$

Mindebből az következik, hogy egy lencse úgy viselkedik, mint egy fázistoló elem, ahol a fázistolás ( $\Delta\varphi$ ) négyzetesen függ a tengelytől mért távolságtól. Ez egyben azt is jelenti, hogy a gömbi hullámfrontokat paraxiális közelítésben parabolának tekintjük.

### Fókuszmélység, mélységélesség (geometriai optikai közelítésben)

A fókuszmélység ( $\delta$  – „focus depth”) azt fejezi ki, hogy mennyivel tolhatjuk arrébb a z-tengely irányában a képsíkot anélkül, hogy jelentős képminőségromlást észlelnénk. (Ha nem a kép, hanem a tárgysík eltolását vizsgáljuk, akkor a  $\delta$  távolságot mélységélességnek nevezzük – „depth of field”). A képminőségromlást azzal jellemezzük, hogy mekkora fényfoltot kapunk a képsíkban, defókuszált tárgypontra esetén (ld.  $\Delta y'$  a 25. ábrán). A mélységélesség annál nagyobb, minél kisebb  $\Delta y'$  tartozik ugyanakkora tárgy defókuszhoz, vagy minél nagyobb tárgy defókusz tartozik ugyanakkora  $\Delta y'$ -hoz. Geometriai optikai közelítésben a mélységélesség-tárgytávolság és effektív fókustávolság függését az alábbiakban egy ideális lencse esetére vizsgáljuk meg,  $m$  transzverzális nagyítás mellett, paraxiális közelítésben.



**25. ábra.** Mélységélesség ( $\delta$ ) definíciója és vizsgálata: hogy mekkora fényfoltot ( $\Delta y'$ ) kapunk a képsíkban defókuszált tárgypontra esetén.

$$\frac{\Delta y'}{\delta'} = \frac{R}{k + \delta'} \approx \frac{R}{k} \quad (\text{ha } |\delta'| \ll k, \text{ figyelem, a képen } \delta' \text{ és } \delta < 0!) \quad (45)$$

$$\frac{k}{t} = m \quad ; \quad m_L = m^2 \quad ; \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{f} + \frac{1}{t} \quad (46)$$

amiből következik, hogy

$$1 = \frac{k}{f} + m \rightarrow k = (1 - m)f \quad ; \quad \text{figyelem: } m < 0! \quad (47)$$

$$\Delta y' = \frac{R}{k} \delta' \rightarrow \Delta y' = \frac{R}{k} \delta \cdot m^2 \rightarrow \Delta y' = \frac{R \cdot \delta \cdot m^2}{(1 - m)f} \rightarrow \Delta y' = \frac{\delta \cdot m^2}{2(1 - m)f_{\#}} \quad (48)$$

Következtetés: kisebb apertúrarekesz mérethez ( $R$ ), azaz nagyobb  $f_{\#}$ -hoz, nagyobb mélységélesség tartozik, mivel ilyenkor adott  $\delta$  defókusz esetén kisebb az életlen folt  $\Delta y'$  mérete. Ezt szemlélteti jól láthatóan az alábbi fénykép-pár (26. ábra), ahol a nagyobb  $f_{\#}$ -nál élesebb a háttér.



**26. ábra.** Az apertúraeresz méretének csökkentésével (az  $f_{\#}$  növelésével) a mélységélesség növelhető. <http://www.blacks.ca/User/feeds/feature/id/703>

A képsíkon megfigyelhető defókuszált képfoltot a tárgyra visszavetítve a különböző képalkotási konfigurációk jól összehasonlíthatók egymással:

$$\Delta y = \frac{\Delta y'}{m} \Rightarrow \Delta y = \frac{\delta \cdot m}{2(1-m)f_{\#}} \quad (49)$$

amiből az következik, hogy

$$\Delta y = \frac{\delta \cdot m}{2f_{\#}} \quad \text{ha } |m| \ll 1 \quad (\text{pl. fényképezőgép}) \quad (50)$$

$$\Delta y = \frac{\delta}{2f_{\#}} \quad \text{ha } |m| \gg 1 \quad (\text{pl. projektor, mikroszkóp objektív}) \quad (51)$$

A fenti összefüggések azt jelentik, hogy a mélységélesség kb. nagyítás független nagy nagyítású optikák, pl. mikroszkópok, projektorok esetén. Fényképezőgépek esetén pedig azt a következtetést lehet levonni, hogy nagyobb nagyítással (azaz nagyobb formátumú filmre vagy CCD/CMOS képdetektorra) fotózva ugyanazt a tárgyat, kisebb lesz a mélységélesség. Ezen az elven alapszik a manapság divatos fotózási trükk, a miniatúra hatás, ahol nagyméretű beállításokat normál fényképezőgéppel (azaz kis nagyítással) lefotóznak úgy, hogy a képsíkot fizikailag bedöntik az optikai tengelyre merőleges síkhoz képest, ezzel csökkentve le mesterségesen az amúgy praktikusán végtelen mélységélességet („tilt-shift photography”) ld. 27. ábrát.

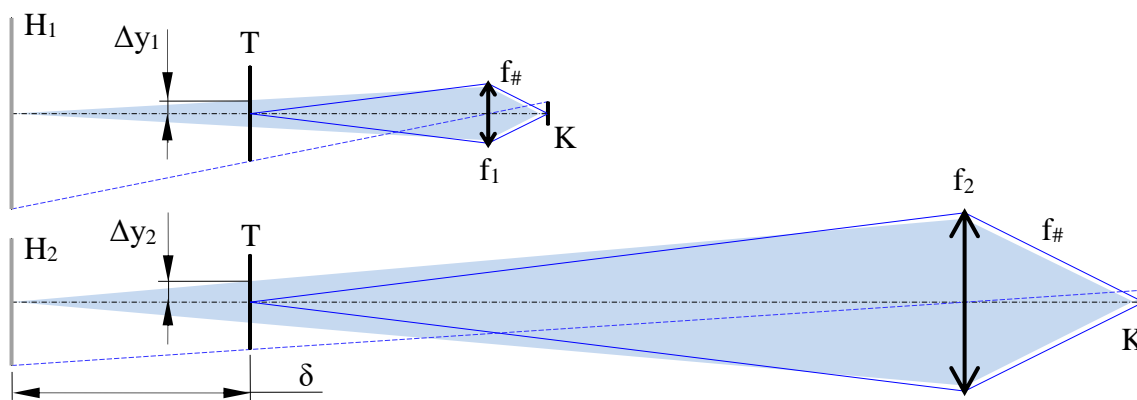




27. ábra. Példa a miniatúra hatás alkalmazására.

<https://www.solopress.com/blog/photography/small-worlds-by-keith-loutit/>

A fényképészetben az  $f_{\#}$ -on kívül a fókusz távolság megváltoztatásával is érdekes hatásokat érhetünk el, az effektív fókusz távolságnak ugyanis erőteljes hatása van a perspektívára. Tételezzük fel, hogy az  $f_{\#}$ -t és a nagyítást ( $m$ ) nem változtatjuk meg egy adott tárgy (T) leképzése esetén. A háttér (H) pozícióját sem változtatjuk T-hez képest. Annak érdekében, hogy két különböző fókusz távolság esetén ( $f_1 < f_2$ ) ne változzon a nagyítás, természetesen eltérő kép és tárgytávolságokat kell alkalmaznunk. Mindezt jól láthatóan szemlélteti az alábbi méretarányos rajz a 28. ábrán (paraxiális szimuláció).



28. ábra. Az effektív fókusz távolság növelésével csökkenthető a perspektíva – az azonos nagyítás érdekében a fenti 1. és 2. esetben eltérő kép és tárgytávolságokat kell alkalmazni.

Nagyobb fókusz távolságú lencserendszer (tipikusan teleobjektív) használata esetén a perspektíva beszűkül, a T tárgy mögött érzékelhető háttér abszolút mérete lecsökken ( $H_2 < H_1$ ). Ez annak felel meg, hogy a 2. esetben a háttér egy kisebb darabját látjuk ugyanakkorának, mint az 1. esetben. Az alábbiakban kiszámoljuk, hogy adott mértékben ( $\delta$ ) defókuszált H háttéren

lévő tárgypontról érkező fény mekkora  $\Delta y$  foltot képez a T tárgyra élesre állított objektív tárgysíkjában. A fotózásban gyakran alkalmazott nagy háttér-tárgy távolság ( $\delta$ ) esetén nem megfelelő sem a (45) indulási egyenlet, sem az ebből levezetett (49), mert nem igaz a kezdeti feltétel:  $|\delta| \ll k$  (itt most szándékosan nem maradunk mélységélességen belül). Emiatt pontosabb képletet határozzunk meg:

$$\frac{\Delta y}{\delta} = \frac{R}{t + \delta}. \quad (52)$$

Mivel

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{f} + \frac{1}{t} \rightarrow t = \left(\frac{1}{m} - 1\right)f \rightarrow \Delta y = \frac{R \cdot \delta}{\left(\frac{1}{m} - 1\right)f + \delta}. \quad (53)$$

Mivel most elsősorban fotózásról van szó, feltételezzük, hogy  $|m| \ll 1$  (azaz  $|t| \gg f$ ), amivel

$$\Delta y = \frac{R \cdot \delta}{\frac{f}{m} + \delta} \rightarrow \Delta y = \frac{\delta}{\frac{2f_{\#}}{m} + \frac{\delta}{R}}. \quad (54)$$

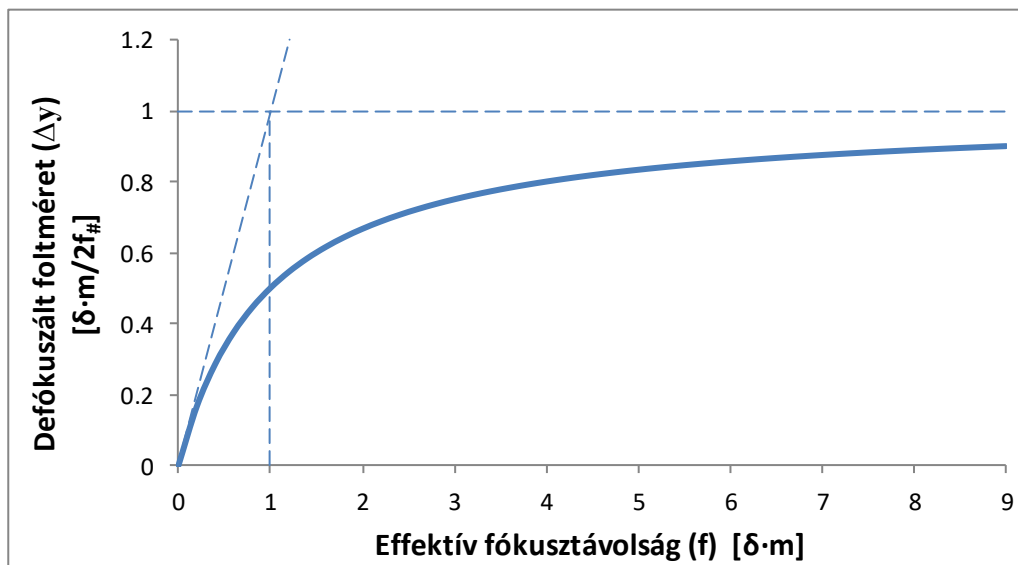
A kis nagyítás (illetve nagy tárgytávolság) miatt  $k \approx f$ , ekkor

$$R \approx f/2f_{\#}. \quad (55)$$

Ezt a fenti képletbe behelyettesítve és átrendezve megkapjuk a végeredményt:

$$\Delta y = \frac{\delta \cdot m}{2f_{\#}} \frac{1}{1 + \frac{\delta \cdot m}{f}}, \quad (56)$$

ami kis  $\delta$ -kra tényleg visszaadja (50)-et. A defókuszált foltméret fenti képletnek megfelelő fókusz-távolság függését ábrázoltuk a 29. ábrán, normált egységekben.



**29. ábra.** A defókuszált foltméret - effektív fókusz-távolság függése az (55) egyenletnek megfelelően.

Fotózásban  $\delta$  több száz méter is lehet, és ilyenkor inkább az teljesül, hogy  $|\delta \cdot m| \gg f$ . (Például  $f = 0,2 \text{ m}$ ;  $m = -0,05\times$ ;  $\delta = 100 \text{ m} \rightarrow f/|\delta \cdot m| = 0,04 \ll 1$ .) Ekkor a képlet leegyszerűsödik:

$$\Delta y \approx \frac{f}{2f_{\#}} . \quad (57)$$

A kapott összefüggés úgy interpretálható, hogy (kizárólag) nagy defókusz esetén a háttérről érkező képfoltok mérete nagyjából arányos a fókusztávolsággal. A várható eredményt demonstrálja az alábbi fotó pár (30. ábra): nagy fókusztávolság használata esetén szebb a háttér „mosása”. A második kép természetesen jóval messzebről készült, hogy a főtéma mérete konstans maradjon.



**30. ábra.** Nagyobb fókusztávolság használata esetén a perspektíva beszűkülése miatt szebb a háttér „mosása”. <http://jcorbinphotography.blogspot.hu/2011/07/focal-length-can-it-compress-expand-your.html>

A fenti képet szemlélve feltűnhet, hogy a háttér mindkét fókusztávolság esetén nagyjából egyformán életlen. Ennek számszerűsítése érdekében visszavetítjük  $\Delta y$ -t a háttérre, és meghatározzuk az ott mérhető látszólagos foltméretet ( $\Delta y_H$ ). Továbbra is  $|m| \ll 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_H &= \Delta y \cdot \frac{t + \delta}{t} \\ \frac{\Delta y}{\delta} &= \frac{R}{t + \delta} \Rightarrow \Delta y \cdot (t + \delta) = R\delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta y_H = \frac{R\delta}{t} = \frac{R\delta}{k/m} \approx \frac{R\delta \cdot m}{f} \quad (58)$$

Ismét felhasználva, hogy  $R \approx f/2f_{\#}$ :

$$\Delta y_H \approx \frac{\delta \cdot m}{2f_{\#}} , \quad (59)$$

vagyis visszakaptuk (50)-et. Ezzel azt is igazoltuk, hogy mindegy, vajon objektívünkkel a tárgyra vagy a  $\delta$  távolságban lévő háttérre állunk-e élesre, a defókuszált képfolt kiszámítására alkalmazható képlet nem változik. A fenti összefüggés értelmezése a következő: a háttéren mérhető defókuszált folt mérete fókusztávolság független, de nagyobb fókusztávolság használata esetén a perspektíva beszűkülése miatt az ugyanolyan mértékben életlen háttérrel relatíve nagyobbak érzékeljük, ami a főtéma (tárgy) síkjában látszólagosan életlenebb, erőteljesebb „mosású” háttérrel biztosít.

## JÖVŐ ÓRÁN

**Harmadrendű közelítés:** leképezési hiba gömbfelület esetén, transzverzális és longitudinális sugáraberrációk, aberrációs polinom, az aberrációk mérőszáma

## 4. AZ ABERRÁCIÓELMÉLET ALAPJAI

### ISMÉTLÉS

- Apertúra rekesz:** az optikai tengelyen lévő tárgypontról indított fénykúp nyílásszögét határozza meg, azaz a rendszeren átjutó fény mennyiségét korlátozza
- Be-, kilépő pupilla:** virtuális síkok, melyek az apertúra rekesz tárgy-/képpoldali képei (köztük a nagyítás nem feltétlenül egységnyi!)
- Ferde fősugár:** a tárgy szélén és az apertúra rekesz közepén áthaladó fénysugár
- Apertúrasugár:** a tárgy közepén és az apertúra rekesz szélén áthaladó fénysugár

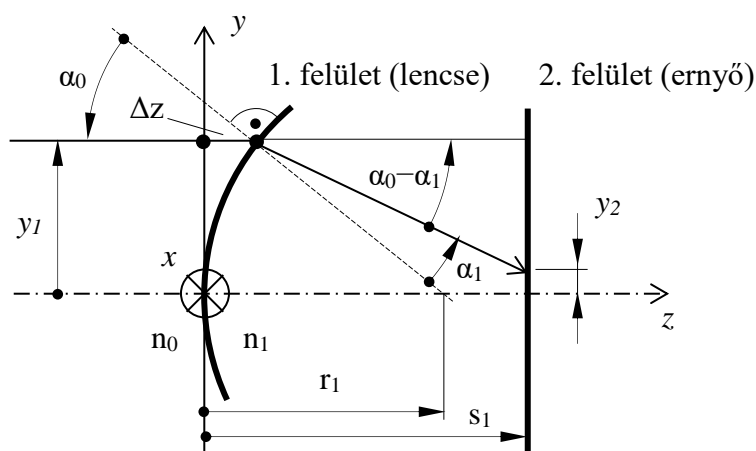
### 4.1. KÉPALKOTÁSI HIBÁK (ABERRÁCIÓK)

- A valódi (azaz nem paraxiális) optikai rendszerek általában nem teljesítik az ideális leképezés feltételeit. Ekkor a leképezés képalkotási hibákkal – aberrációkkal – terhelt.
- Az aberrációkat az okozza, hogy gyártás és ellenőrzés egyszerűsége miatt a leggyakrabban használt gömbsüveg alakú lencse és tükörfelülettel általában nem lehet kiterjedt tárgyról tökéletes leképezést megvalósítani.
- Az aberrációk nem a gyártási hibák következményei, hanem a gömbfelületekből alkotott (névleges) optikai rendszer sajátjai. (A gyártási hibák képalkotásra gyakorolt hatásait az ún. tűrésszámítással vesszük figyelembe.)

#### Az aberrációelmélet jelentősége

- a képalkotás minőségének megismerésében és leírásában jelentős szerepet játszottak
- a leképező rendszer belső összefüggéseit lehet általuk feltárni
- a különböző aberrációk eltérő tervezési műfogásokkal korrigálhatóak
- segítségükkel általános tervezési elvek alakíthatóak ki

#### Gömbi törőfelület leképezési hibája (aberrációja)



**31. ábra.** Kollimált, tengelypárhuzamos belépő nyaláb leképezése egyetlen gömbi törőfelülettel. A leképezés hibájának ( $y_2$ ) meghatározása.

$$n_{01} \equiv n_1 / n_0 \quad (60)$$

A jelen vizsgálatot kollimált, tengelypárhuzamos belépő nyaláb esetén végezzük. Keressük az  $y_2 = f(y_1)$  függvényt, az  $r_1$ ,  $n_{01}$  és  $s_1$  paraméterek függvényében.

$$\left. \begin{aligned} I. \quad & \sin \alpha_0 = n_{01} \sin \alpha_1 \\ II. \quad & y_1 = r_1 \cdot \sin(\alpha_0) \\ III. \quad & \Delta z = r_1 - \sqrt{r_1^2 - y_1^2} \\ IV. \quad & y_2 = y_1 - (s_1 - \Delta z) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_1) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Taylor-soros közelítésből:

$$III. \Rightarrow \Delta z \approx \frac{y_1^2}{2r_1} \quad (62)$$

$$II. \Rightarrow \alpha_0 = a \sin\left(\frac{y_1}{r_1}\right) \quad (63)$$

$$I. \text{ és } II. \Rightarrow \alpha_1 = a \sin\left(\frac{y_1}{n_{01}r_1}\right) \quad (64)$$

A Taylor-soros közelítésből:

$$a \sin(x) \approx x + \frac{x^3}{6} \quad ; \quad \operatorname{tg}(x) \approx x + \frac{x^3}{3} \quad (65)$$

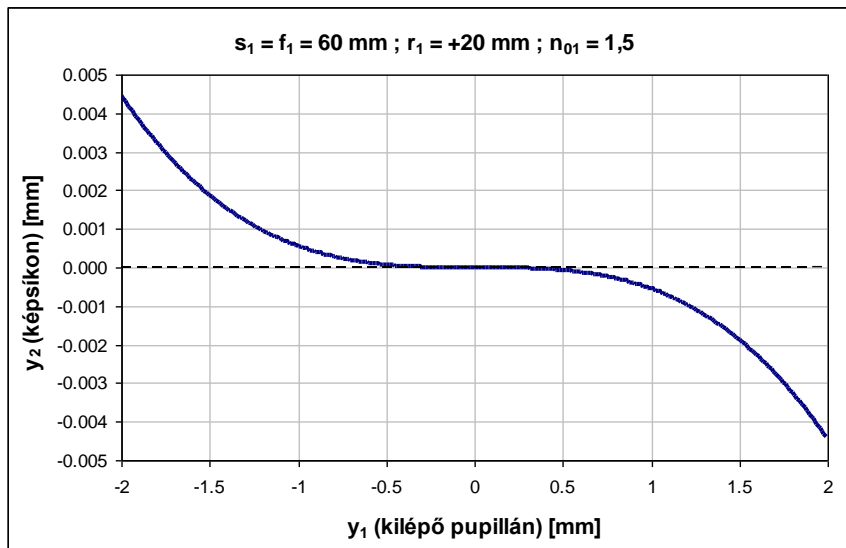
Mindezeket IV.-be behelyettesítve és átrendezve:

$$y_2 = y_1 \cdot \left(1 - s_1 \frac{n_{01} - 1}{n_{01}r_1}\right) + y_1^3 \cdot \left[\frac{n_{01} - 1}{2r_1^2 n_{01}} - \frac{s_1}{2r_1^3 n_{01}^3} \cdot ((n_{01} - 1) + (n_{01} - 1)^2 + (n_{01} - 1)^3)\right], \quad (66)$$

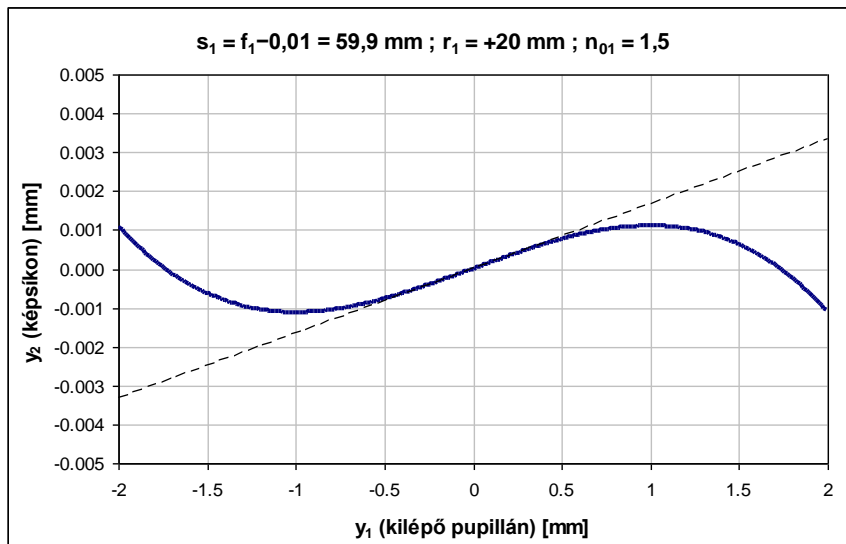
ahol a keletkező ötödrendű tagokat elhanyagoltuk. A fenti összefüggés harmadrendig leírja a leképezés hibáját, az optikai tengelyen lévő végtelen távoli tárgypontra esetén. Az első tag a defókuszáltságot írja le; ha  $s_1 = f_1$ , ez a tag nulla, a 2. felület a paraxiális fókuszban van (ld. múlt óra, elsőrendű közelítés). A második tag, mint majd később látni fogjuk, az ún. nyíláshiba v. szférikus aberráció (ld. 32. ábra).



**32. ábra.** Nyíláshiba okozta aberráció. A képsík a paraxiális fókuszban van.



33. ábra. Nyíláshiba transzverzális hibagörbéje, a képsík paraxiális képsíokban.



34. ábra. Nyíláshiba transzverzális hibagörbéje, a képsík optimális pozícióban (foltméret minimumnál).

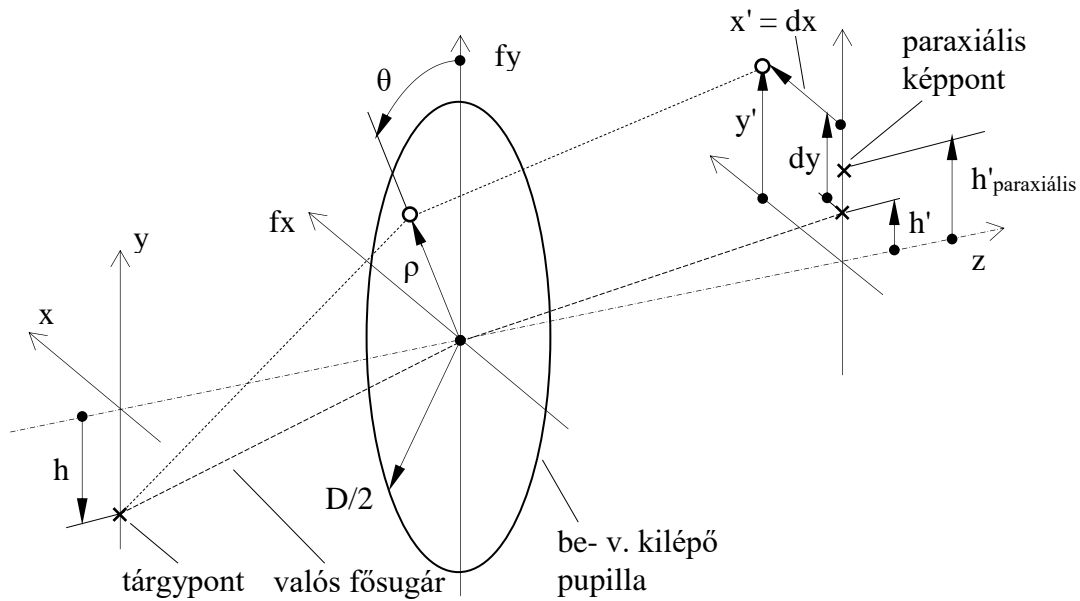
#### Aberrációk csoportosítása spektrális viselkedés szerint

- monokromatikus aberrációk: egyetlen, adott hullámhosszú fényel történő leképezés esetén is előállnak (képelesség, alakhúság)
- kromatikus aberrációk: különböző hullámhosszak esetén történő leképezés esetén keletkeznek, a lencseanyagok (üvegek) törésmutatójának hullámhossz-függése miatt

#### Aberrációk csoportosítása mérőszám szerint

- transzverzális sugáraberrációk (a hibákat a képsíkon lévő képfoltokon mérjük)
- longitudinális sugáraberrációk (a hibákat az optikai tengely irányában mérjük)
- hullámfront-aberrációk (a hibákat a kilépő pupilla hullámfrontján mérjük)

## 4.2. TRANSZVERZÁLIS, MONOKROMATIKUS ABERRÁCIÓK



35. ábra. Transzverzális sugáraberrációk vizsgálata.

Fénysugár transzverzális koordinátái az optikai tengelyhez képest:  $x'$  és  $y'$

Transzverzális sugáraberrációk értéke a valós fősugár-képsík metszéspontjához képest:  $dx$  és  $dy$

$$\begin{aligned}\rho^2 &= fx^2 + fy^2 \\ \sin \theta &= fx / \rho \\ \cos \theta &= fy / \rho\end{aligned}\quad (67)$$

$\rho$ ,  $fx$ ,  $fy$  a kilépő pupilla  $D/2$  sugarára normált koordináták.

### Transzverzális sugáraberrációk – harmadrendű közelítésben

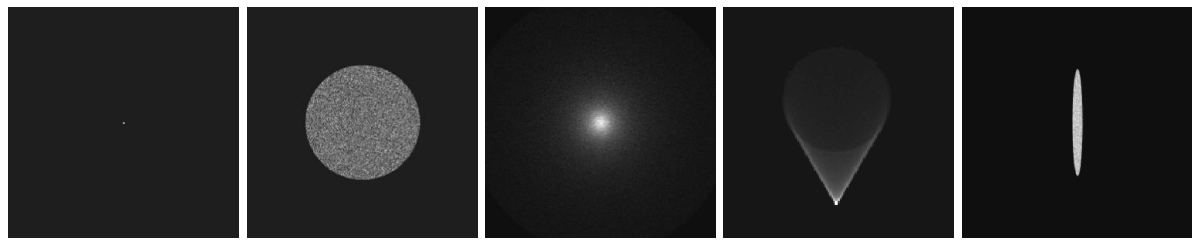
Az  $x'$  és  $y'$  sugárkoordináták Taylor-sorfejtése hengerkoordináta rendszerben: (Miközben a tárgy pont a tangenciális síkban van.)

$$\begin{aligned}y' &\approx A_1 \rho \cos \theta + A_2 h + \\ &B_1 \rho^3 \cos \theta + B_2 \rho^2 h \{2 + \cos 2\theta\} + \{3B_3 + B_4\} \rho h^2 \cos \theta + B_5 h^3 + \dots \\ x' &\approx A_1 \rho \sin \theta + \\ &B_1 \rho^3 \sin \theta + B_2 \rho^2 h \{\sin 2\theta\} + \{B_3 + B_4\} \rho h^2 \sin \theta + \dots\end{aligned}\quad (68)$$

- |  |   |
|--|---|
| $A_1$ - defókusz                         | } |
| $A_2$ - nagyítás                         |   |
| $B_1$ - nyíláshiba (szférikus aberráció) |   |
| $B_2$ - kóma                             |   |
| $B_3$ - asztigmatizmus                   |   |
| $B_4$ - Petzval-képmezőhajlás            |   |
| $B_5$ - torzítás                         |   |



Mindegyik aberráció jellegzetesen függ a tárgymagasságtól és a pupilla koordinátáktól. Az egyes aberrációk a legritkább esetben vannak jelen önmagukban, más aberrációk nélkül.



Ideális leképezés      Defókusz      Nyíláshiba      Kóma      Asztigmatizmus

**36. ábra.** A monokromatikus aberrációk jellemző képfoltjai geometriai optikai közelítésben.

A sorfejtés együtthatói bonyolult módon függenek a görbületi sugaraktól, a lencsefelületek távolságától, a törésmutatóktól valamint a tárgy és képtávolságtól. Az előbb B1 értékét határoztuk meg analitikusan egy gömbi törőfelületre, az optikai tengelyen lévő végtelen távoli tárgy pont esetén. A sorfejtés tagjai közül a paraxiális képmagasság:

$$h'_{\text{paraxiális}} = A_2 \cdot h, \quad (69)$$

és az ideális (sztigmatikus de torzított) képmagasság:

$$h' = A_2 \cdot h + B_5 \cdot h^3. \quad (70)$$

A valós fősugár esetén ( $\rho = 0$ ) a fenti sorfejtésből az marad, hogy

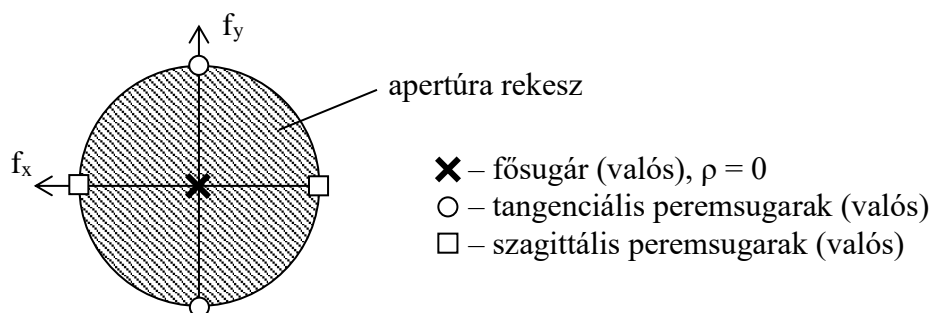
$$y' = A_2 \cdot h + B_5 \cdot h^3 \text{ és } x' = 0, \quad (71)$$

azaz az ideális képmagasság (harmadrendben) megegyezik a valós fősugár képsíkkal vett metszéspontjának  $y'$  koordinátájával.

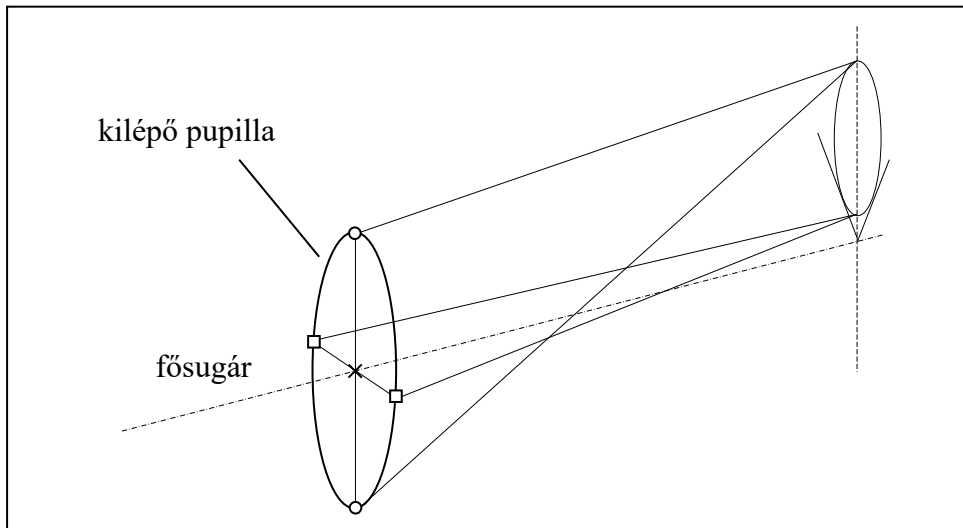
**Tangenciális sík:** Az  $y$ - $z$  sík. Minden tárgypontra azonos. Speciális meridionális sík, amely az általában az  $y$ -tengely mentén felvett tárgypontokat tartalmazza.

**Szagittális sík:** Merőleges a tangenciális síkra és benne fekszik az adott tárgypontból indított fősugár. Minden tárgypontra külön-külön kell értelmezni.

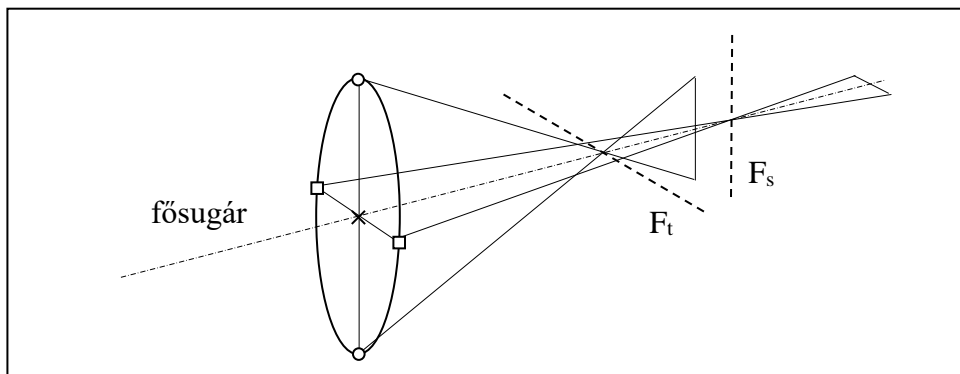
**Peremsugarak definíciója (37. ábra)**



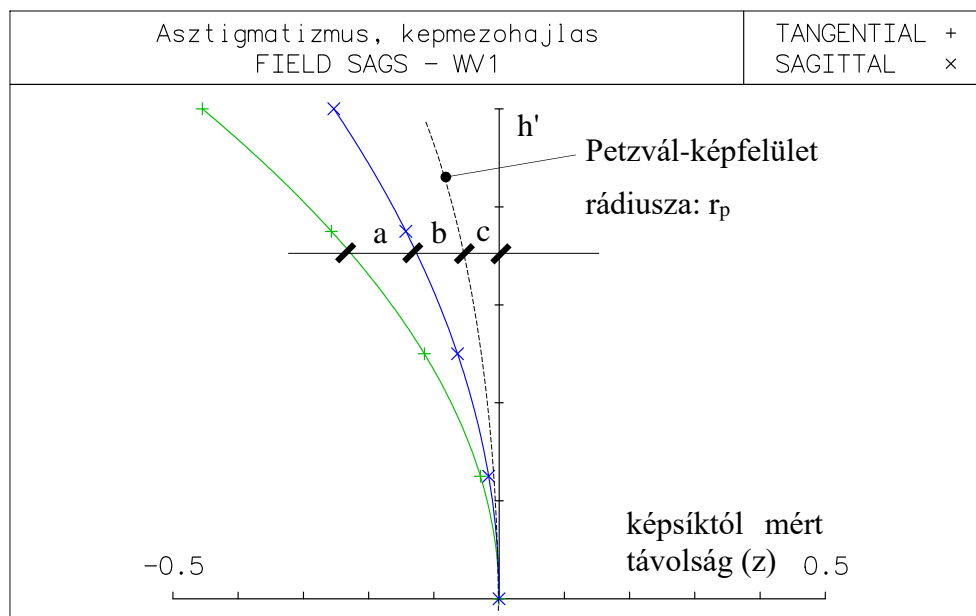
**37. ábra.** Peremsugarak definíciója.



38. ábra. Kómával terhelt nyaláb szóródási foltjának szemléltetése.



39. ábra. Asztigmatikus nyaláb fókusza ( $F_t$  és  $F_s$  egymásra merőleges fókuszvonalak).



40. ábra. Asztigmatizmus és képzőhajlás (a képfelület y-z keresztmetszete). Az a, b, c szakaszok harmadrendben egyenlők (egyetlen vékonylencse esetén).

### 4.3. AZ ABERRÁCIÓK KVANTITATÍV VIZSGÁLATA

#### Transzverzális hibagörbe

A transzverzális hibagörbe a valós fősugár képsíkkal vett dőfspontjához képest mért transzverzális aberrációk ( $dy$  és  $dx$ ) ábrázolása adott tárgyponthoz ( $h$ ), a kilépő pupillán mért relatív sugármagasság függvényében ( $fy$ ,  $fx$ ).

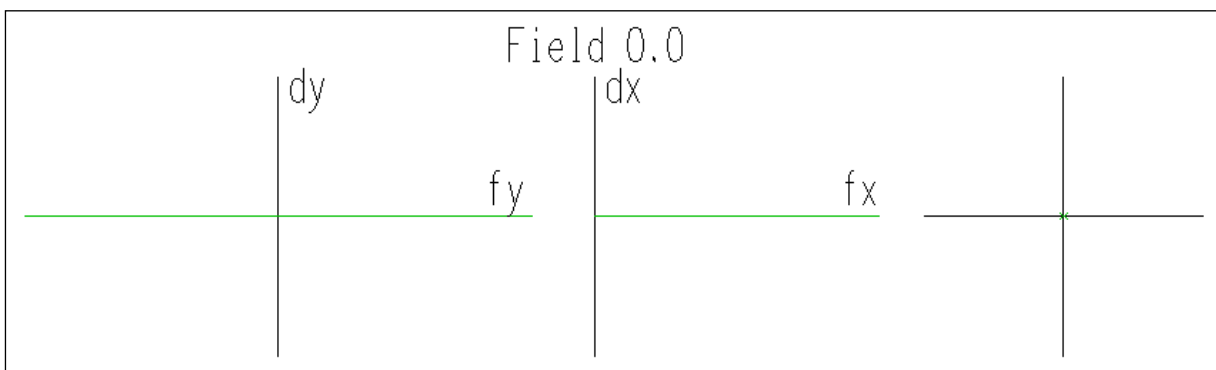
#### Szóródási folt

Adott „ $h$ ” tárgyponthoz az optikai rendszeren áthaladó fénysugarak képsíkkal vett dőfspontjainak halmaza. A szóródási foltban a fénysugarak sűrűsége arányos a besugárással (irradiancia). Ha ismert a szóródási folt (ez megfelel az impulzusválasznak), akkor tetszőleges tárgyról alkotott kép meghatározható a matematikából ismert konvolúció-tétel alapján.

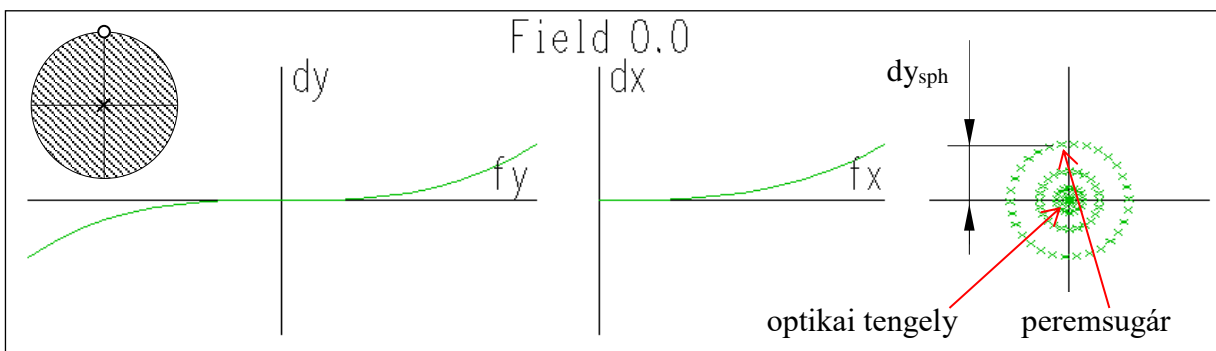
#### Transzverzális aberrációk mérőszáma

A különböző aberrációkat praktikus okokból nem a fenti sorfejtés együtthatóival, hanem az adott tárgyponthoz indított valós peremsugarak és a valós fősugár paraxiális képsíkkal vett dőfspontjai között lévő távolságokkal mérik (ld. a 41-45. ábrákon). Ezen távolságok értékét harmadrendű közelítésben határozzák meg, majd belőlük normálással alakítják ki az aberrációs együtthatókat. A transzverzális aberrációs-együtthatók – melyeket az aberrációk jellemző szimmetriatulajdonságai alapján alakítottak ki – a szóródási foltja jellemző közelítő mérőszámokat adnak.

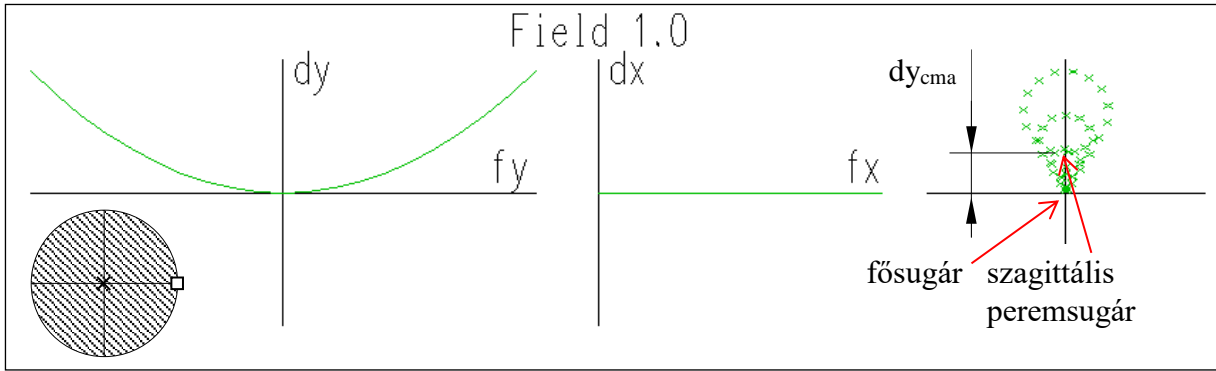
A képsík paraxiális képsíkban van (mint az alábbi ábrákon). Úgy tekintjük, mintha egyszerre csak egyfajta aberráció lenne jelen. A definíciókat az érthetőség kedvéért leegyszerűsítettük.



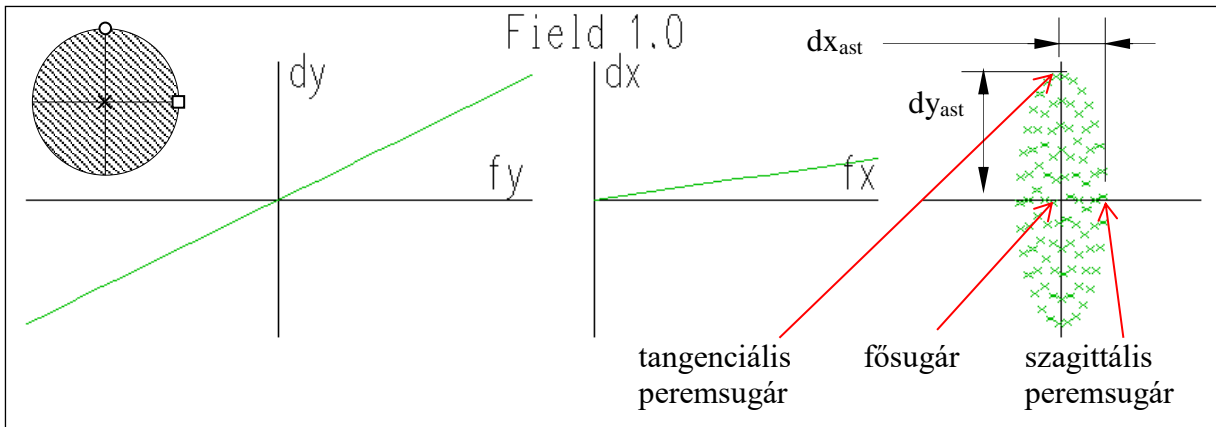
41. ábra. Ideális leképezés hibagörbéje és szóródási foltja. ( $dx = dy = 0$ )



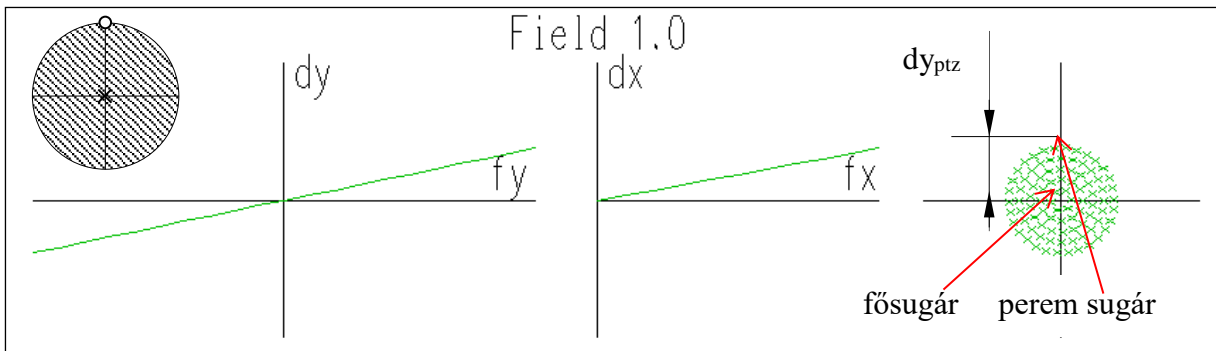
42. ábra. Nyíláshiba hibagörbéje és szóródási foltja.  $h = 0$ .



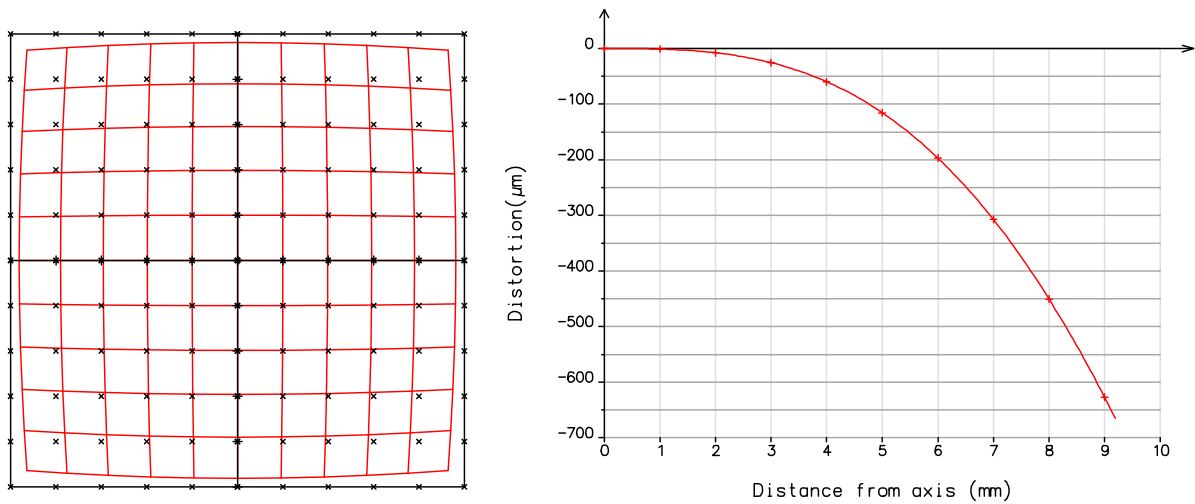
43. ábra. Kóma hibagörbéje és szóródási foltja.  $h \neq 0$ .



44. ábra. Asztigmatizmus hibagörbéje és szóródási foltja.  $h \neq 0$ .



45. ábra. Petzvál-képzőhajlás hibagörbéje és szóródási foltja (ua. mint defókusz).  $h \neq 0$ .



**46. ábra.** A (hordó) torzítás szemléltetése.

A torzítás a nagyítás értékének tárgymérettől való nem lineáris függése. A fenti 46. ábra hordótorzítást mutat, ennek ellenkezője a párnatorzítás. A torzítás mérőszáma:  $h' - h'_{\text{paraxiális}}$ , azaz a paraxiális képponttól mért távolság a képsíkon, ahol  $h'$  a valós fősugár képsíkkal vett dőléspontja. Gyakrabban használt mérőszám a paraxiális képponttól mért *relatív* távolság:

$$\text{DIS3} = (h' - h'_{\text{paraxiális}}) / h'_{\text{paraxiális}}. \quad (72)$$

JÖVŐ ÓRÁN

**Kromatikus aberrációk**

**Seidel-együtthetők**

**Az aberrációelméletből levonható következtetések**

## 5. ABERRÁCIÓELMÉLET A GYAKORLATBAN

ISMÉTLÉS

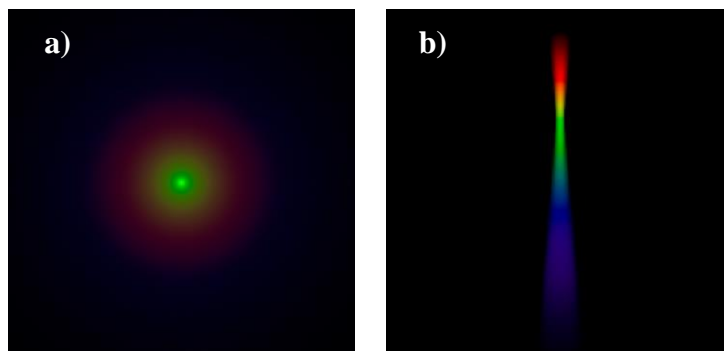
**Gömbfelület leképezési hibája**

**Transzverzális sugáraberrációk:** monokromatikus eset

**Aberrációs polinom:** aberrációk tárgymagasság és pupillakoordináta függése

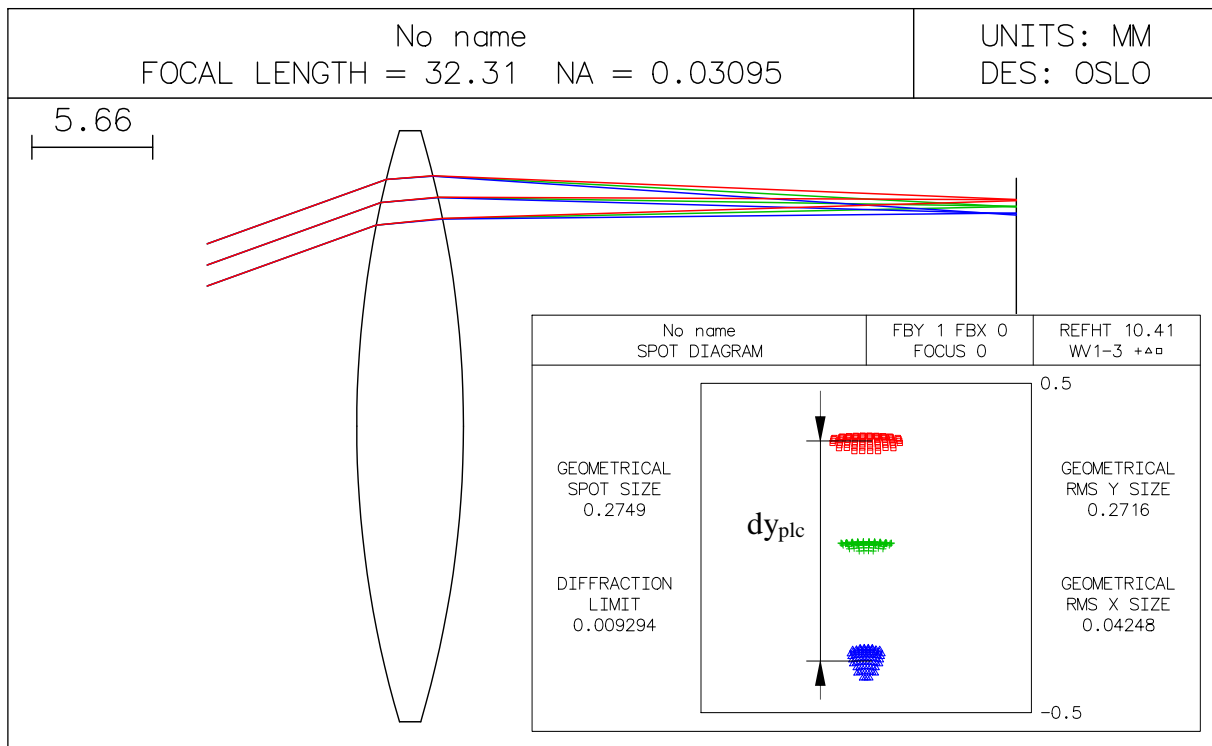
**Peremsugarak:** tangenciális és szagittális irány

### 5.1. ELSŐRENDŰ SZÍNHIKÁK (KROMATIKUS ABERRÁCIÓK)



47. ábra. Longitudinális (a) és transzverzális (b) kromatikus aberrációk hatása a képfoltra.

**Transzverzális kromatikus aberráció**



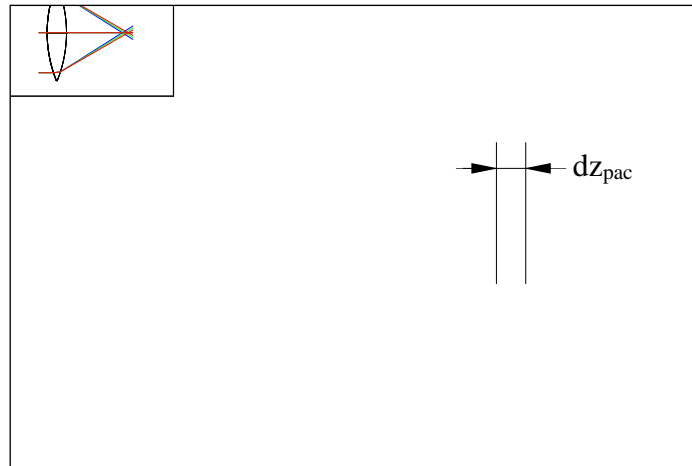
48. ábra. PLC – elsőrendű transzverzális színhiba

PLC lineárisan függ a hullámhossztól, mert:

$$n \approx n_0 - D \cdot (\lambda - \lambda_0) \quad (73)$$

ahol  $D$  jelöli a diszperziót.

### Longitudinális kromatikus aberráció



49. ábra. PAC – elsőrendű longitudinális színhiba

### 5.2. SEIDEL-EGYÜTTHATÓK

Az aberrációs együtthatók Seidel-féle formájához akkor jutunk, ha a fent bemutatott aberrációs mérőszámok paraxiális képsíkon mért, harmadrendű közelítésben meghatározott értékeit normáljuk a numerikus apertúra reciprokával, azaz  $1/2NA$ -val (azaz  $2NA$ -val szorozzuk). Ez kb. annak felel meg, mintha az aberrációk mérőszámát a diffrakciós folt sugarához viszonyítanánk ( $R_{\text{Airy}} \sim 1/NA$ ):

SA3	$\equiv 2NA \cdot dy_{\text{sph}}$	- harmadrendű nyíláshiba	(SPHA)	} (74)
CMA3	$\equiv 2NA \cdot dy_{\text{cma}}$	- harmadrendű kóma	(COMA)	
AST3	$\equiv 2NA \cdot (dy_{\text{ast}} - dx_{\text{ast}})$	- harmadrendű asztigmatizmus	(ASTI)	
PTZ3	$\equiv 2NA \cdot dy_{\text{ptz}}$	- harmadrendű Petzvál-képzőhajlás	(FCUR)	
PLC	$\equiv 2NA \cdot dy_{\text{plc}}$	- elsőrendű transzverzális színhiba	(CTR)	
PAC	$\equiv 2NA \cdot dz_{\text{pac}}$	- elsőrendű longitudinális színhiba	(CLA)	
DIS3	$\equiv 100\% \cdot dy_{\text{dis}}$	- torzítás	(DIST)	

Zárójelben a ZEMAX program által használt elnevezések szerepelnek.

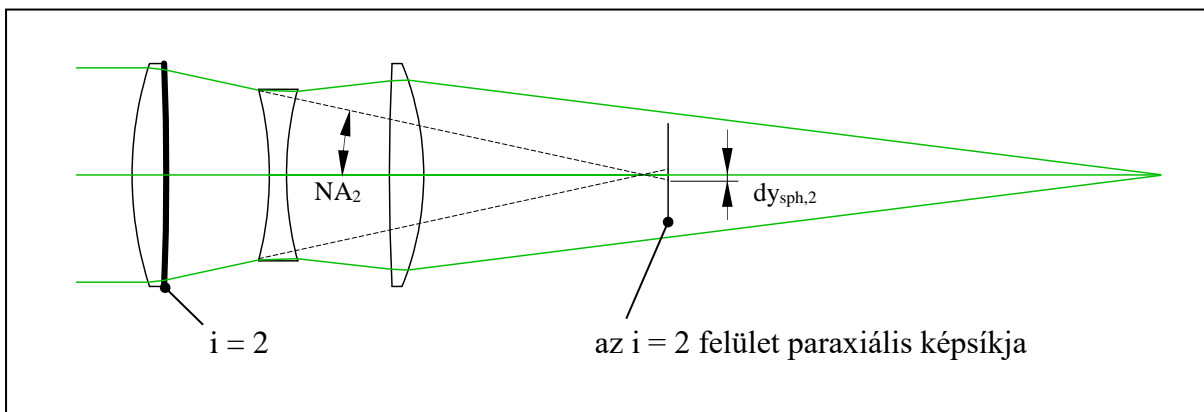
### A Seidel-együtthatók felületjáruléka

A fentebb definiált Seidel-együtthatók a lencserendszert alkotó minden felületre külön-külön kiszámolhatóak. Mivel egy adott felület bármelyik aberrációja csak kismértékben növeli a képsíkon a foltméretet, alkalmazható a „kisjelű közelítés” (linearizáció): az optikai rendszer

eredő aberrációját közelítőleg a felületeknél számított aberrációk összegeként kapjuk meg. Az együtthatók normálása miatt a különböző felületeken számított azonos fajta (pl. SA3 típusú) aberrációs együtthatók jól összehasonlíthatóak, ugyanis mind az adott felülethez tartozó képméret, mind pedig a diffrakciós folt sugara a nagyítással arányosan változik (tehát minden felületnél a képméret / diffrakciós foltméret hányados, azaz a felbontóképesség állandó).

$$\left. \begin{aligned} \Sigma SA3 &= \sum_{i=1}^n SA3_i & \Sigma DIS3 &= \sum_{i=1}^n DIS3_i \\ \Sigma CMA3 &= \sum_{i=1}^n CMA3_i & \Sigma PLC &= \sum_{i=1}^n PLC_i \\ \Sigma AST3 &= \sum_{i=1}^n AST3_i & \Sigma PAC &= \sum_{i=1}^n PAC_i \\ \Sigma PTZ3 &= \sum_{i=1}^n PTZ3_i \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Ahol „i” a felület sorszáma, „n” pedig az összes felület darabszáma.



50. ábra. Példa az  $i = 2$  felület nyíláshiba együtthatójának meghatározására ( $dy_{sph,2} \rightarrow SA3_2$ ).

### A Seidel-féle aberrációs együtthatók alkalmazásának korlátai

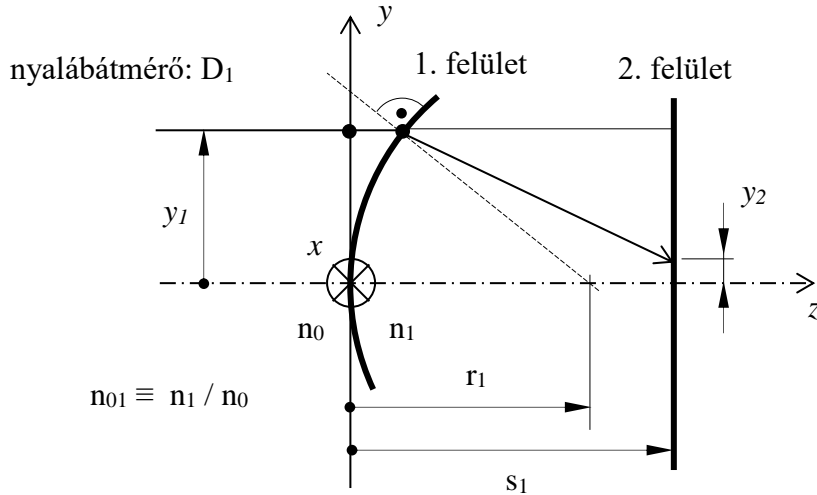
- Az aberrációk mérőszámainak meghatározásakor a fénysugarak pályájának kiszámítását csupán harmadrendű közelítésben végzik, ami 10-15% hibát jelent a valós sugárátvezetés eredményeihez képest.
- A különböző fajta aberrációk a valóságban együttesen vannak jelen és a képminőségre gyakorolt hatásuk összeadódik. Az együtthatók viszont nem adhatók össze (pl. kómát nem adhatunk össze nyíláshibával, vagy asztigmatizmussal). Emiatt csak Seidel-együtthatókra történő tervezéskor nincs módunkban a különböző aberrációkkal egymás hatását kompenzálni, ami viszont elengedhetetlen pl. diffrakciókorlátos leképező rendszerek tervezésénél. (Ezért, amennyiben van rá lehetőség, jobb valós sugárátvezetéssel, szóródási foltméretre optimalizálni.)



### 5.3. AZ ABERRÁCIÓELMÉLETBŐL LEVONT KÖVETKEZTETÉSEK

Bár a legtöbb harmadrendű aberráció (a Petzvál-görbület, a longitudinális és transzverzális színhibák kivételével) függ a lencsék alakjától, vagyis egy adott leképezési feladat megvalósítására alkalmazható kombinációk száma végtelen, az aberráció elmélet segítségével mégis levonhatunk bizonyos általános következtetéseket.

#### A nyíláshiba SA3 együtthatójának analitikus meghatározása



**51. ábra.** Magyarázó ábra a nyíláshiba SA3 együtthatójának analitikus meghatározásához.

Egyetlen törőfelület nyíláshibája a 4. fejezet alapján (tárgypont végtelenben, a tengelyen):

$$y_2 = y_1 \cdot \left( 1 - s_1 \frac{n_{01} - 1}{n_{01} r_1} \right) + y_1^3 \cdot \left[ \frac{n_{01} - 1}{2r_1^2 n_{01}} - \frac{s_1}{2r_1^3 n_{01}^3} \cdot \left( (n_{01} - 1) + (n_{01} - 1)^2 + (n_{01} - 1)^3 \right) \right] \quad (76)$$

$s_1 = f_1$  és  $p_1 = n_1/f_1$  helyettesítéssel (azaz ha a képsík paraxiális fókuszban van):

$$y_2 = -y_1^3 \frac{p_1^2}{2 \cdot n_{01}^2 \cdot (n_{01} - 1)^2}, \quad (77)$$

ahol  $p_1$  a paraxiális törőerő (a lineáris tag a képletből kiesett). Ebből  $SA3_1$  megkapható:

$$SA3_1 \equiv y_2 \cdot 2NA_1 \Big|_{y_1=p_1/2} = -\left( \frac{D_1}{2} \right)^4 \frac{p_1^3}{n_{01}^2 \cdot (n_{01} - 1)^2}, \quad (78)$$

ahol kihasználtuk, hogy

$$NA_1 \approx n_1 \cdot D_1 / 2 / f_1 = p_1 \cdot D_1 / 2, \quad (79)$$

ahol  $D_1$  a felületen a fénynyaláb átmérője. Azaz pozitív lencse(felület) – negatív nyíláshiba, negatív lencse(felület) – pozitív nyíláshiba.

A fenti levezetéshez hasonlóan az összes Seidel-együttható értéke (harmadrendű közelítésben) meghatározható a paraxiális ferde fősugár és a paraxiális apertúra sugár adott felületen vett hely és iránykoordinátáiból, és a lencserendszer szerkezeti paramétereiből (görbületi sugarak, törésmutatók stb.). Ezt szemlélteti a bemutatott képlet is, melyben a szerkezeti paramétereken kívül csak a valós apertúrasugár  $y$ -koordinátája szerepel ( $D_1$  alakjában), amely viszont a számításokban jól közelíthető a paraxiális apertúrasugár  $y$ -koordinátájával. Az együtthatókat kifejező képletek (egyik) általános formája a – bonyolultságuk miatt itt ismertetésre nem kerülő – Coddington-Taylor egyenletek.

## Az aberrációkat befolyásoló tényezők összefoglalása

A Coddington-Taylor egyenletek tanulmányozása alapján általánosságban azt a tapasztalatot szűrhetjük le, hogy az aberrációs együtthatók a következő lencserendszer-paramétereiktől függenek (természetesen mindegyik másként):

- lencsék alakjától
- lencsék számától
- törésmutatóktól
- tárgy és képtávolságtól
- tárgy és képmagasságtól
- apertúra rekesz helyétől
- apertúra rekesz méretétől

A nyíláshiba fent levezetett együtthatójának analitikus képletét alapul véve a főbb összefüggések jellegzetességeit foglaljuk össze az alábbiakban.

### Apertúrarekesz átmérő függés

Adott felületen a nyíláshiba együtthatója a fénynyaláb átmérőjének a negyedik hatványával nő. Minden felületen a rendszer apertúrarekeszének átmérője határozza meg a fénynyaláb méretét. Tehát a tervezési feladat által megengedett legkisebb apertúra rekesz átmérőt használjuk, hogy a legélesebb képet kapjuk. Az apertúra rekesz méretét akkor nem csökkenthetjük, ha adott méretűnél kisebb diffrakciós foltot kell elérni, vagy a lencsével nagy fénytéljesítményt kell begyűjteni. Az apertúra rekesz növelése a többi aberrációt is növeli.

### Lencseszám függés

A nyíláshiba tehát köbösen nő a felület törőerejével. Egy adott „p” eredő törőerejű rendszert „k” db. lencsefelületből összeállítva az egyes felületek  $p_i$  törőereje kb. „k” első hatványával fordítottan arányos, mivel közelítőleg a felületek törőerejének összege adja az eredő törőerőt:

$$p_i \approx p/k. \quad (80)$$

Egy felület nyíláshibája viszont a törőerővel köbösen csökken, azaz

$$SA3_i \sim p_i^3 = p^3/k^3, \quad (81)$$

vagyis az eredő nyíláshiba

$$SA3 = \sum SA3_i = k \cdot SA3_i \sim k/k^3 = 1/k^2\text{-el} \quad (82)$$

csökken a lencsefelületek darabszámának növelésével. Következésképpen, adott eredő fókusz-távolságú lencserendszert minél több, a lehető legkisebb törőerejű (azaz lehető legnagyobb fókusz-távolságú) lencséből állítsunk össze, hogy csökkentjük a nyíláshibát. Ez a módszer a többi aberrációra is hasonló, azaz csökkentő hatással van.

### Törésmutató függés

Adott törőerő mellett, a nyíláshiba negyedik hatvány szerint csökken a törésmutató növelésével. Mindig használjuk a tervezési feladat által még megengedett legnagyobb törés-mutatójú üvegeket (költségvonzat). A törésmutató növelése a többi aberrációt is csökkenti. Példák: Schott BK7 üveg,  $n_d = 1,517$ , ár = 18-25 €/kg, rel. ár =  $1,0\times$ ; Schott LASFN31 üveg,  $n_d = 1,880$ , relatív ár =  $63\times$  (kb. 1300 €/kg); Ohara S-LAH79,  $n_d = 2,003$ , ár = 1600 €/kg, relatív ár  $80\times$  (2008-as adat).

## Lencsealak függés

Ha a nyíláshiba-együttható képletét a fentebb vázolt módon meghatározzuk egy adott eredő törőerejű, két felületből álló lencsére is, azt fogjuk tapasztalni, hogy a nyíláshiba függ a lencse alakjától. Ez a megállapítás igaz szinte az összes aberrációra. Ha a lencse egyik felületének görbületi sugarát szabadon változtatjuk, a másik felület görbületi sugara adódik az eredő törőerő képletéből (ld. 2. óra). Egy adott törőerejű (effektív fókusz távolságú) lencsét tehát végtelen számú lencsealakkal valósíthatunk meg. Mindegyik lencsealakhhoz más aberrációk tartoznak, tehát a lencse alakjának változtatásával ( $p = \text{const.}$  mellett) bizonyos aberrációk jelentősen csökkenthetők. Egy lencse esetén például mindig van olyan alak, hogy:

nyíláshiba – min.

kóma – 0

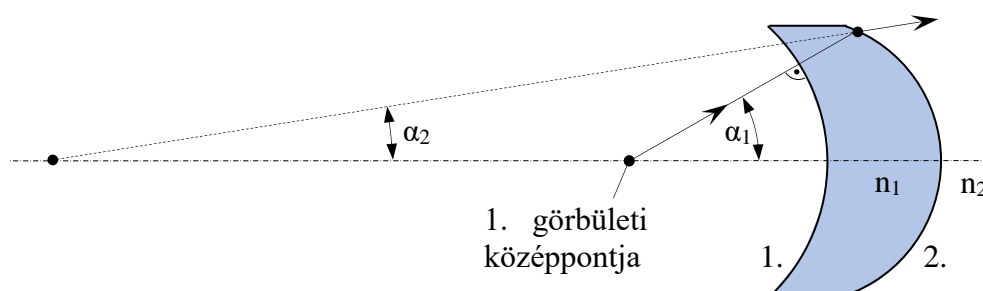
Ezt az eljárást nevezik a lencse „hajlításának”. Lencse optimális alakjának meghatározásához használható ökölszabály: a lencse egyik felületének kb. olyan alakúnak kell lennie, mint a másik felületénél a hullámfront alakja. (Más megfogalmazásban: mindkét felületen kb. ugyanakkora legyen a fénysugár eltérülési szöge, ui. a Snellius-Descartes törvény ekkor közelíthető legjobban a paraxiális alakjával.) Többtagú rendszereknél a nyíláshiba is nullára korrigálható. A nulla nyíláshibával, és a nulla kómával rendelkező leképező rendszereket aplanatikusnak v. aplanatikusnak nevezik. Az aplanatikus rendszerek az optikai tengelyen és annak elsőrendben kis környezetében lévő tárgypontokat szigmatikusán képezik le (ld. tipikusan mikroszkóp objektívek).

## Aplanatikus felületek

Az aplanatikus felületek az általuk leképezett tárgyról nyíláshiba- és kómamentes képet alkotnak. Két fontos aplanatikus felület típust különböztetünk meg (az ábrán 1.-el és 2.-vel jelölve). A 2. felületnél az apertúrasugárra teljesül az Abbe-féle szinuszfeltétel, ami miatt:

$$\sin(\alpha_1)/\sin(\alpha_2) = n_1/n_2 \quad (\text{W. J. Smith, Modern Optical Engineering}), \quad (83)$$

az 1. felületen pedig ugyanez a sugár fénytörés nélkül halad át. Mindkét felület nyíláshiba és kóma járuléka nulla, a 2. felületnek emellett az asztigmatizmus járuléka is zérus. Az 52. ábra szerinti lencse (az 1. és 2. felületek együttes alkalmazása) az ún. aplanatikus meniszkusz, amelyet elsősorban nagy NA-jú, kis tárgyterű rendszereknél alkalmaznak előtétként (pl. mikroszkópjelző, lézerdioda kollimátor stb.).



52. ábra. Az aplanatikus meniszkusz.

## Képzőhajlás - fókusz távolság függés

Petzvál József már 1843-ban kimutatta a lencserendszerek képző hajlása és a rendszert alkotó lencsék fókusz távolságai közötti összefüggést. Ha egy “k” darab vékonylencséből álló

rendszerénél  $f_j$  és  $n_j$  a  $j$ . lencse effektív fókusz távolsága és törésmutatója, akkor a Petzvál-görbület:

$$\frac{1}{r_p} = - \sum_{j=1}^k \frac{1}{f_j \cdot n_j} \quad (84)$$

feltétel a lencserendszerre:  $1/r_p := 0$  Amiből az is következik, hogy:

pozitív lencse(felület) – negatív Petzvál-képzőhajlás

negatív lencse(felület) – pozitív Petzvál-képzőhajlás

A képzőhajlás jól korrigálható a képsík közelébe helyezett lencsével (mivel a képsík közelében van, a nagyításba kevésbé szor bele, de a Petzvál-görbületet csökkenti). A lencse alakja általában a képsík felé hajló meniszkusz, az effektív fókusz távolsága viszonylag nagy.

### **Belépő pupilla a fősíkon**

Az apertúra rekesz azon kitüntetett helye az optikai rendszerben, amikor az a tárgyoldalon az első fősíkra, a képoldalon pedig a hátsó fősíkra képződik le. Ekkor a belépő pupilla és az első fősík egybeesnek (ugyanaz igaz a kilépő pupillára és a hátsó fősíkra).

torzítás – vékonylencsénél 0, rendszerénél min.

transzverzális színhiba – 0

Ez rekeszhely a transzverzális színhiba korrekciójának lencsealaktól független feltétele!

### **Természetes rekeszhely**

Az apertúra rekesz azon kitüntetett helye az optikai rendszerben, amikor:

kóma – 0

képzőhajlás – min.

### **Szimmetrikus rendszer (a rekesz is középen van)**

kóma – 0

torzítás – 0

transzverzális színhiba – 0

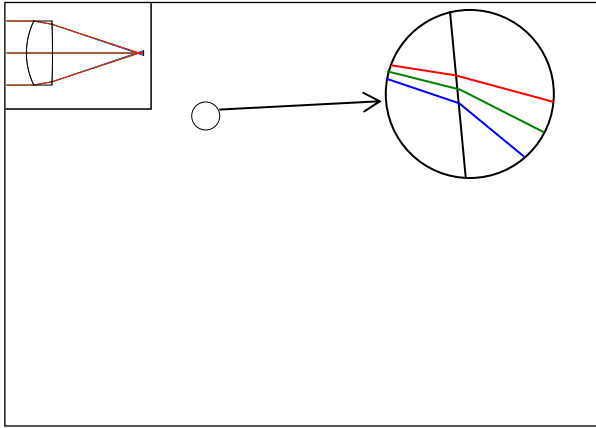
Tökéletesen csak egységnyi nagyítás mellett igaz, de általában jó kiindulás.

### **Plánparallel lemez alkalmazása**

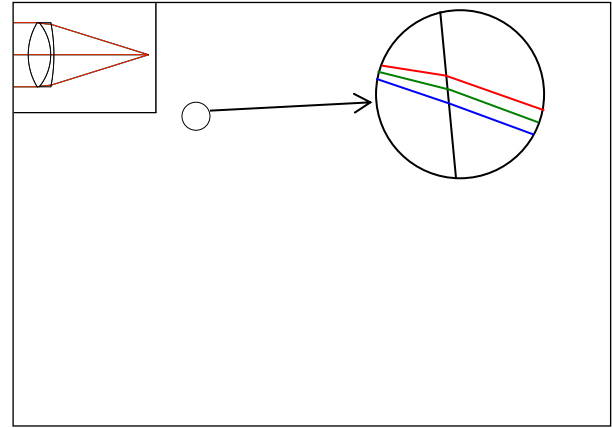
Ideális, fókuszált nyaládba helyezett plánparallel lemez a vastagságától, törésmutatójától és a numerikus apertúrától függő pozitív előjelű nyíláshibát okoz. Gyűjtőlencsék negatív előjelű kismértékű nyíláshibájának kompenzációjára alkalmazható.

### **Akromát – elsőrendű színhiba korrigálása**

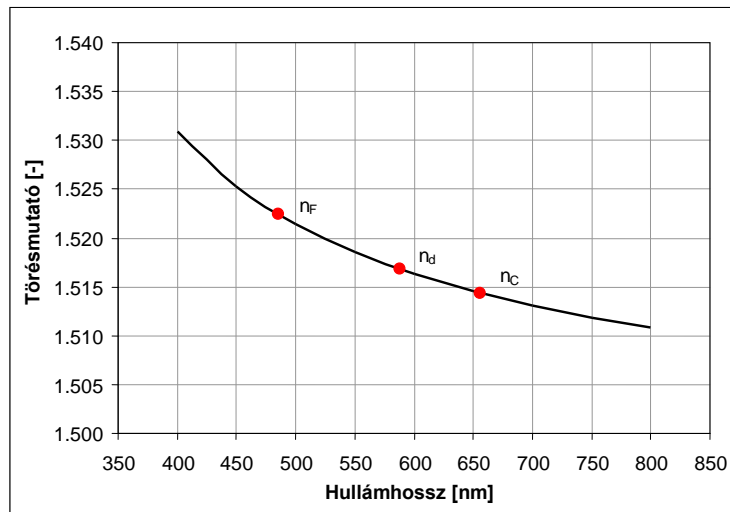
Pozitív és negatív lencsével elsőrendben színhibára korrigálható a lencserendszer (ld. 54. ábra).



**53. ábra.** Színhibára nem korrigált lencse. A lencsét elhagyó, különböző színű fénysugarak széttartóak, így nagy a képsíkon a fókuszfolt.



**54. ábra.** Színhibára korrigált lencse. A lencsét elhagyó, különböző színű sugarak kb. párhuzamosak egymással, így kicsi a fókuszfolt a képsíkon.



**55. ábra.** BK7 (Schott) üveg törésmutató-hullámhossz függése. Elsőrendben lineárisnak, másodrendben parabolikusnak tekintjük.

Elsőrendben a törésmutató hullámhosszfüggését lineárisnak tekintjük. Egy vékonylencse „p” törőereje a jellegzetes F, d, és C hullámhosszakon (ld. 2. óra):

$$p_d = (n_d - 1) \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad ; \quad p_C = (n_C - 1) \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad ; \quad p_F = (n_F - 1) \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (85)$$

ahol  $r_1$  és  $r_2$  a lencse görbületi sugarai, „n” a törésmutatója. Ebből  $p_C$  és  $p_F$  a középhullámhosszhoz tartozó  $p_d$ -vel kifejezhető:

$$p_C = p_d \cdot \frac{n_C - 1}{n_d - 1} \quad \text{és} \quad p_F = p_d \cdot \frac{n_F - 1}{n_d - 1} \quad (86)$$

Ha két lencséből álló rendszert képezünk (törőerők  $p_1$  és  $p_2$ ), az eddig tanultak szerint az eredő törőerő:

$$p = p_1 + p_2. \quad (87)$$

Longitudinális színhiba mentes (akromatikus) rendszerben  $p(\lambda) = \text{const}$ . Tehát:

$$p_{1C} + p_{2C} = p_{1F} + p_{2F} \rightarrow (p_{1F} - p_{1C}) + (p_{2F} - p_{2C}) = 0, \quad (88)$$

amibe behelyettesítve az imént kapott kifejezést:

$$p_{1d} \cdot \left( \frac{n_{1F} - 1}{n_{1d} - 1} - \frac{n_{1C} - 1}{n_{1d} - 1} \right) + p_{2d} \cdot \left( \frac{n_{2F} - 1}{n_{2d} - 1} - \frac{n_{2C} - 1}{n_{2d} - 1} \right) = 0. \quad (89)$$

Ebből átrendezéssel adódik az akromatizálás (longitudinális színhiba mentesség) feltétele:

$$p_{1d} \cdot \left( \frac{n_{1F} - n_{1C}}{n_{1d} - 1} \right) + p_{2d} \cdot \left( \frac{n_{2F} - n_{2C}}{n_{2d} - 1} \right) = 0. \quad (90)$$

Tetszőleges törőerejű lencse kromatikus aberrációját jellemezhetjük a törőerő relatív megváltozásával a hullámhossz függvényében:

$$\frac{\Delta p_{FC}}{p_d} \equiv \frac{p_F - p_C}{p_d}, \quad (91)$$

ami a törésmutatók ismeretében (86) alapján így írható:

$$\frac{\Delta p_{FC}}{p_d} = \frac{n_F - n_C}{n_d - 1}. \quad (92)$$

Ez a mennyiség csak a lencse anyagától függ, vagyis fontos jellemzője az optikai üvegeknek. A relatív törőerő változás reciproka külön nevet is kapott, ez az Abbe-szám ( $v_d$ ), amelyet minden üvegekatalógusban feltüntetnek. Az Abbe-szám definíciója tehát:

$$v_d \equiv \left[ \frac{\Delta p_{FC}}{p_d} \right]^{-1} = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}. \quad (93)$$

Ezzel a (90) kifejezés a következő jól ismert alakra egyszerűsödik:

$$p_{1d} / v_{1d} + p_{2d} / v_{2d} = 0. \quad (94)$$

Az Abbe számot minden üvegekatalógus minden üvegre tartalmazza, értéke 20-90 között van. A fenti követelményt kiegészítve a

$$p_d = p_{1d} + p_{2d} \quad (95)$$

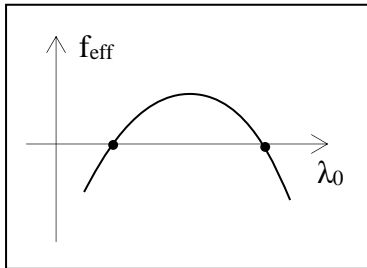
feltétellel, meghatározhatók az akromatikus duplet törőerejei.

Az is látszik, hogy pozitív törőerejű lencse longitudinális színhibáját csak negatív törőerejű lencse korrigálhatja. A Schott üvegekatalógusból pl. a BK7 (pozitív) és SF2 (negatív) olcsó, jól használható üvegek alkothatnak alkalmas üvegpárt.

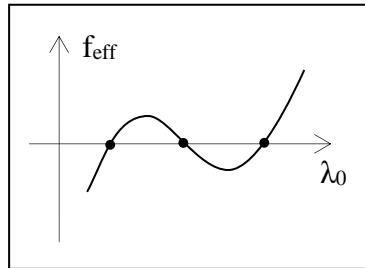
## Másodrendű színhiba

A törésmutató parabolikus hullámhosszfüggését is figyelembe véve azt kapjuk eredményként, hogy a színhiba csak diszkrét hullámhosszakon korrigálható, véges hullámhossz tartományon belül nem. Ennek következménye, hogy az optikai rendszerek effektív fókusz távolsága kismértékben mindig hullámhosszfüggő. Két különböző üvegből összeállított rendszerrel legjobb esetben két hullámhosszon lehet azonos a fókusz távolság (akromát). Az előbbieken, az Abbe-számmal meghatározott akromatizálási feltétel esetén C és F hullámhosszon lesz

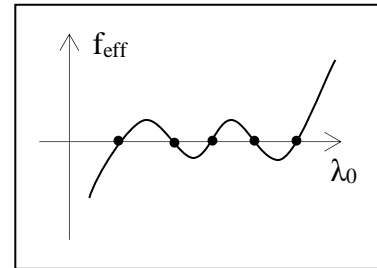
egzaktul azonos a fókusz távolság. Több üvegtípus használata esetén három hullámhosszon (apokromát), vagy akár öt hullámhosszon (szuper akromát) is elérhető azonos eredő effektív fókusz távolság:



Akromát



Apokromát



Szuper akromát

**56. ábra.** Az akromatizálási feltétel kettő, három, ill. 5 hullámhosszon is teljesíthető több üvegtípus használatával.

## JÖVŐ ÓRÁN

**Valós sugárátvezetés:** sugárkövetési egyenletek,  
szóródási felt

## Radiometria alapjai

## 6. GEOMETRIAI OPTIKA, RADIOMETRIA

### ISMÉTLÉS

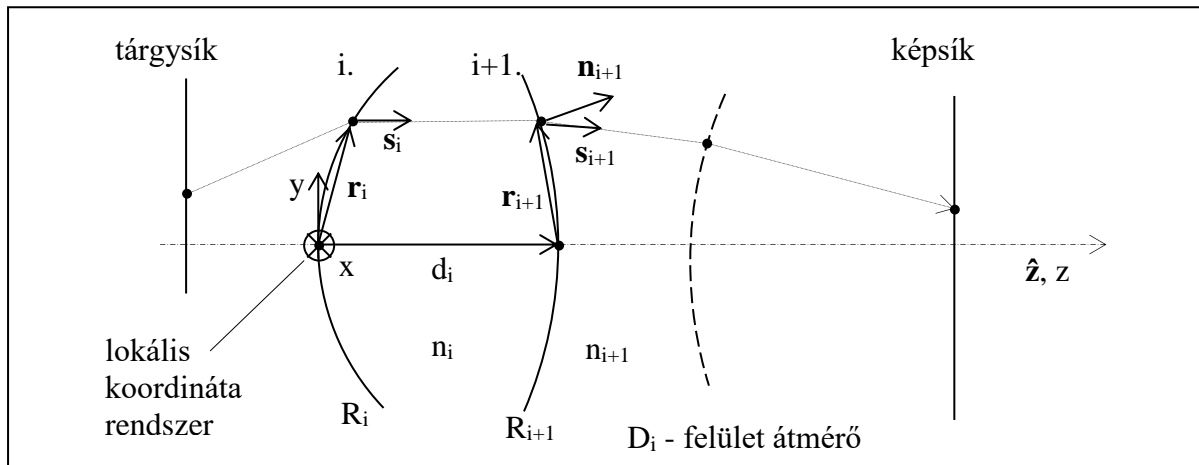
<b>Seidel-együtthetők:</b>	felületenként számolhatóak, összegezhetőek, alkalmazhatók leképezés analízisre
<b>Levezetett következtetések:</b>	lencse darabszám növelés, törésmutató növelés, nyalábátmérő csökkentés
<b>Ismertetett következtetések:</b>	rekeszhely, szimmetria, képmező hajlást korrigáló meniszkusz

### Longitudinális színhiba korrekciója

#### 6.1. VALÓS SUGÁRÁTVÉZETÉS

A valós sugárátvezetés a geometriai optika legpontosabb modellje.

#### A valós sugárátvezetés egyenletei



**57. ábra.** Magyarázó ábra a sugárkövetési algoritmus  $i$ . lépéséhez.

„ $s$ ” a sugár irányába mutató egységvektor (sugárvektor), „ $n$ ” felületnormális egységvektor. Az „ $r$ ” helyvektor, amelyet minden felület homlokpontjában (vertex, az optikai tengellyel vett metszéspont) felvett lokális koordináta rendszerében értelmezzük. „ $\hat{z}$ ” a  $z$ -tengely irányába mutató egységvektor. A lokális koordináta rendszerek közötti kapcsolatot adja a  $d \cdot \hat{z}$  vektor.

A sugárkövetés lépésekből álló algoritmus. Egy adott sugár követését egy kijelölt tárgypontról kezdjük, adott irányba. A kezdő irányt a belépő pupilla felületének egy pontja megcélzásával jelöljük ki. Az alábbiakban az  $i$ . lépés leírása következik.

1. Kiindulás:  $r_i, s_i, d_i, n_i, n_{i+1}, R_{i+1}$  adottak, keressük:  $r_{i+1}, s_{i+1}$ .

2. Az  $i+1$  felülettel vett dőfpont  $r_{i+1}$  koordinátáinak meghatározása:

$$\text{Egyenes egyenlete: } ((r_{i+1} + \hat{z} \cdot d_i) - r_i) \times s_i = 0 \quad (96)$$

$$\text{Gömb egyenlete: } |r_{i+1} - \hat{z} \cdot R_{i+1}|^2 = R_{i+1}^2 \Rightarrow r_{i+1} \cdot \hat{z} = \frac{|r_{i+1}|^2}{2R_{i+1}}, \quad (97)$$



ahol a skaláris szorzatot kifejtettük és az egyenletet átrendeztük. A gömbfelületnél keletkező két dőféspont közül  $R_{i+1} > 0$  esetén a sugár irányából nézve a közelebbiket,  $R_{i+1} < 0$  esetén a távolabbikat kell választani. A kifejezés sík törőfelület esetén is használható. Akkor ha  $|R_{i+1}| \gg D_{i+1}$  biztosan igaz, hogy  $|R_{i+1}| \gg |r_{i+1}|$ , tehát az  $R_{i+1} \rightarrow \infty$  helyettesítést alkalmazhatjuk, vagyis az egyenlet jobb oldala zérus lesz.

3. Az  $\mathbf{n}_{i+1}$  felületnormális meghatározása (a vektor irányítottsága itt érdektelen):

$$\mathbf{n}_{i+1} = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \hat{\mathbf{z}} \cdot R_{i+1}}{|\mathbf{r}_{i+1} - \hat{\mathbf{z}} \cdot R_{i+1}|} = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \hat{\mathbf{z}} \cdot R_{i+1}}{R_{i+1}} = \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{R_{i+1}} - \hat{\mathbf{z}} \quad (98)$$

Ez a kifejezés is használható sík törőfelület esetén, ld. a 2. pontnál írottakat.

4. A megtört sugár  $\mathbf{s}_{i+1}$  irányának meghatározása:

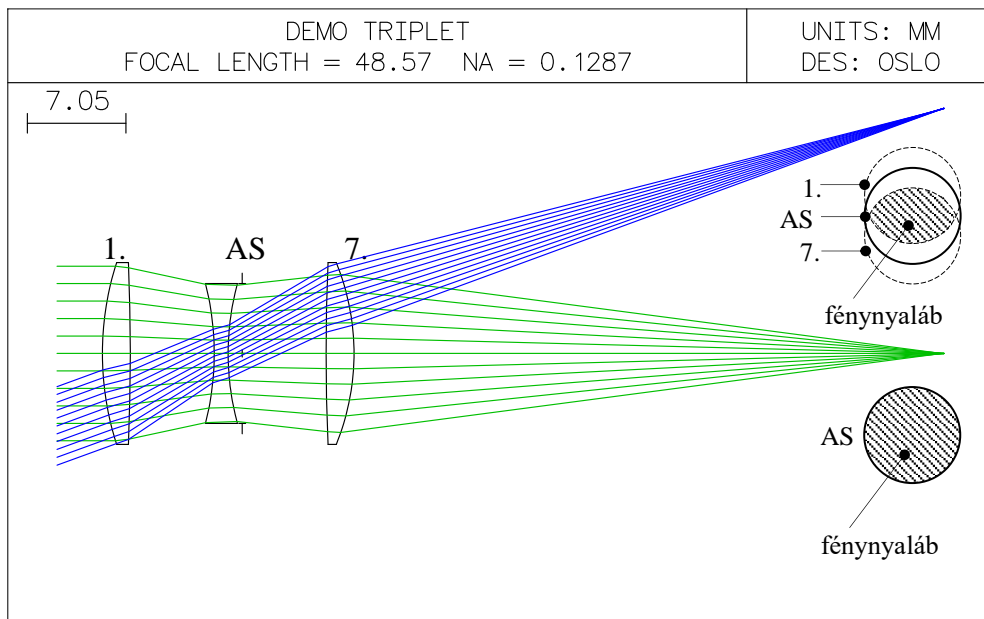
$$\text{Snellius-Descartes törvény: } (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{s}_i) \times \mathbf{n}_{i+1} = (\mathbf{n}_{i+1} \cdot \mathbf{s}_{i+1}) \times \mathbf{n}_{i+1} \quad (99)$$

5. Érkezés:  $\mathbf{r}_{i+1}$ ,  $\mathbf{s}_{i+1}$  meghatározva.

Az algoritmust felületről felületre haladva addig kell ismételni, amíg el nem érjük a képsíkot. A fenti általános algoritmusnak speciális esetét használják meridionális sugarak átvezetésére.

Korszerű számítógépes programok 100-200 millió db sugár/felület/sec sebességgel számolnak (8 CPU, 2,3 GHz, sorrendi sugárátvezetés, 2009-es adat). Videokártya – újdonság!!!: Nvidia Geforce RTX 2060, 5 GigaRay/sec, USD349, 2019.

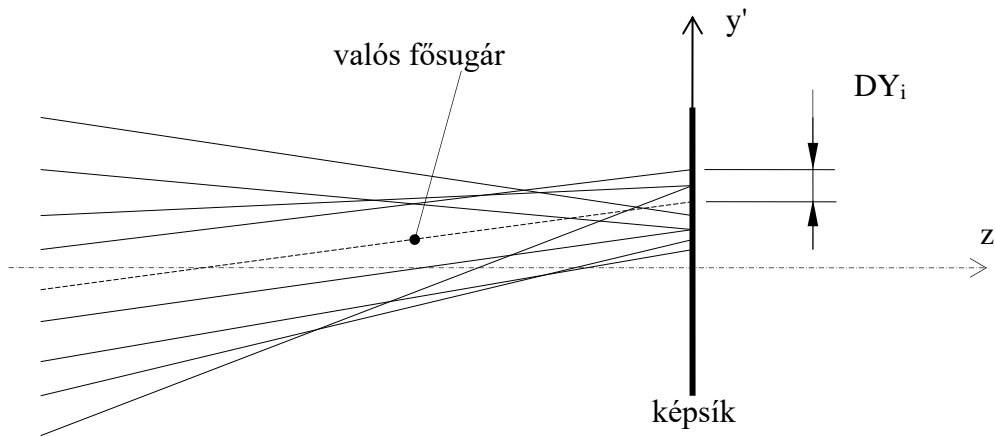
## Vinyettálás



58. ábra. A vinyettálás szemléltetése.

A nem tengelyen lévő tárgypontról kiinduló fénynyalábokat nemcsak az apertúrarekesz korlátozhatja, hanem más lencsék apertúrái, foglalat alkatrészek (szabad átmérők) is. Ekkor vinyettálásról beszélünk. A vinyettálás növeli a diffrakciós folt méretét (hiszen egyik irányba az NA lecsökken), valamint csökkenti a rendszeren átjutó fény mennyiségét is, a képtér széle felé csökkenő besugárzást eredményezve. Cserébe viszont a kirekesztelt sugarak aberrációi nem terhelik a képminőséget, emiatt gyakran szándékosan is szokták alkalmazni a kóma aberráció csökkentésére.

## Szóródási folt mérőszáma



**59. ábra.** Egyetlen tárgypontból indított valós sugarak metszik a képsíkot.

A szóródási folt egy „h” tárgymagasságú tárgypontból indított valós sugarak képsíkkal vett dőféspontjainak (sugárkoordinátáinak) halmaza. A sugárkoordinátákat ( $DX_i$ ,  $DY_i$ ) a fősugár koordinátáihoz képest mérjük. Így a szóródási folt súlypontjának (centroid) koordinátái „n” db. sugár esetén:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i DX_i \quad ; \quad \langle y \rangle = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i DY_i \quad ; \quad W = \sum_{i=1}^n w_i \quad , \quad (100)$$

ahol  $w_i$  minden sugárhoz egyedileg rendelt súlyozó tényező (ld. később). Ezzel lehet modellezni, ha az apertúra rekesz nem egyenletesen (hanem pl. Gauss-nyalábbal) van kivilágítva. A súlypont koordinátája a valós képmagasságot (a képfolt helyét) adja meg.

A leképezés minőségét a szóródási folt méretével ( $\sigma_r$ ) jellemzik (szórás-jellegű mennyiség):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i (DX_i - \langle x \rangle)^2 \quad ; \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i (DY_i - \langle y \rangle)^2 \quad . \quad (101)$$

Ebből az x és y irány átlagos szórása, azaz a szóródási folt sugara (RMS spot size):

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (102)$$

ld. független sztochasztikus változók eredő szórásának számítása.

A szóródási folt súlypontja köré húzott  $\sigma_r$  sugarú kör tartalmazza az adott tárgypontból az apertúra rekeszen áthaladó összenergia kb. 80%-át (az érték némileg aberráció függő). Egy ideális, aberrációmentes diffrakciós folt középpontja köré húzott Airy-sugarú kör ( $R_{\text{Airy}}$ ) a diffrakciós folt összenergiájának kb. 84%-át tartalmazza, tehát a szóbanforgó lencserendszer NA-jával számított  $R_{\text{Airy}}$  jól összehasonlítható  $\sigma_r$ -el. Ha a szóródási folt sugara már annyira kicsi, hogy  $\sigma_r \ll R_{\text{Airy}}$  (azaz a szóródási folt sugara jóval kisebb mint az ideális diffrakciós folt mérete), akkor a rendszert diffrakciókorlátnak tekintik. Innentől a geometriai közelítés nem szolgáltat információt a leképezés minőségéről, mivel a foltméretet elsősorban a diffrakció (azaz az NA) határozza meg (azaz a képminőséget csak a diffrakció „korlátozza”). Amennyiben csupán az teljesül, hogy  $\sigma_r \approx R_{\text{Airy}}$ , a rendszert közel diffrakciókorlátnak nevezik – ezeknél a geometriai aberrációk még befolyásolják a leképezést. A következő fejezetben ilyen rendszerek minősítésére szolgáló mennyiséggel ismerkedünk meg.

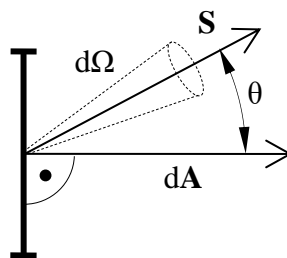
## 6.2. RADIOMETRIA

### Radiometriai alapfogalmak áttekintése

A radiometria a térben inkoherens (diffúz) sugárzások mérésére, modellezésére kidolgozott tudományterület a fizikában. Fiziológiai párja a fotometria, ahol a mért fénymennyiségeket a szem átlagos spektrális érzékenységi görbéjével (V-görbe) korigálják, hogy az emberi érzettel arányos mérőszámokat kapjanak. Mi az alábbiakban a radiometriai alapfogalmakat, számításokat tekintjük át. A radiometriát általában két részre szokták bontani, annak megfelelően, hogy a vizsgált felület kisugározza-e a teljesítményt (emisszió), avagy befogadja-e azt (abszorpció, detektálás). Lényegét tekintve a kettő ugyanaz, tehát mi azzal foglalkozunk, hogy mennyi az adott felületen *áthaladó* teljesítmény értéke, függetlenül annak irányítottságától.

Az elektrodinamika elsősorban térben koherens (hullámfrontokkal rendelkező) és monokromatikus sugárzásokkal foglalkozik. A valóságban viszont sokkal gyakrabban találkozunk diffúz, polikromatikus fényel. Ez utóbbi egyszerűen kezelhető modell szinten: a polikromatikus (időben inkoherens) fény spektrális hullámhosszokra bontva számolható, majd az eredmények intenzitásban (inkoherens módon) hullámhossz-szerinti integrálással összegezhetők. Annak érdekében, hogy ezt megtehesük, az adott sugárzás spektrális jellemzésére bevezetjük az egységnyi hullámhossz tartományba eső teljesítményt, azaz a spektrális teljesítménysűrűséget (PSD – power spectral density).

A térben inkoherens fény tárgyalása hasonlóan történik, de először az eddig ismert fogalmainkat kell megfelelően módosítani, kiegészíteni. Térben koherens esetben a tér minden pontján egyetlen hullámfront halad át, melyhez egy Poynting-vektor ( $\mathbf{S}$ ) tartozik. „ $\mathbf{S}$ ” abszolút értékének időátlagát nevezik az elektrodinamikában intenzitásnak:  $\langle S \rangle$ , azaz teljesítménysűrűségnek. Ha egy ponton több hullámfront halad át (értelemszerűen különböző Poynting-vektorokkal), akkor itt is be kell vezetni egy újabb sűrűség-jellegű mennyiséget, csak itt nem hullámhossz, hanem irány szerint kell a felbontást elvégezni. Ez az új mennyiség a „*sugársűrűség*” (angolul *radiance*), amely az egységnyi térszögbe eső Poynting-vektor mennyiséget jelöli. Egészen pontosan itt az előbb definiált intenzitás sűrűségéről van szó, de szándékosan kerüljük az intenzitás kifejezésének használatát, mivel a radiometriában intenzitás alatt egészen mást értenek (erről a későbbiekben lesz szó).



**60. ábra.** Sugársűrűség: egységnyi térszögbe eső Poynting-vektor mennyiség.

A radiometria alap-mértékegysége a sugársűrűség (N), angolul *radiance*, ami skalár mennyiség:

$$N \equiv \frac{d\langle S \rangle}{d\Omega}, \quad (103)$$

ahol  $\Omega$  a térszöget jelöli. Elektrodinamikából a tér egy pontján áthaladó egyetlen Poynting-vektor esetére megtanultuk, hogy

$$dP = \langle S \rangle \cdot \cos \theta \cdot dA \rightarrow \frac{d^2 P}{d\Omega} = \frac{d\langle S \rangle}{d\Omega} \cdot \cos \theta \cdot dA, \quad (104)$$

amiből N kifejezhető a teljesítmény kétszeres deriváltjaként:

$$N = \frac{1}{\cos \theta} \frac{d^2 P}{dA d\Omega} . \quad [N] = \text{W/m}^2/\text{strad} \quad (\text{fotometriai mértékegység: } [\text{cd/m}^2]) \quad (105)$$

Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy felületeleмен mennyi teljesítmény halad át, akkor háromféleképpen tehetjük föl a kérdést. A leggyakrabban előforduló esetben azt kérdezzük, hogy dA felületeleмен merőleges irányban mennyi fény halad át, ha az összes, az adott sugárzásban jelenlévő, különböző irányú Poynting-vektort figyelembe vesszük:

$$dP = dA \cdot \int N \cdot \cos \theta \cdot d\Omega \equiv dA \cdot H \quad [H] = \text{W/m}^2 \quad (\text{fotometriai mértékegység: } [\text{lux}]) \quad (106)$$

A „H”-val jelölt térszög-szerinti integrált *besugárzásnak* nevezzük (angolul *irradiance*). Ez az a mennyiség amit pl. a CCD (CMOS) képérzékelők pixelei mérnek. „H” értéke csak helyfüggő, mértékegysége [W/m<sup>2</sup>] Amikor a ZEMAX egy adott felületen kirajzolja a fényeloszlást, ott is „irradiance”-t látunk. A következő teljesítmény-meghatározás szerint arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi a teljes felületen, dΩ térszögben áthaladó teljesítmény:

$$dP = d\Omega \cdot \cos \theta \cdot \int N \cdot dA \equiv d\Omega \cdot J , [J] = \text{W/strad} \quad (\text{fotometriai mértékegység: } [\text{cd}]) \quad (107)$$

ahol a „J” felület szerinti integrált *radiometriai intenzitásnak* vagy *sugárerősségnek* nevezzük (angolul *radiant intensity*). „J” értéke csak az iránytól függ, emiatt a fényforrások iránykarakteristikájának jellemzésére szokták használni, mértékegysége [W/strad]. Figyelem, ez a fogalom különbözik az elektrodinamikai intenzitás fogalmától! Ez nem más, mint az a fényeloszlás, amit tetszőleges fényforrás távolterében mérhetünk pl. fotodetektorral. Mindezek alapján a teljes felületen áthaladó összes teljesítmény:

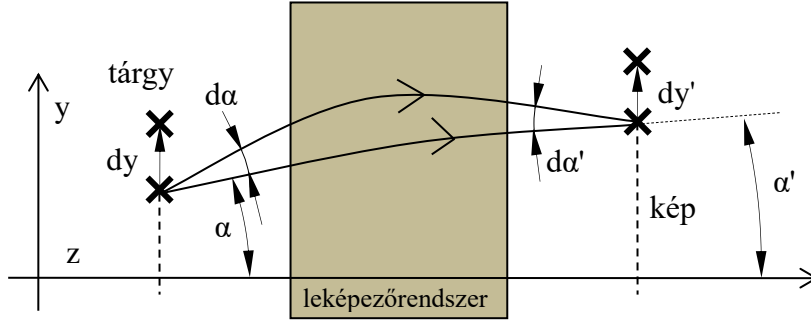
$$P = \iint N \cdot \cos \theta \cdot dA \cdot d\Omega . \quad [P] = \text{W} \quad (\text{fotometriai mértékegység: } [\text{lumen}]) \quad (108)$$

Összefoglalva: sugársűrűségnek (N) azt a teljesítményt nevezzük, ami adott irányra (θ) vetített felületegységen, egységnyi térszögben áthalad. „N” tehát hely és irányfüggő skalár mennyiség, mértékegysége [W/m<sup>2</sup>/strad].

A sugársűrűségre vonatkozik egy nevezetes tétel, amely közvetlenül az energiamegmaradástörvényéből vezethető le. Ez azt mondja ki, hogy *tetszőleges optikai rendszerben az „N” értéke nem növelhető a fényforrás sugársűrűsége fölé*. Abszorpciós és reflexiós veszteségek nélküli ideális leképezőrendszerek esetében a tárgyról kialakított minden képsíkban a sugársűrűség *ugyanakkora* lesz mint a tárgysík megfelelő pontjában. Ez azt jelenti, hogy pusztán a kép nagyításával, kicsinyítésével a sugársűrűség nem befolyásolható, egy leképezőrendszer minden közbülső képsíkjában *ugyanakkora* lesz. Aplanatikus, veszteségek nélküli leképezőrendszerben, a tárgy és képsík között ez a tétel általánosságában a következő formában írható fel:

$$dy \cdot d(\sin \alpha) = dy' \cdot d(\sin \alpha') \quad \text{és} \quad dx \cdot d(\sin \beta) = dx' \cdot d(\sin \beta') , \quad (109)$$

ahol dx, dy egy fénysugár koordinátáinak megváltozása, dx', dy' a hozzátartozó koordináta megváltozása a képtérben. A kiindulási síkról elindított két, egymáshoz infinitezimálisan közeli fénysugár közötti szög x-z és y-z síkra vett vetületei a tárgytérben α és β, a hozzátartozó szögek a képtérben α' és β'. Ez az összefüggés az ideális (aplanatikus) leképezés esetére levezethető Abbe-féle szinuszfeltétellel ekvivalens [4].



**61. ábra.** A sugársűrűség a leképezőrendszer minden közbűlső képsíkjában ugyanakkora. Mennyiségek magyarázata a fenti tétel alkalmazására aplanatikus leképezőrendszerekben.

Ha figyelembe vesszük, hogy  $d\sin(\alpha)/d\alpha = \cos(\alpha)$ , akkor (109)-ből ez lesz:

$$dy \cdot d\alpha \cdot \cos \alpha = dy' \cdot d\alpha' \cdot \cos \alpha' \quad \text{és} \quad dx \cdot d\beta \cdot \cos \beta = dx' \cdot d\beta' \cdot \cos \beta' , \quad (110)$$

Az egyszerűség kedvéért legyen  $\beta = 0$ . Ha a rendszer forgásszimmetrikus, akkor  $\beta' = 0$ , azaz

$$dy \cdot d\alpha \cdot \cos \alpha = dy' \cdot d\alpha' \cdot \cos \alpha' \quad \text{és} \quad dx \cdot d\beta = dx' \cdot d\beta' . \quad (111)$$

E két egyenletet összeszorozva és  $\pi$ -vel bővítve:

$$dx \cdot dy \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot \pi \cdot \cos \alpha = dx' \cdot dy' \cdot d\alpha' \cdot d\beta' \cdot \pi \cdot \cos \alpha' . \quad (112)$$

Mivel  $dA = dx dy$  és  $d\Omega = d\alpha \cdot d\beta \cdot \pi$ :

$$dA \cdot d\Omega \cdot \cos \alpha = dA' \cdot d\Omega' \cdot \cos \alpha' . \quad (113)$$

Ideális (aplanatikus) leképezésről van szó, tehát  $dA$  és  $dA'$ , egymás konjugáltjai. Az energiamegmaradás törvényéből, illetve amiatt, hogy jelen esetben  $\beta = 0$ :

$$N \cdot \cos \alpha \cdot dA \cdot d\Omega = N' \cdot \cos \alpha' \cdot dA' \cdot d\Omega' . \quad (114)$$

Ezt (113)-al összevetve megállapíthatjuk, hogy a tárgy és képoldali sugársűrűség egyenlő:

$$N = N' . \quad (115)$$

Megjegyzendő, hogy (109)-et paraxiális közelítésben az alábbi alakra lehet redukálni:

$$y \cdot \alpha = y' \cdot \alpha' \quad \text{és} \quad x \cdot \beta = x' \cdot \beta' , \quad (116)$$

ez alapján mondhatjuk, hogy a transzverzális nagyítás és a szögnagyítás szorzata állandó.

### Monte-Carlo analízis a sugárkövetésben

Sugárkövetés esetén ismerni kell a tárgy (vagy általában fényforrás) sugársűrűségének ( $N$ ) térbeli és irány szerinti eloszlását. Az optikai tervező programok a forrás által kibocsájtott  $P$  összteljesítményt fénysugaranként  $d^2P$  elemi részekre bontják, azaz minden fénysugár annyi teljesítményt képvisel, amennyi a forrás adott pontjából az adott irányba elindított elemi teljesítmény:

$$d^2P = N \cdot \cos \theta \cdot dA \cdot d\Omega . \quad (117)$$

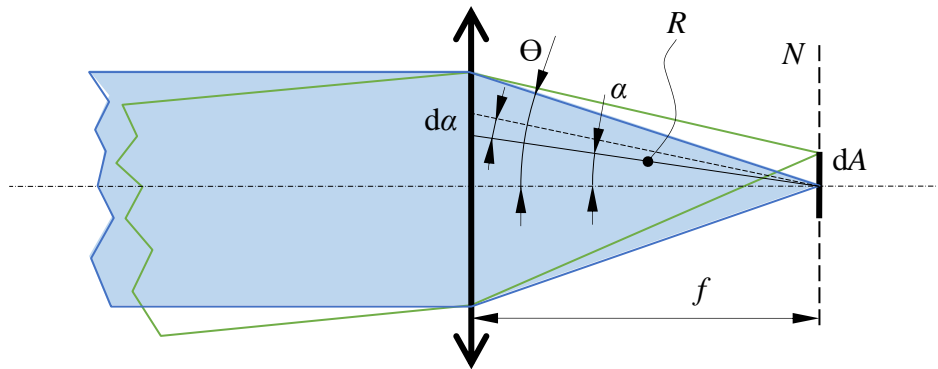
Az optikai modellben bárhol elhelyezett, akár pixelezett „detektornak” csupán összegeznie kell egy adott felületeleмен vagy elemi térszög tartományon áthaladó fénysugarak által szállított elemi teljesítményeket, hogy megkapjuk a térbeli vagy irány szerinti eloszlást.

## Lambert-sugárzó

A térben inkohereus (diffúz) fényforrások között kiemelt jelentőséggel bír az ún. Lambert-sugárzó. Ennek definíciója roppant egyszerű: olyan sík fényforrás, amelynél  $N = \text{const.}$  a felület mentén mért pozíció, és a felületnormálissal bezárt szög függvényében. Tipikusan ilyen fényforrás egy homogénean megvilágított fehér papírlap vagy falfelület. Általában úgy hozható létre, ha egy közegben (pl. festék) *térfogati* (és nem felületi) szórást alakítunk ki. Térfogati szórás esetén a felületre beeső fény kilépés előtt számos szóródást szenved, amelynek eredményeképpen a beeső fény iránykarakterisztikája teljesen kiátlagolódik, és emiatt a visszavert (visszaszórt) fény sugársűrűsége teljesen irányfüggetlen lesz. „N” felület menti homogenitását ekkor a megvilágítás homogenitása biztosítja. A fentiek mellett Lambert-sugárzó még pl. a megvilágított teflon, illetve az LED-ekben alkalmazott fénykibocsájtó p-n átmenet (azaz a LED-chip kiegészítő optikák nélkül), bármely fluoreszcens festék stb. A véges felületű Lambert-sugárzó intenzitása koszinuszos lecsengést mutat, ld. (107) egyenlet. Nem Lambert-sugárzó pl. az izzólámpa, mert ennél az intenzitás (J) konstans az irány függvényében (izotróp sugárzó).

### 6.3. FÉNYKÉPEZŐGÉP-OBJEKTÍV FÉNYEREJÉNEK MEGHATÁROZÁSA

Legyen egy  $N$  sugársűrűségű tárgysík a végtelenben, amit egy ideális lencserendszerrel leképezünk annak fókuszsíkjába.



A képsík besugárzása az optikai tengelyen ekkor:

$$H = \int_0^{\Theta} N \cdot \cos \alpha \cdot d\Omega = N \int_0^{\Theta} \cos \alpha \cdot \frac{2\pi R \cdot \sin \alpha \cdot R d\alpha}{R^2} = N 2\pi \int_0^{\Theta} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot R d\alpha \quad (118)$$

$$H = N 2\pi \left[ \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right]_0^{\Theta} = N \cdot \pi \cdot \sin^2 \Theta = H_{obj} \cdot \sin^2 \Theta \quad (119)$$

Fontos észrevenni, hogy ebben az összefüggésben nincs benne sem a fókusz távolság, sem a tárgy távolság, sem a nagyítás. Ebből az következik, hogy (119) bármilyen tárgy-képsík párra teljesül, illetve, hogy ugyanazt a tárgyat ugyanolyan fényerejű objektívvel bármilyen távolságból is fényképezhetjük, a képsík besugárzása ugyanakkora marad.

Mivel egy  $\Theta$  félkúpszögű gömbsüveg által bezárt térszög:

$$\Omega = 4\pi \cdot \sin^2 \frac{\Theta}{2} \quad (120)$$

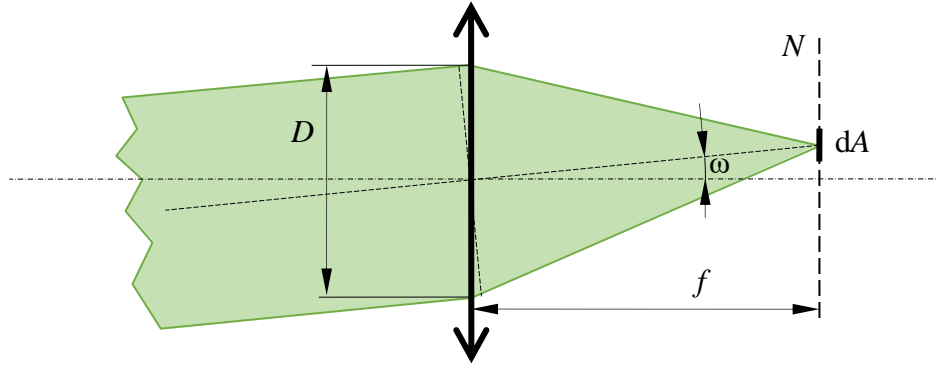
(119) paraxiális közelítésben (azaz kizárólag kis  $\Theta$ -kra) így is írható:

$$H \approx N \cdot \Omega . \quad (121)$$

Egy további kifejezőmód paraxiális közelítésben a következő:

$$H \approx \frac{N \cdot \pi}{4 f_{\#}^2} = \frac{H_{obj}}{4 f_{\#}^2} . \quad (122)$$

#### 6.4. A MEGVILÁGÍTÁS $\cos^4$ TÉTELÉNEK LEVEZETÉSE



Paraxiális közelítésben, azaz kis  $\Theta$ -kra és kis  $\omega$ -kra vizsgáljuk meg a képtér besugárzását az optikai tengelytől távolabbi képpontokra. (121)-et felhasználva, és mivel  $dA$  most nem merőleges a fénykúp tengelyére:

$$H = N \cdot \Omega \cdot \cos \omega . \quad (123)$$

Paraxiális közelítésben a vizsgált képpont által befogott térszög:

$$\Omega \approx \frac{(D/2)^2 \pi \cdot \cos \omega}{(f/\cos \omega)^2} = \frac{(D/2)^2 \pi}{f^2} \cdot \cos^3 \omega . \quad (124)$$

Ezt visszaírva (123)-ba:

$$H = N \cdot \frac{(D/2)^2 \pi}{f^2} \cdot \cos^4 \omega = \frac{N \cdot \pi}{4 f_{\#}^2} \cdot \cos^4 \omega . \quad (125)$$

JÖVŐ ÓRÁN

**Hullámfront aberráció:** OPD, Gauss-féle referencia gömb

**Diffrakciós modellekben alkalmazott közelítések**

**Gömbhullám diffrakciója**

## 7. A KÉPALKOTÁS DIFFRAKCIÓS VIZSGÁLATA

### ISMÉTLÉS

- Valós sugárátvezetés:** vektoros sugáregyenletek
- Szóródási folt:** geometriai optikai RMS foltméret
- Radiometriai alapok:** besugárzás, intenzitás, sugársűrűség, fényáram

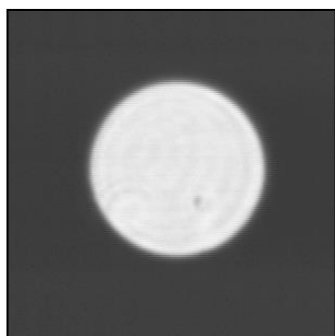
### 7.1. HULLÁMFRONT-ABERRÁCIÓ

A csekély mértékű geometriai aberrációt tartalmazó rendszerek adott tárgyponthoz tartozó képfoltját csak diffrakciós számításokkal lehet meghatározni. Ehhez az optikai tervező programok a rendszerből kilépő elektromágneses hullám terjedését modellezik a képsíkig *szabadtéri diffrakcióval*. A diffrakciós folt minősége (mérete, kontrasztossága) tehát attól függ, hogy milyen a kilépő hullámfront alakja. Az időigényes diffrakciós számítások helyett bevezették a hullámfront aberráció fogalmát, amely geometriai optikai úton határozható meg, ennek ellenére alkalmas a közel diffrakciókorlátos rendszerek leképezésének jellemzésére.

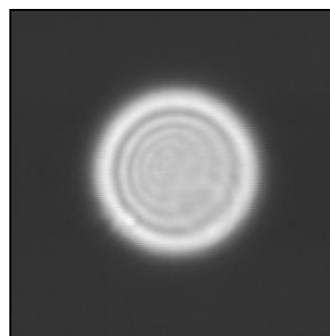
Egy optikai rendszer diffrakciós foltjában kétféle hatás érvényesül. Az egyik a fénynyalábot korlátozó apertúrák diffrakciós hatása (ez tökéletesen korrigált, azaz ideális rendszereknél is van), a másik a kilépő hullámfront diffrakciója (ez csak aberrációkkal terhelt leképezésnél jelentkezik). A tökéletesen gömb alakú kilépő hullámfront diffrakciós foltját tekintik ideálisnak (ez a diffrakciókorlátos folt). Az ideális leképezést elrontó aberrációkat az ún. hullámfront aberrációval (az ideális kilépő gömbi hullámfronttól mért eltéréssel) jellemzik.

Az apertúrarekesz az a felület az optikai rendszeren belül, amelynek az átmérője az áthaladó fényt legjobban korlátozza (megvágja). Mivel ennek képoldali konjugáltja a kilépő pupilla, e két felület közötti diffrakciós hatásoktól eltekinthetünk (az apertúra rekesz széle közelítőleg élesen, diffrakciós gyűrű mentesen képződik le a kilépő pupillára). Tehát az apertúrák diffraktáló hatását redukálni lehet egyetlen felületre, a kilépő pupillára (mintha csak ez diffraktálna, és a többi felület korlátozó hatásától eltekintenénk) – emiatt itt kell megadni a kilépő hullámfront alakját, azaz a hullámfront aberrációt.

A kilépő hullámfront alakja a térbeli terjedés közben változik, ezért a hullámfront aberráció értéke csak akkor jellemzi a rendszert, ha a kilépő pupilla síkjában számoltuk ki. Máshol lévő felületen más az aberráció mértéke, ami más diffrakciós folt romlást mutat. (Az ideális gömbi hullámfront diffrakciós foltjára – Airy-folt – nincsen hatással a kilépő pupilla pozíciója.)



62. ábra. Besugárzás eloszlás a kilépő pupillán.

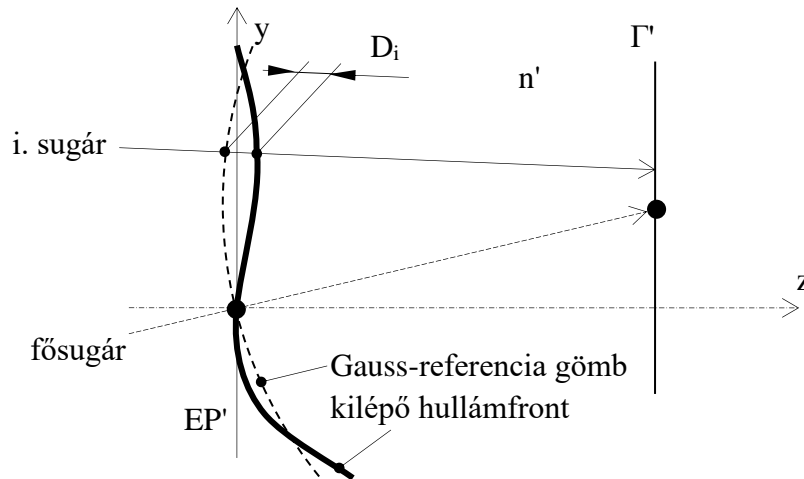


63. ábra. Besugárzás eloszlás távol a kilépő pupillától.



## Gauss-féle referenciagömb, RMS OPD

A hullámfront-aberrációt a képsíkon lévő referencia pontra centrált Gauss-féle referenciagömbre (ideális kilépő hullámfront) vonatkoztatva adjuk meg. A referencia pont lehet a valós fősugár dőfspontja, vagy az a pont a képsíkon, amelyik a hullámfront aberrációt az adott tárgyponthoz tartozó sugár mentén minimalizálja. A referencia hullámfront definíció szerint átmegy a kilépő pupilla közepén. A hullámfront-aberráció mérőszáma az OPD (Optical Path Difference), amelyet a kilépő pupillát mintavételező „n” db. sugár mindegyikére kiszámolunk. Értéke szemléletesen  $OPD_i = n' \cdot D_i$ , ahol  $n'$  a képtér törésmutatója. Az OPD-t általában hullámhossznyi ( $\lambda_0$  a vákuumban mért hullámhossz) egységekben mérik.



**64. ábra.** A Gauss-féle referenciagömb a kilépő pupillában, amihez képest a hullámfront-aberrációt megadhatjuk.

Az OPD kiszámítását az optikai tervezőprogramok a fénysugarak mentén mért optikai úthossz segítségével végzik (OPL – Optical Path Length). Először meghatározzák a tárgyponthoz tartozó sugár mentén mért optikai úthosszat  $OPL(0,0)$ -t, majd minden sugárra a Gauss-gömbig mért optikai úthosszat,  $OPL_G(x,y)$ -t. Ebből:

$$OPD(x,y) \equiv OPL(0,0) - OPL_G(x,y) . \quad (126)$$

Ideális esetben a kilépő hullámfront alakja megegyezik a Gauss-gömbbel; ilyenkor a hullámfront-aberráció nulla.

Bár az egy tárgyponthoz tartozó sugár hullámfront-aberrációjának jellemzésére alkalmazható a PV (peak-to-valley) OPD érték megadása is, leginkább az RMS OPD-t használják, mivel ez közvetlen kapcsolatban van az adott diffrakciós folt minőségével (ld. később):

$$RMS\ OPD = \sqrt{\frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i OPD_i^2} \quad ; \quad W = \sum_{i=1}^n w_i . \quad (127)$$

„Simán” változó aberrációkra (pl. defókuszes esetén) igaz, hogy:

$$PV\ OPD \approx 3,5 \cdot RMS\ OPD . \quad (128)$$

Diffrakciókorlátozottnak akkor tekintünk egy leképezőrendszert, ha minden képpontra teljesül

$$RMS\ OPD < 0,07 \lambda_0 . \quad (129)$$

Ezt nevezik Rayleigh-kritériumnak. (Az eredeti definícióban  $\frac{1}{4}\lambda_0$  PV OPD értéket engedtek meg, ennek felel meg a  $0,07\lambda_0$  RMS OPD.) Diffrakciókorlátozott rendszereknél a geometriai aberrációknak már semmilyen hatásuk nincs a képminőségre, a felbontóképességet csak a diffrakció korlátozza.

Mint azt később látni fogjuk, az RMS OPD a leképezést diffrakciós szempontból jellemzi. Hatalmas előnye mindenféle diffrakciós számítással szemben, hogy geometriai optikai úton, 100-1000 sugár átvezetésével az értéke (egy tárgypontra) nagy pontossággal és gyorsan meghatározható. Hátránya, hogy figyelmen kívül hagyja a *hullámfront alakját*, ami nagy aberrációknál már nem elhanyagolható a leképezés szempontjából. Ebből kifolyólag, ha a hullámfront aberráció túl nagy, kb.  $\text{RMS OPD} > 0,14 \lambda_0$ , akkor már nem jól jellemzi a leképezést. Nem diffrakciókorlát közeli rendszernél tehát félrevezető az RMS OPD használata, helyette időigényes diffrakciós számításokat kell végezni. Ha az RMS OPD még egy lambdányinál is nagyobb, sokkal célravezetőbb és hatékonyabb a szóródási folt, azaz a transzverzális aberrációk (pl. RMS foltméret) vizsgálata. Hogy miért, azt a következő pontban vizsgáljuk.

### Az OPD kapcsolata a transzverzális sugáraberrációval

A hullámfront-aberráció differenciális kapcsolatban van a transzverzális sugáraberrációkkal. Viszonylag könnyen belátható, hogy:

$$y' = \frac{l}{n'} \frac{\partial \text{OPD}(x, y)}{\partial y} \quad \text{és} \quad x' = \frac{l}{n'} \frac{\partial \text{OPD}(x, y)}{\partial x}, \quad (130)$$

ahol  $x, y$  a kilépő pupillán mért sugárkoordináta,  $l$  a kilépő pupilla és a képsík távolsága,  $n'$  a képtér törésmutatója, és  $x', y'$  a transzverzális sugáraberrációk (a valós fősugár képsíkkal vett dőféspontjától mért távolságok). A fenti összefüggésből látható, hogy igen kis hullámfront-aberráció jelentős sugáraberrációt eredményezhet, vagyis ha egy rendszer nem diffrakciókorlátos (azaz a szóródási folt jóval nagyobb a diffrakciós foltnál), akkor a sugáraberrációk sokkal érzékenyebben mutatják a rendszer jóságát mint az OPD.

### Fókuszmélység, mélységélesség (diffrakciókorlátos esetben)

Diffrakciókorlátos leképezésnél a fókuszmélység ( $\delta'$ ) definíció szerint az a távolság, amennyivel ha egy ideális gömbhullám középpontjától a képsíkot eltoljuk, a hullámfront aberráció nulláról  $\text{RMS OPD} = 0,07 \lambda_0$ -ra nő meg:

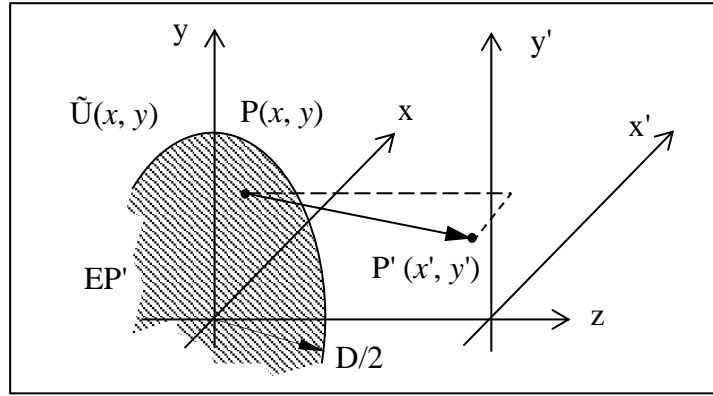
$$\delta' = \pm \frac{n \cdot \lambda_0}{2NA^2}, \quad (131)$$

ahol „ $n$ ” a közeg törésmutatója. Látható, hogy a fókuszmélység az NA négyzetével fordítottan arányos. Ha tehát NA-t csökkentjük,  $\delta'$  sokkal gyorsabban nő, mint az Airy-folt. Azaz NA megfontolt csökkentésével kis feldoldóképesség romlásért cserébe nagyobb fókuszmélység növekedést kaphatunk.

## 7.2. DIFFRAKCIÓS KÖZELÍTÉSEK

### Szabadtéri diffrakció sík felületen

Egy tárgy pont képét a legpontosabban diffrakciós módszerekkel számíthatjuk ki. A diffrakciós modellek azt feltételezik, hogy egy sík felületen ismert a komplex téreloszlás  $\tilde{U}(x, y)$ . Ettől a síktól tetszőleges  $z$  távolságban lévő ernyőn az  $\tilde{U}'(x, y)$  téreloszlást diffrakciós formulákkal kaphatjuk meg, amelyeket a matematikából ismert Green-tételből és a Maxwell-egyenletekből vezettek le. Lencsénél a képsík az ernyő, és az eddig tanultak alapján a kilépő pupilla az a sík, ahol ismert a komplex amplitúdóeloszlás  $\tilde{U}(x, y)$ . A diffrakciót leíró formulák különböző módszerekkel integrálják a kilépő pupilla  $P$  pontjaiban a komplex amplitúdót, hogy megkapjuk az ernyő egy  $P'$  pontjában a komplex amplitúdó  $\tilde{U}'(x, y)$  értékét. Az integrálást numerikusan végezzük, a kilépő pupilla megfelelő mintavételezésével.



**65. ábra.** A diffrakciós formulák a kilépő pupilla P pontjaiban integrálják a komplex amplitúdót ( $\tilde{U}(x, y)$ -t), hogy megkapjuk az ernyő egy  $P'$  pontjában a komplex amplitúdó  $\tilde{U}'(x, y)$  értékét. P – kilépő pupilla (EP') egy pontja, P' – képsík egy pontja.

### Közelítések

Vektordiffrakció: A Maxwell-egyenletek közvetlen megoldása. Hátránya, hogy kiszámítása nagyon körülményes.

Skalár közelítés: Fresnel-Kirchhoff v. Rayleigh-Sommerfeld diffrakciós integrál, amely az elektromos teret skalár mennyiségnek tekinti. Mivel az optikai tervezésben az esetek zömében skalár közelítést tételezünk fel, a téreloszlást a skalár „U” paraméterrel jelöljük (és nem **E**-vel, **B**-vel). Lencsénél akkor alkalmazható ez a közelítés, ha  $NA < 0,6$ . Hátránya, hogy numerikus kiszámítása meglehetősen időigényes a szükséges nagyszámú mintavételi pont miatt.

Huygens-Fresnel elv: A skalár közelítésből származtatható integrálformula. A diffrakciós teret modellező virtuális gömbhullámok sugárzási iránykarakterisztikájának szögfüggését elhanyagolja. Kicsit egyszerűbb képleteket eredményez mint a fenti integrálformulák, de kiszámítása hasonlóan nagy mintavételezést igényel. Lencsénél alkalmazható, ha  $NA < 0,5$ .

$$\tilde{U}'(x', y') = -\frac{i}{\lambda} \iint_{EP'} \tilde{U}(x, y) \cdot \frac{e^{ik \cdot R'}}{R'} \cdot dx dy, \quad (132)$$

ahol  $k \equiv 2\pi/\lambda$  és  $R' \equiv PP'$

Fresnel-közelítés: A skalár diffrakciós integrálokból levezethető közelítés, ha az ernyő nincs túl közel a diffraktáló felülethez:

$$\frac{\pi}{4\lambda} [(x' - x)^2 + (y' - y)^2] \ll z^3 \quad (133)$$

Értelmezhető úgy, mintha a Huygens-féle elemi gömbhullámok hullámfrontjai paraboloid felületek lennének. Lencsénél alkalmazható, ha  $NA < 0,5$  (ld. Huygens-Fresnel elv indoklása). A kevesebb szükséges (nagyságrendileg  $10^8$  db) mintavételi pont miatt jóval gyorsabban kiszámolható mint a Fresnel-Kirchhoff formula. A diffrakciós integrál alakja Fresnel-közelítésben:

$$\tilde{U}'(x', y') = \frac{-i \cdot e^{ikz}}{\lambda z} \cdot e^{i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)} \iint_{EP'} \tilde{U}(x, y) \cdot e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \cdot e^{-i\frac{k}{2z}(2x'x + 2y'y)} \cdot dx dy \quad (134)$$

Fraunhofer-közelítés: Sík felületen lévő komplex amplitúdoeloszlás távortéri diffrakciós képének kiszámítására használják ( $z \rightarrow \infty$ ). Ekkor az ernyő már olyan nagy távolságban van a kilépő pupilla méreteihez képest, hogy az ennek különböző pontjaiból indított elemi gömbhullámok közötti fáziskülönbség teljesen elhanyagolható:

$$\frac{x^2 + y^2}{\lambda} \ll z \Rightarrow \frac{k}{2z} [x^2 + y^2] \ll \pi. \quad (135)$$

Az így kapott diffrakciós formula előnye, hogy viszonylag kis,  $10^4$ - $10^5$  db mintavételi ponttal meghatározható. Emlékeztetőül, sík felület távortéri diffrakciós képe Fraunhofer-közelítésben:

$$\tilde{U}'(x', y') = \frac{-i \cdot e^{ikz} \cdot e^{\frac{i k}{2z}(x'^2 + y'^2)}}{\lambda z} \iint_{EP'} \tilde{U}(x, y) \cdot e^{-\frac{i k}{z}(x'x + y'y)} \cdot dx dy \quad (136)$$

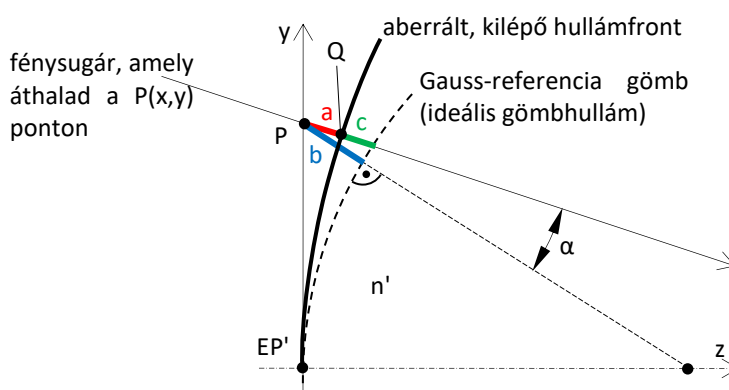
Leggyakrabban a téreloszlást az optikai tengelyhez igen közel kell csak kiszámítani ( $x'^2 + y'^2 \ll \lambda z$ ). Ekkor a Huygens-féle elemi gömbhullámok egyszerűen síkhullámokkal közelíthetőek:

$$\tilde{U}'(x', y') = \frac{-i \cdot e^{ikz}}{\lambda z} \iint_{EP'} \tilde{U}(x, y) \cdot e^{-\frac{i k}{z}(x'x + y'y)} \cdot dx dy. \quad (137)$$

## A hullámfront-aberráció jelentése, pontos definíciója

A diffrakciós számítások alapja az elektromágneses tér fázis és amplitúdoeloszlásának ismerete ( $\tilde{U}(x, y)$ ) a kilépő pupilla síkjában. Az  $U_0(x, y)$  amplitúdoeloszlást a belépő pupilla megvilágítása és a leképező rendszerek abszorpciója, valamint a felületeken fellépő Fresnel-reflexiók befolyásolják elsősorban. (A pupillaaberrációktól eltekintünk.) A kilépő pupilla egyes  $P(x, y)$  pontjaiban mérhető fázis pedig az azonos tárgypontról indított fénysugarak mentén mért optikai úthosszak (OPL) segítségével határozható meg:

$$\tilde{U}(x, y) = U_0(x, y) \cdot e^{ik_0 OPL(x, y)} \quad (138)$$



**66. ábra.** Az aberrált kilépő hullámfront és a Gauss-referencia gömb a kilépő pupilla síkjában. A kilépő pupilla fáziseloszlása a kilépő hullámfront és a Gauss-referenciagömb között a fénysugarak optikai úthosszainak segítségével határozható meg.

A diffrakciós integrál kiszámításában fontos szerepet fog kapni a hullámfront-aberráció (OPD), ezért megvizsgáljuk kicsit közelebről. Korábban bemutatott (126) képletnél pontosabb definíciója a következő:

$$OPD(x,y) \equiv (OPL(0,0) - b \cdot n') - OPL(x,y), \quad (139)$$

ami azt jelenti, hogy a kilépő pupilla síkjában lévő P pontban az ideális gömb alakú nyaláb fázisából levonjuk a valódi fókuszált és aberrációkkal terhelt tér fázisát. Fontos, hogy az OPD előjeles mennyiség, például az ábrának megfelelő aberráció esetén az értéke negatív. A hullámfront mentén, így Q pontban is, a tér fázisa végig konstans OPL(0,0), tehát

$$PQ = a = (OPL(0,0) - OPL(x,y)) / n', \quad (140)$$

ezzel a (139) képlet átírható a következő alakba:

$$OPD(x,y) = a \cdot n' - b \cdot n' = (a - b) \cdot n'. \quad (141)$$

A „b” szakasz kis aberrációk esetén a következőképpen közelíthető:

$$b \approx (a+c) \cdot \cos(\alpha). \quad (142)$$

Mivel a hullámfront-aberrációt jellemzően kevés képalkotási hiba jelenléte esetén alkalmazzuk, a fenti közelítés gyakorlatilag pontosnak tetelezhető fel. Ezzel:

$$OPD(x, y) = (a - (a + c) \cdot \cos(\alpha)) \cdot n'. \quad (143)$$

Sugárátvezetéssel a „c” szakasz a következőképpen kapható meg:

$$c = (OPL_G(x,y) - OPL(0,0)) / n', \quad (144)$$

ahol  $OPL_G(x,y)$  a fénysugár mentén a Gauss-referencia gömbig mért optikai úthossz. Ezzel:

$$OPD(x, y) = OPL(0,0) - OPL(x, y) - [OPL_G(x, y) - OPL(x, y)] \cdot \cos(\alpha). \quad (145)$$

Egészen kis aberrációkra  $\cos(\alpha) \approx 1$ , amivel visszkapjuk a (126) képletet:

$$OPD(x, y) \approx OPL(0,0) - OPL_G(x, y). \quad (146)$$

A  $\cos(\alpha)$ -val történő korrekciót futásidő takarékoságból az optikai tervező programok (így az OSLO és a ZEMAX is) általában megszórolják, de az ebből fakadó hiba elhanyagolható.

### 7.3. GÖMBHULLÁM DIFFRAKCIÓJA

Eddigi optikai tanulmányainkból következik, hogy egy lencse képsíkjában jó közelítéssel a kilépő pupillán vett, adott tárgyponthoz tartozó komplex amplitudóeloszlás Huygens-Fresnel diffrakciós képe jelenik meg. Tételezzük fel, hogy  $x, y < z$  és  $x', y' \ll z$  (ez kis képtér és  $NA < 0,5$  esetén automatikusan teljesül). A fentiek szerint ekkor az integrál jól közelíthető a Fresnel-diffrakciós formulával, ennek ellenére számításainkat a (132) Huygens-Fresnel képletből kiindulva végezzük. Ily módon ui. nem csak egy jól használható integrálformulát kapunk, hanem meghatározhatjuk a közelítés érvényességi körét is. A Huygens-Fresnel integrál exponensében szereplő  $R'$  kifejezése elsőrendű Taylor-sorfejtéssel a következőképpen közelíthető (ld. múlt órai ábra):

$$\begin{aligned} R' &= \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2) + (x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy')} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy'}{x^2 + y^2 + z^2}} \approx \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy'}{x^2 + y^2 + z^2} \right] = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \approx \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z}. \end{aligned} \quad (147)$$

Az integrál ezzel a következő alakú lesz (a nevezőben egyszerűen  $R' \approx z$ ):

$$\tilde{U}'(x', y') = -\frac{i \cdot e^{i \frac{k}{2z}(x'^2+y'^2)}}{\lambda z} \iint_{EP'} \tilde{U}(x, y) \cdot e^{ik \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot e^{-i \frac{k}{z}(xx'+yy')} \cdot dx dy \quad (148)$$

Az integrálás elé kiemelt gömbhullám tag fázisa  $x'$  és  $y'$  kis értékei miatt gyakorlatilag mindig elhanyagolható. Ha a lencse fókuszpontja a kilépő pupillától  $z = l$  távolságra lévő képsík középpontjának közelében helyezkedik el, a kilépő pupillán az  $\tilde{U}(x, y)$  komplex téreloszlás fázisa célszerűen kifejezhető a képsík középpontja felé terjedő,  $\tilde{G}(x, y)$  Gauss-féle referencia gömbhullám fázisa és a geometriai aberrációk okozta  $\varphi(x, y)$  fázishiba összegeként (konvenció szerint a fény fázisa a terjedési irányban siet, azaz  $> 0$ ):

$$\tilde{U}(x, y) = U_0(x, y) \cdot e^{i[\varphi(x, y) + (-k \cdot \sqrt{x^2+y^2+l^2})]} = \tilde{O}(x, y) \cdot \tilde{G}(x, y) \quad , \quad (149)$$

$$\tilde{O}(x, y) \equiv U_0(x, y) \cdot e^{i\varphi(x, y)} \quad ; \quad \tilde{G}(x, y) \equiv e^{-ik \cdot \sqrt{x^2+y^2+l^2}} \quad . \quad (150)$$

$\tilde{O}(x, y)$  neve „pupillafüggvény”. Az OPD pontos (139) definíciója alapján a fázishiba

$$\varphi(x, y) \equiv -\text{OPD}(x, y) \cdot 2\pi/\lambda_0 \quad . \quad (151)$$

$\tilde{U}(x, y)$  új alakját behelyettesítve a diffrakciós integrálba, a gömbhullámot leíró tényező kiesik az integranduszból, és az intenzitás eloszlásra a következő kifejezést kapjuk:

$$I'(x', y') \sim |\tilde{U}'|^2 = \frac{U_0^2}{\lambda^2 \cdot l^2} \left| \iint_{EP'} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{OPD}(x, y)} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda \cdot l} (x'x+y'y)} \cdot dx dy \right|^2 \quad , \quad (152)$$

ahol feltételeztük, hogy a kilépő pupillában az amplitúdó abszolút értéke konstans  $U_0$ . A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy (152) nem más, mint a nagy NA-jú fókuszált hullámok leírására szolgáló ún. Debye-integrál paraxiális alakja ( $\text{NA} < \text{kb. } 0,3$ ).

Vegyük észre: a fenti kifejezés formailag a megegyezik Fraunhofer-integrállal, annak ellenére, hogy „ $l$ ” értéke nem végtelen! Látható, hogy  $\tilde{O}(x, y)$  távortéri Fraunhofer-diffrakciós foltjának méretét  $l/z$ -vel átskálázva, megkapjuk a lencse képsíkjában Huygens-Fresnel-diffrakcióval meghatározott foltméretet. Tehát a *Gauss-referencia gömbre vonatkoztatott*  $\varphi(x, y)$  fázissal felírt  $\tilde{O}(x, y)$  komplex amplitúdóeloszlás képsíkon vett diffrakciós képének térbeli kiterjedése, alakja arányos  $\tilde{O}(x, y)$  távortéri, Fraunhofer-diffrakciós képével. Mint említettük a Fraunhofer-diffrakció kis pupilla-mintavételezéssel is helyes eredményeket ad, emiatt kiszámítása nem igényel sok gépidőt.

A fenti képlet felfogható egy kétdimenziós Fourier-transzformációnak is. Ezt kihasználva, a fókuszfolt diffrakciós téreloszlását igen gyakran FFT (Fast Fourier Transform) algoritmussal szokták meghatározni, amely jelentősen gyorsabb még a Fraunhofer-integrálásnál is. Mivel a képsíkon elhelyezett négyzet rácson egyszerre határozza meg a téreloszlást, akkor célszerű a használata, ha kiterjedt területen vizsgáljuk a diffrakciós foltot. Ha csak egy pontban vagyunk rá kíváncsiak, célszerűbb a Fraunhofer-integrálást választani. A két módszer pontossága hasonló, csak FFT-nél figyelni kell bizonyos mintavételi kérdésekre (ld. pl. Goodman).

Vizsgáljuk most meg a fenti integrálformula alkalmazhatóságának feltételét.  $R'$  Taylor-soros közelítésében a másodrendű tagot tekintve hibának, a következő feltétel fogalmazható meg:

$$\lambda \gg \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{1}{8} \left( \frac{x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy'}{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2 = \frac{1}{8} \frac{(x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy')^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{2} \frac{(xx' + yy')^2}{z^3} \quad (153)$$

Az utolsó átalakítási lépésben alkalmazott közelítés akkor engedhető meg, ha  $x', y' \ll D/2$ . Az egyszerűség kedvéért csak az  $y$ - $z$  síkban vizsgálódva, a hiba felső határára ( $y := D/2$ -nél) a következő kifejezés adódik:

$$y' \leq \frac{2\sqrt{2\lambda} \cdot l^{3/2}}{\sqrt{10} \cdot D} = 0,7 \cdot R_{\text{Airy}} \cdot \sqrt{\frac{l}{\lambda}}, \quad (154)$$

ahová behelyettesítettük a következő alfejezetben ismertető Airy-rádusz képletét

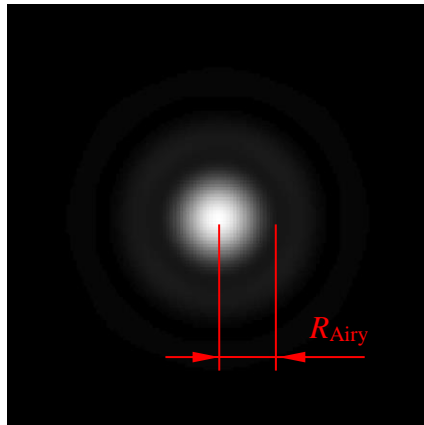
$$R_{\text{Airy}} \approx 1,22 \cdot \lambda \cdot l / D \quad (155)$$

és ( $\dots \ll \lambda$ )-t kicseréltük ( $\dots \leq \lambda/10$ )-re. Ha  $l := 10$  mm és  $\lambda := 550$  nm, igen nagy értéket kapunk:

$$y' \leq 100 \cdot R_{\text{Airy}}. \quad (156)$$

Geometriai aberrációk esetén, a fényenergia igen nagy területre szóródhat szét a fókuszfolt körül, azaz az integrált nagy  $y'$  értékekre is meg kell határozni. A fenti feltétel azt jelenti, hogy az integrálformula egészen addig használható, amíg az energia zöme (kb. 80%-a) egy  $100 \cdot R_{\text{Airy}}$  sugarú körön belül koncentrálódik a képsíkon. Nagy aberrációk esetén a maximális  $y'$  becslésére használhatjuk a geometriailag számított RMS folt sugar értékét.

A leképezőrendszerek lineáris rendszerek, mivel a gerjesztés és válasz kapcsolatára érvényes a szuperpozíció elve (térben inkoherens megvilágítás esetén ez az intenzitás-, pontosabban besugárzásviszonyokra igaz). A gerjesztés itt egyetlen, nulla méretű tárgypontra (Dirac-delta), ennek megfelelően  $I'$  a rendszer impulzusválasza, amit optikában pontszórás függvényének neveznek (PSF – Point Spread Function). A PSF-el kiterjedt tárgyak diffrakciós képe is kiszámolható, ld. később.



**67. ábra.** Az aberráció mentes leképezés esetén kialakuló diffrakciós folt.

## JÖVŐ ÓRÁN

### Diffrakciós mérőszámok

pontszórás függvény (PSF), Strehl-arány, kapcsolat az RMS OPD-vel

### Fraunhofer-diffrakció numerikus kiértékelése

### Képminőséget szimuláló közelítések összegzése

## 8. DIFFRAKCIÓS HATÁSOKAT JELLEMZŐ MÉRŐSZÁMOK

### ISMÉTLÉS

- Hullámfront aberráció:** a kilépő pupillán mért hullámfront alakhibája (OPD)
- Gauss-referencia gömb:** tökéletes gömbi hullámfront, erre vonatkoztatjuk az OPD-t
- RMS OPD:** geometriai optikailag kiszámolt mennyiség, ami a rendszert diffrakció szempontjából jellemzi
- Diffrakciós integrálok:** Huygens-Fresnel, Fresnel, Fraunhofer-közelítés
- Skalár diffrakció:** gömbhullám diffrakciója

### 8.1. DIFFRAKCIÓKORLÁT KÖZELI RENDSZEREK JELLEMZÉSE

#### Airy-folt, Strehl-arány

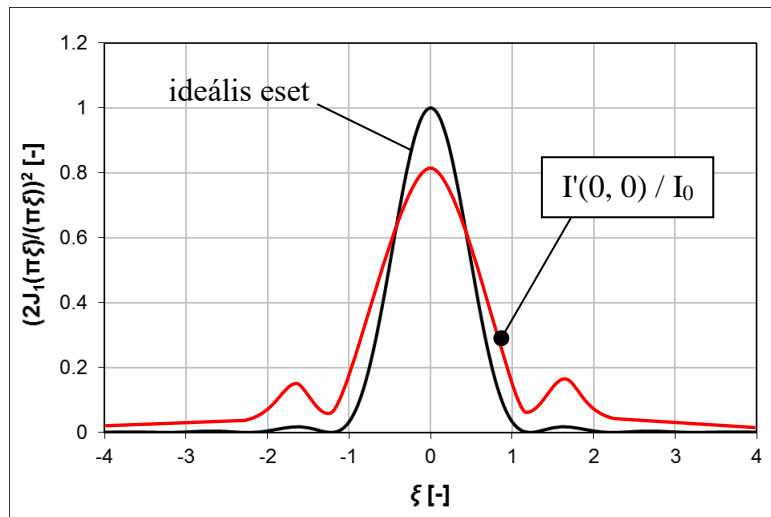
Tökéletes, aberrációmentes optikai rendszernél ( $\text{RMS OPD} = 0$ ) a fenti integrál kör alakú apertúrára analitikusan is meghatározható. A megoldás alakja Bessel-függvény, melynél az első zérushely tengelytől mért távolságát nevezik Airy-sugárnak ( $R_{\text{Airy}}$ ):

$$R_{\text{Airy}} = 0,61 \cdot \lambda_0 / \text{NA}, \quad (157)$$

ami  $\text{NA} < 0,6$  esetén jó (azaz amikor a skalár közelítés érvényes), vagy

$$R_{\text{Airy}} \approx 1,22 \cdot \lambda \cdot l / D, \quad (158)$$

ami  $\text{NA} < 0,3$  esetén jó, azaz amikor  $\sin x \approx x$ , ahol  $\text{NA}$  a diffraktáló nyíláb numerikus apertúrája. Két,  $R_{\text{Airy}}$  távolságra lévő folt az emberi szem számára még feloldható – ezt nevezik Rayleigh-felbontásnak. Végtelen távoli tárgy esetén az emberi szem két egymástól kb. 1 szögperc alatt látszó tárgypontot (pl. csillagot) tud még egymástól megkülönböztetni.



**68. ábra.** Köralakú apertúra Fraunhofer-diffrakciós képe (intenzitás eloszlása), ideális hullámfront ( $\text{RMS OPD} = 0$ ) és aberrált hullámfront esetén ( $\text{RMS OPD} > 0$ ).

$J_1(\xi)$  az elsőrendű Bessel-függvény, ahol

$$\xi \equiv \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{R_{\text{Airy}}} \cdot 1,22. \quad (159)$$



Tökéletesen aberrációmentes optikai rendszernél a Gauss-referencia gömb középpontjában az intenzitás  $I_0$  értéke analitikusan is kiszámolható, a (152) Debye-integrálba  $x' = y' = 0$ , valamint  $OPD = 0$ -t helyettesítve:

$$I_0 = \pi^2 \left( \frac{U_0 \cdot D^2}{\lambda_0 \cdot l \cdot 4} \right)^2 = \frac{P_{\text{total}}}{R_{\text{Airy}}^2} \cdot 1,17. \quad (160)$$

A fenti képletben alkalmaztuk  $R_{\text{Airy}}$  képletét és, hogy a fénynyaláb összteljesítménye:

$$P_{\text{total}} = \pi \cdot U_0^2 D^2 / 4. \quad (161)$$

Az  $I'(0,0)/I_0$  hányadost Strehl-aránynak nevezik, ami egy aberrált optikai rendszernél azt mutatja meg, hogy a diffrakciós folt maximum intenzitása  $I'(0, 0)$  hányad része az ideálisan elérhető, maximális értéknek. A Strehl-arányt elterjedten használják diffrakciókorlát közeli rendszerek minősítésére, mivel ilyen esetekben a hullámfront-aberráció kis növekedése nem annyira a diffrakciós folt méretét, mint inkább intenzitás-arányait befolyásolja (pl. az  $R_{\text{Airy}}$ -nél lévő minimumhely csak teljesen ideális leképezésnél zérus). Az RMS  $OPD < 0,07 \lambda_0$  Rayleigh-kritériumnak megfelelő Strehl-érték:

$$I' / I_0 > 0,8. \quad (162)$$

A diffrakciókorlátos leképezés ilyen formában megfogalmazott feltételét Maréchal-kritériumnak nevezik.

### A Strehl-arány és az RMS OPD kapcsolata

Kimutatható (ld. Born-Wolf), hogy kis aberrációk esetén a Strehl-arány nem függ az aberráció milyenségétől (a hullámfront alakjától), csupán az RMS értékétől:

$$\frac{I'}{I_0} \approx 1 - \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \cdot [\text{RMS OPD}]^2 \quad (163)$$

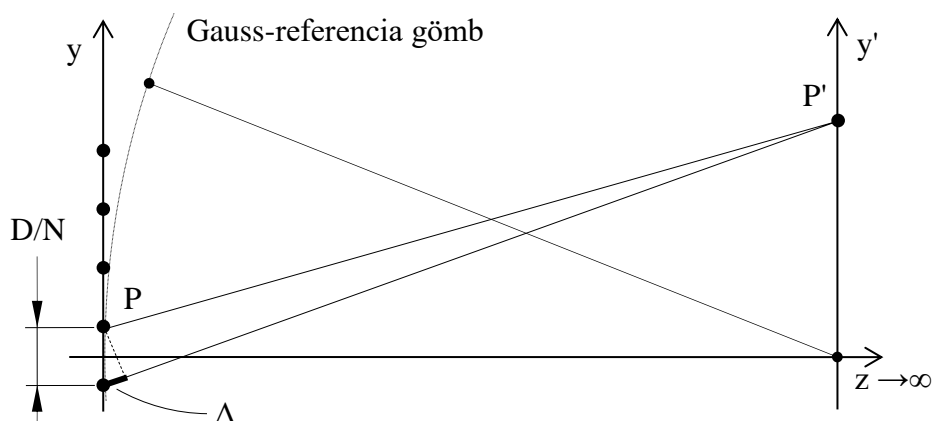
Ez az összefüggés mutat rá az RMS OPD jelentőségére: kis aberrációk esetén (amíg a rendszer a diffrakciókorlát közelében van, azaz  $\text{RMS OPD} < 0,14 \lambda_0$ ), ez a geometriai optikailag, néhány sugár átvezetésével meghatározott mennyiség igen pontosan jellemzi az optikai rendszer diffrakciós viselkedését, és nincs szükség időigényes diffrakciós számításokra!

Ha a rendszer már nincs a diffrakciókorlát közelében, azaz  $\text{RMS OPD} > 0,14 \lambda_0$ , kénytelenek vagyunk kiszámítani a diffrakciós integrált (közvetlenül, vagy FFT-vel). Túl nagy aberrációk esetén viszont mintavételezési problémák léphetnek fel. Ezt vizsgáljuk alább.

### Pupilla-mintavételezés hatása a Fraunhofer-közelítésre

Mivel a Fraunhofer-képletben szereplő integrálást numerikusan végezzük, a kilépő pupillát diszkretizálni kell. Az integrál képletében a kitevőben szereplő  $(x \cdot x' + y \cdot y')/l$  tag a kilépő pupilla  $P$  és a képsík  $P'$  pontjának távolságának megváltozását közelíti ( $P$  az integrálás során letapogatja a kilépő pupillát). Numerikus integrálásakor akkor nem követünk el nagy számítási hibát, ha két mintavételi pont között átlépve a  $P$ - $P'$  távolság jóval kevesebben változik  $\lambda$ -nál.

Vizsgáljuk meg az egyszerűség kedvéért a kilépő pupilla távolterében az  $OPD(x, y)$ -vel jellemzett hullámfront diffrakcióját (ui. a lencse képsíkjában ezzel arányos kép jelenik meg). Legyen  $N \times N$  db mintavételi pont a pupillán, továbbá a képsíkon a Gauss-referencia gömb középpontjától mért legnagyobb távolság, ahol az integrálást még ki akarjuk számolni  $y'$ .



**69. ábra.** A mintavételezési hibát okozó  $\Delta$  úthosszkülönbség kiszámítása numerikus integrálásnál.

Ekkor két szomszédos mintavételi pont között mérhető távolság:  $D/N$ . Mivel a Fraunhofer közelítés miatt igaz, hogy  $z \gg D$ , a két mintavételi pont között mért úthosszkülönbség  $\Delta$  értéke trigonometriailag (aránypárral) jó közelítéssel kiszámolható. Az egyszerűség kedvéért az optikai tengelyen vizsgálódva:

$$\Delta \approx \frac{D}{N} \cdot \frac{y'}{z}. \quad (164)$$

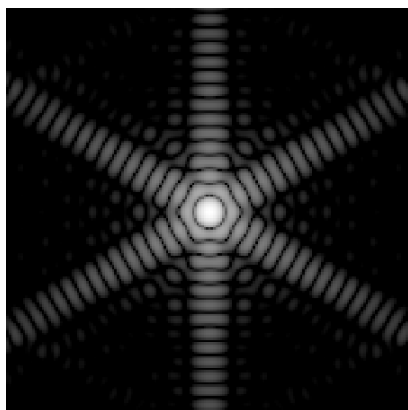
Annak érdekében, hogy a numerikus integrálásnál az integranduszban szereplő exponenciális kifejezésben a fázis ne változzon túl sokat két mintavételi pont között, a következő feltételt tesszük:  $\Delta \leq \lambda_0 / 10$ . Az egyenlőtlenségbe helyettesítve  $\Delta$  értékét, és az előbbieken bemutatott  $R_{\text{Airy}}$  kifejezését:

$$y' \leq \frac{N}{10 \cdot 1,22} \cdot R_{\text{Airy}}. \quad (165)$$

Miután a kifejezésből kiesett „z”, ez érvényes lencsék által fókuszált gömbhullámokra is. A szokásos  $64 \times 64$ -es mintavételezésnél ebből azt kapjuk, hogy:  $y' \leq 5 \cdot R_{\text{Airy}}$ . A még néhány perc alatt kiszámolható mintavétel az  $512 \times 512$ -es, ahol  $y' \leq 40 \cdot R_{\text{Airy}}$ -nek kell teljesülnie.

Felmerül a kérdés, hogy a képsík mekkora területén számítsuk ki a téreloszlást, azaz  $y'$ -t mekkorának válasszuk? Lencsék diffrakciós foltját akkora területen célszerű kiszámítani, ahol még jelentős mennyiségű energia van. Diffrakciókorlátos rendszernél az energia 84% az  $R_{\text{Airy}}$  sugarú körbe koncentrálódik ( $y' = R_{\text{Airy}}$ ), tehát a fenti egyenlőtlenség automatikusan teljesül még kis mintavételezésnél is. Nagyobb aberrációk esetén közelíthetjük az energia zömét hordozó területet a szóródási folt RMS rádiuszával. Ebből az következik, hogy a mintavételezés miatt a PSF kiszámítása transzverzális sugáraberráció függő lesz. Adott mintavételezés mellett, a legnagyobb megengedhető RMS foltméretre előírt feltételt a fenti képlet határozza meg.

A túl nagy aberráció egy esetleges alulmintavételezés miatt meghamisíthatja a PSF értéket. Feltételünk sugáraberrációra vonatkozik, ami a deriválásos kapcsolat miatt nem számítható át egyértelműen OPD-re. Hozzávetőlegesen, ha az RMS OPD néhány lambda alatt van, a PSF számítás feltehetően pontos lesz néhányszor  $100 \times 100$  sugaras pupillamintavétel esetén. Néhány lambdányi RMS OPD fölött diffrakciós integrálásról célszerű áttérni a szóródási folt transzverzális aberrációinak vizsgálatára, mert jelentősen csökken a számítási idő.



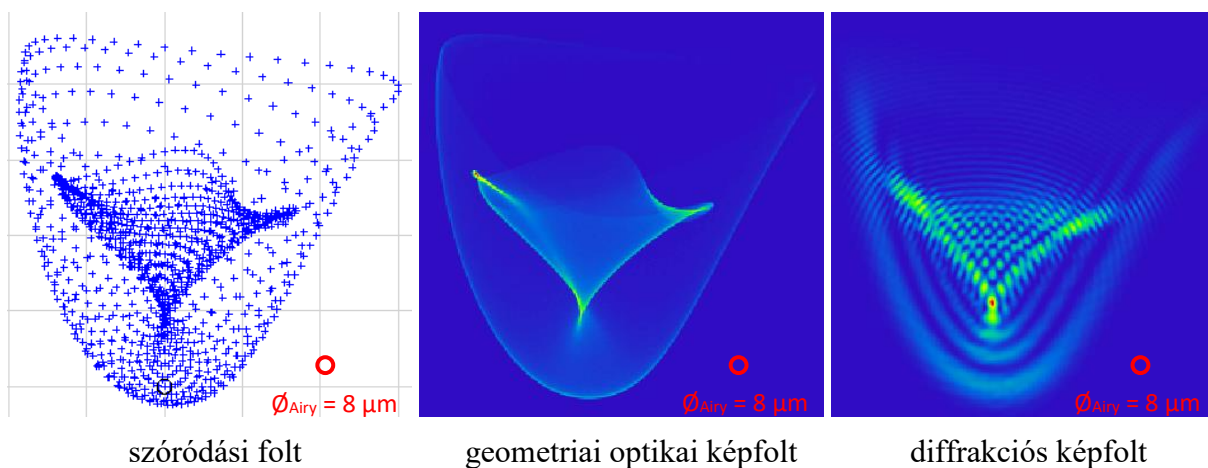
**70. ábra.** Hatszögletű rekesz diffrakciós foltja (PSF), tökéletes kilépő gömbhullám esetén.

## 8.2. LEKÉPEZÉSI HIBÁK MÉRŐSZÁMAINAK ÖSSZEFOGLALÁSA

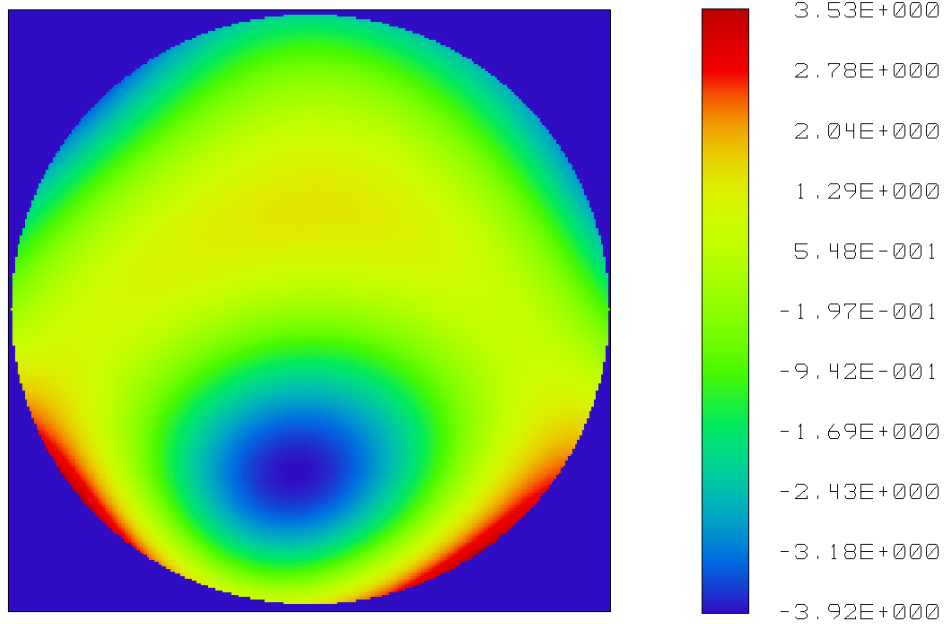
Diffrakciókorlátosnak már nem tekinthető, de még geometriai optikailag sem kezelhető (azaz sem RMS OPD-vel, sem RMS foltmérettel nem jellemezhető) rendszerek minősítésére használjuk a PSF-et (pl. Strehl-arány v. adott sugarú körön belül mennyi energiát tartalmaz a diffrakciós folt). A különböző módszerek összefoglalását ld. a 2. táblázatban.

RMS OPD [ $\lambda$ ]	RMS folt sugar [R <sub>Airy</sub> ]	Minősítési jellemző	Minősítési módszer
0 .... 0,07	0 .... 0,1	R <sub>Airy</sub>	diffrakciókorlátos rsz.
0,07 .... 0,14	0,1 .... 1,0	RMS OPD	hullámfront aberráció
0,14 .... 1,0	1,0 .... 10	Strehl-arány	diffrakciós integrál
-	10 .... 100	RMS folt sugar	geometriai optika

**2. táblázat.** Pontszerű tárgy leképezését minősítő módszerek és alkalmazásuk korlátjainak összefoglalása.



**71. ábra.** Példa egy leképezőrendszer szóródási foltjára, geometriai optikai képfoltjára és diffrakciós képfoltjára.



**72. ábra.** OPD térkép hullámhosszban mérve ( $\lambda = 555 \text{ nm}$ )

A fenti képek egy erősen aberrált leképezésre (beteg emberi szem esetében a retinán,  $\text{Ø}4,5 \text{ mm}$ -es pupilla mellett) mutatják az egyazon tárgyponthoz tartozó fókuszolt képét különböző közelítésekben, valamint a hullámfront-aberrációt hullámhossznyi egységben kifejezve.

JÖVŐ ÓRÁN

**Kiterjedt tárgyak leképezése:** konvolúció

**Képanalízis frekvenciatérben:** moduláció átviteli függvény (MTF)

## 9. KITERJEDT TÁRGYAK LEKÉPEZÉSÉNEK VIZSGÁLATA

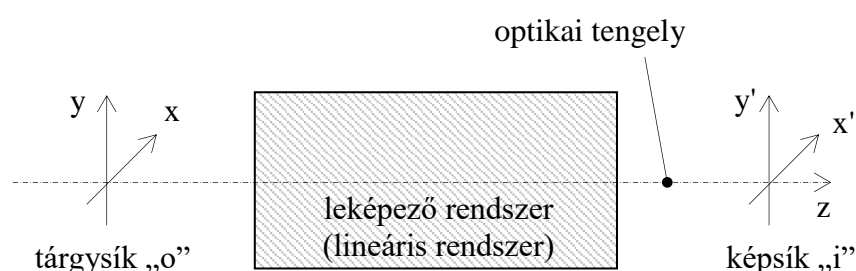
### ISMÉTLÉS

**Diffrakció lencserendszerben:** pontszórásfüggvény (PSF), Strehl-arány, fókuszmélység

**Képmínőséget jellemző mérőszámok összefoglalása**

### 9.1. KONVOLÚCIÓS TÁRGYALÁSMÓD

Amennyiben csak olyan anyagokat használunk optikai eszközeink felépítéséhez, amelyek dielektromos permittivitása konstansnak tekinthető az elektromos és mágneses térerősségek függvényében (a mágnesezhetőséget eleve elhanyagoljuk, azaz  $\mu_r = 1$ ), a leképezőrendszerek lineárisnak tekinthetők, azaz érvényes rájuk a szuperpozíció elve.



**73. ábra.** Leképező rendszer mint lineáris rendszer.

Időben koherens, skalárnak tekintett elektromágneses tér esetén:  ~~$e^{j\omega t}$~~  és  $\mathbf{E} \rightarrow U$

Tárgy komplex amplitúdó- / besugárzáseloszlás:

$$U_o(x, y) ; H_o(x, y) \quad (166)$$

Kép komplex amplitúdó- / besugárzáseloszlás:

$$U_i(x', y') ; H_i(x', y') , \quad (167)$$

ahol „o” jelenti a tárgysíkot, „i” a képsíkot, 1 és 2 pedig két különböző tárgyat ill. képet. Térben koherens esetben a szuperpozíció a komplex amplitúdóra írható fel:

$$U_o(x, y, t) = U_o(x, y, t)_1 + U_o(x, y, t)_2 \rightarrow U_i(x', y', t) = U_i(x', y', t)_1 + U_i(x', y', t)_2 \quad (168)$$

Térben inkoherens esetben (azaz diffúz megvilágításnál) a szuperpozíció a besugárzásra érvényes (a továbbiakban ezzel foglalkozunk):

$$H_o(x, y) = H_o(x, y)_1 + H_o(x, y)_2 \rightarrow H_i(x', y') = H_i(x', y')_1 + H_i(x', y')_2 \quad (169)$$

Lineáris rendszerek valamilyen bemenetre (tárgy) adott válaszát (kép) felírhatjuk az impulzusválasz függvény (PSF) segítségével.  $H_o(x, y)$  legyen a tárgy besugárzáseloszlása,  $H_i(x', y')$  a képé. Ha a rendszer pontszórásfüggvénye (optikában így nevezik az impulzusválaszt):  $PSF(x', y')$ , ami ne felejtjük besugárzáseloszlás, a kép a következő integrállal írható fel (konvolúció-tétel):

$$H_i(x', y') = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} H_{i,id}(u, v) \cdot PSF(x' - u, y' - v) dudv = H_{i,id} * PSF. \quad (170)$$

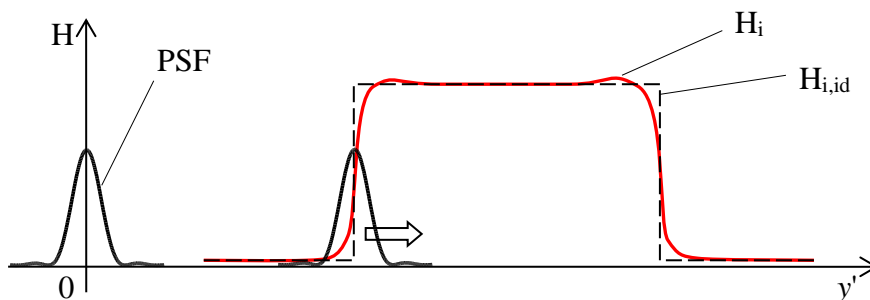
Hogy a kép teljesítményviszonyai is helyesek legyenek, a fenti képletben a PSF-et az összteljesítményére kell normálni, hogy a területi integrálja egységnyi legyen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{PSF}(x, y) dx dy = 1. \quad (171)$$

Ezt a konvolúciós módszert alkalmazzák kiterjedt tárgyak diffrakciós leképezésére. Ha a leképezőrendszer transzverzális nagyítása „m”, az ideális kép kifejezhető  $H_o$ -val is:

$$H_{i,\text{id}}(x', y') = \frac{1}{m^2} \cdot H_o\left(\frac{x'}{m}, \frac{y'}{m}\right), \quad (172)$$

ahol a torzítást elhanyagoltuk (azaz  $m = \text{const.}$  az egész képen).



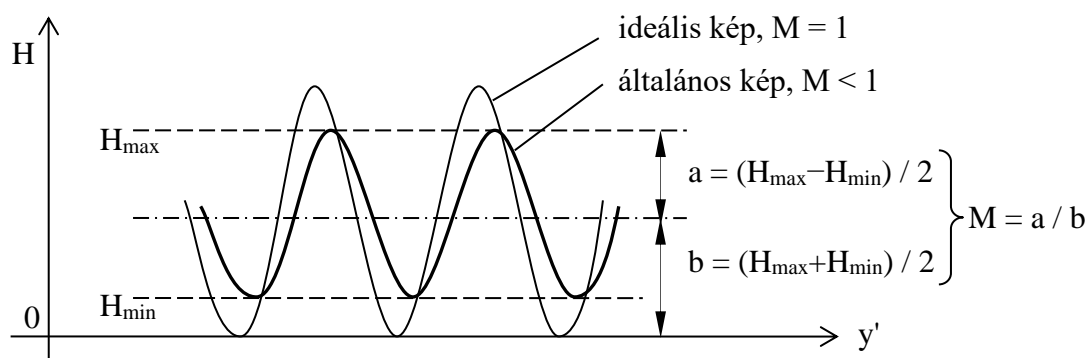
74. ábra. A konvolúció szemléltetése egy dimenzióban.

## 9.2. MODULÁCIÓ-ÁTVITELI FÜGGVÉNY (MTF)

Fourier analízisből megtanultuk, hogy a konvolúció Fourier-transzformálja a szorzás:

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_i\} = \mathcal{F}^{-1}\{H_{i,\text{id}} * \text{PSF}\} = \mathcal{F}^{-1}\{H_{i,\text{id}}\} \cdot \mathcal{F}^{-1}\{\text{PSF}\} = \mathcal{F}^{-1}\{H_{i,\text{id}}\} \cdot \text{OTF} \quad (173)$$

(Itt a konzekvens tárgyalás végett írtunk inverz Fourier-transzformációt.) A PSF (inverz) Fourier-transzformáltját optikai átviteli függvénynek (OTF – Optical Transfer Function) nevezik. Ha az ideális kép egyetlen szinuszos rács „ $f$ ” térfrekvenciával, annak Fourier-transzformáltja egy  $f$ -be eltolt Dirac-delta. Ezt megszorozva az OTF-el, megkapjuk a valóságos kép Fourier-transzformáltját, ami értelemszerűen szintén Dirac-delta, egy komplex értékkel,  $\text{OTF}(f)$ -el, megszorozva. A valódi kép tehát szintén „ $f$ ” térfrekvenciájú szinuszos rács lesz, amplitúdóban átskálázva, fázisban eltolva.



75. ábra. Ideális leképezés és ideális szinuszos tárgy esetén a kép modulációja 1, legrosszabb esetben 0.

A komplex OTF okozta fázistolást általában nem szokták figyelembe venni, csak az abszolút értékével foglalkoznak. Az OTF abszolút értékét moduláció-átviteli függvénynek, MTF-nek nevezik (Modulation Transfer Function):

$$\text{MTF} \equiv |\text{OTF}|. \quad (174)$$

Az OTF fázisviszonyait két okból nem szokták mérni. Egyrészt jelanalízisből tudjuk, hogy szimmetrikus függvény Fourier-transzformáltja valós, vagyis a fázisa minden térfrekvencián zérus. Mivel az optikai tengelyen lévő tárgyponthoz tartozó képfolt PSF-je praktikusán mindig forgásszimmetrikus, az OTF-jének fázisa gyakorlatilag konstans nulla. Az OTF zérustól eltérő fázisa az optikai tengelytől távol lévő képfoltok *aszimmetria* viszonyait jellemzi, amiből műszakilag értelmezhető információ nehezen nyerhető ki. Ez volt az egyik ok. A másik ok elég prózai: az OTF fázisát az amplitúdónál sokkal nehezebb mérni, ezért inkább nem is foglalkoznak vele.

A besugárzás modulációja (M) csak abban az esetben értelmezhető fizikailag, ha két különböző térfrekvenciájú szinuszos jel van jelen: egy 0 1/mm-es egyenkomponens és egy  $f$  térfrekvenciájú hullám, mint a 75. ábrán. Ekkor „M” definíciója:

$$M(f) \equiv \frac{A(f)}{A(0)} = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{H_{\max} + H_{\min}}, \quad (175)$$

ahol  $A(f)$  az „ $f$ ” térfrekvenciájú komponens amplitúdóját jelöli. A valódi kép modulációja (M) az ideális képével ( $M_{id}$ ) és az MTF-el kifejezve (173) alapján:

$$M(f) = \frac{A(f)}{A(0)} = \frac{A_{id}(f) \cdot MTF(f)}{A_{id}(0) \cdot MTF(0)} = \frac{A_{id}(f)}{A_{id}(0)} \cdot MTF(f) = MTF(f) \cdot M_{id}(f), \quad (176)$$

miel a (171) normálás, illetve (178) miatt  $MTF(0) \equiv 1$ . Ideális kép alatt ebben az esetben geometriai aberrációktól és diffrakciós hatásoktól mentesen leképezett, 0 és egy maximális érték között modulált ideális tárgy nagyított/kicsinyített képét értjük. Modulációja kifejezhető a tárgy modulációjával és a transzverzális nagyítással:

$$M_{id}(f) = M_{obj}(f \cdot m). \quad (177)$$

Ha az  $\mathcal{F}^{-1}\{\text{PSF}\}$  értékét felírjuk  $f = 0$  térfrekvencián, a besugárzéloszlás teljes képsíkra vett integrálját kapjuk, ami egyenlő a nyaláb összteljesítményével:

$$\begin{aligned} \text{OTF}(f_x, f_y) \Big|_{0,0} &= \mathcal{F}^{-1}\{\text{PSF}(x', y')\} \Big|_{0,0} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{PSF}(x', y') \cdot e^{i2\pi \cdot f_x \cdot x'} e^{i2\pi \cdot f_y \cdot y'} dx' dy' \Big|_{0,0} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{PSF}(x', y') \cdot dx' dy' = 1, \end{aligned} \quad (178)$$

ahol az  $f_x, f_y$  térfrekvenciák a következőképp néznek ki (általános esetben ugyanis az MTF nem forgásszimmetrikus, és nem elég egyetlen „ $f$ ”, ld. a (152) diffrakciós integrált):

$$f_x = \frac{x}{\lambda \cdot z'} \quad ; \quad f_y = \frac{y}{\lambda \cdot z'}, \quad (179)$$

ahol  $x$  és  $y$  jelöli a kilépő pupillán mért helykoordinátákat. Ezért ha a PSF-et lenormáltuk az összteljesítményre, az MTF zérus térfrekvencián definíció szerint mindig egységnyi.

Az MTF-et elterjedten használják kiterjedt tárgyat leképező rendszerek (pl. fényképezőgép objektív) minősítésére. A diffrakciókorlátos rendszerek MTF görbéje nullára esik egy bizonyos  $f_{\text{cutoff}}$  vágási frekvencia fölött (ld. 76. ábra). Inkoherens megvilágítás esetén:

$$f_{\text{cutoff}} = \frac{D'}{\lambda_0 \cdot l}, \quad (180)$$

ahol  $D'$  a kilépő pupilla átmérője,  $l$  a kilépő pupillától a képsíkig mért távolság. Emlékeztetőül: az  $f_{\#} = f/D$  értéket relatív nyílásnak nevezik ( $D$  a belépő pupilla átmérője) – ezt tüntetik fel

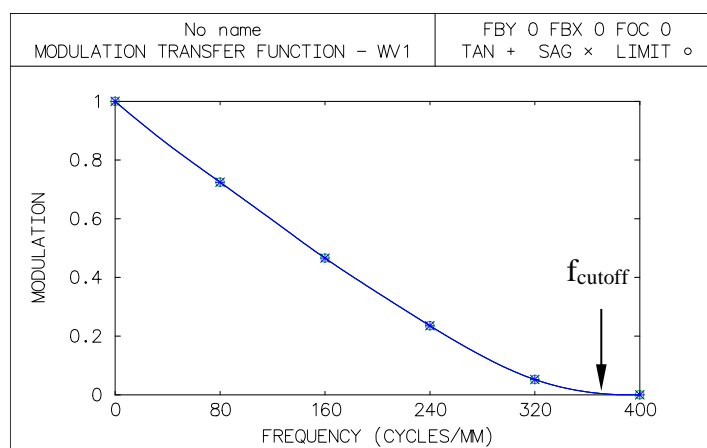
fényképezőgépek blendeállító tárcsáján. Ha a tárgytávolság végtelen, akkor  $D'/l = D/f = f\#$ . Érdekes, hogy a vágási frekvenciához tartozó  $\Lambda$  rácsterjedési miként viszonyul az Airy-foltéhoz:

$$\Lambda = \frac{1}{f_{\text{cutoff}}} = \frac{R_{\text{Airy}}}{1,22}. \quad (181)$$

A Nyquist-Shannon-féle mintavételezési tétel alapján (ld. Goodman: Introduction to Fourier Optics [2]):

$$2d_{\text{CCD}} = \Lambda \rightarrow \varnothing_{\text{Airy}} \approx 5d_{\text{CCD}} \quad (182)$$

Az MTF görbe fenti, diffrakción alapuló definíciója (a PSF Fourier-transzformáltja) akkor működik, ha a PSF kiszámítására használt közelítés, algoritmus érvényes. Mint megismertük, nagy aberrációknál ez nem feltétlenül igaz (minden attól függ, elég nagy-e a mintavételezés). Nagy aberrációk esetében a geometriai MTF-et szokták kiszámítani, ahol nem a PSF, hanem a fénysugarakkal kiszámolt szóródási folt Fourier-transzformáltját veszik. Az így kapott MTF-et geometriai MTF-nek nevezik.



**76. ábra.** Diffrakciókorlátos rendszer MTF diagramja, és a vágási frekvencia (térben inkoherens eset).

### 9.3. AZ MTF KISZÁMÍTÁSA AUTOKORRELÁCIÓVAL

A gömbhullám diffrakciójánál megjegyeztük, hogy a diffrakciós folt  $\tilde{U}_i$  komplex amplitúdó-eloszlása a képsíkon, egy konstans faktort leszámítva, nem más mint az  $\tilde{O}(x, y)$  pupillafüggvény Fourier-transzformáltja, ld. (150)-(152):

$$\tilde{U}_i \sim \mathcal{F}\{\tilde{O}\} \Rightarrow \tilde{O} \sim \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}_i\}. \quad (183)$$

Mivel a PSF a komplex amplitúdó abszolútérték négyzete:

$$\text{PSF} = |\tilde{U}_i|^2 = \tilde{U}_i \cdot \tilde{U}_i^*, \quad (184)$$

(173) alapján a következő összefüggés írható fel:

$$\text{OTF} = \mathcal{F}^{-1}\{\text{PSF}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}_i \cdot \tilde{U}_i^*\}. \quad (185)$$

A matematikából ismert Wiener-Khinchin-tétel kimondja, hogy ha egy  $f(t)$  komplex függvény  $F(\omega)$  Fourier-transzformáltjának abszolútérték-négyzetét inverz Fourier-transzformáljuk, akkor a kapott eredmény megegyezik a  $f(t)$  autokorrelációs függvényével:



$$\mathcal{F}^{-1}\left\{|F(\omega)|^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot f^*(\tau - t) d\tau. \quad (186)$$

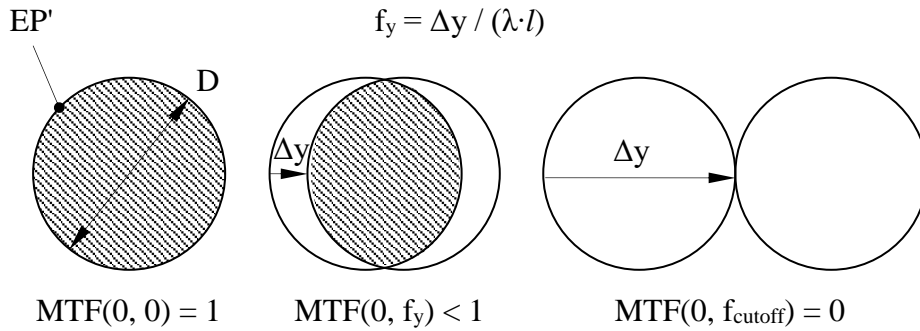
Az  $f \rightarrow \tilde{O}$ ,  $F \rightarrow \tilde{U}_i$ ,  $t \rightarrow (x, y)$ ,  $\omega \rightarrow (x', y')$  és  $\tau \rightarrow (u, v)$  megfeleltetést téve:

$$\text{OTF} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\tilde{U}_i \cdot \tilde{U}_i^*\right\} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{O}(u, v) \cdot \tilde{O}^*(u - x, v - y) dudv, \quad (187)$$

vagyis a PSF inverz Fourier-transzformáltja (maga az OTF) – (183) miatt – arányos a pupillafüggvény autokorrelációs függvényével. Ebből az is következik, hogy az MTF arányos a pupillafüggvény autokorrelációs függvényének abszolút értékével. Ha az autokorrelációs függvényt (ami teljesítményjellegű mennyiség) normáltuk a nyaláb összteljesítményére, akkor

$$\text{MTF} = |\tilde{O} \star \tilde{O}^*|. \quad (188)$$

Ideális, diffrakciókorlátos rendszernél  $\text{OPD} = 0$ , azaz az  $\tilde{O}$  pupillafüggvény konstans; legyen egyben skalár is. Ekkor az autokorrelációs függ. egyszerű területszámítással kiértékelhető, ld. a (189) képletet.



**77. ábra.** Az MTF kiszámítása a pupillafüggvény autokorrelációjával diffrakciókorlátos esetben.

Geometriai aberrációkat nem tartalmazó ideális, ún. diffrakciókorlátos rendszer MTF diagramja ( $\text{MTF}_{\text{diffr}}$ ) analitikusan is kiszámítható. Térben inkoherens megvilágítás esetén:

$$\text{MTF}_{\text{diffr}}(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \arccos(\xi) - \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \right] & ; \text{ ha } \xi \leq 1 \\ 0 & ; \text{ egyébként} \end{cases} \quad (189)$$

ahol bevezettük a  $\xi$ -t, a levágási értékkel normált térfrekvenciát:

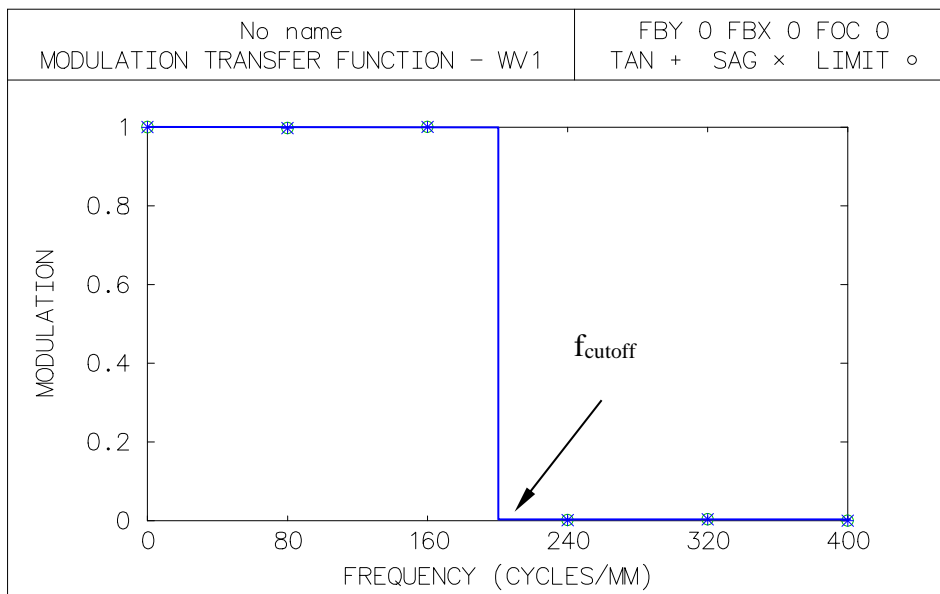
$$\xi \equiv f / f_{\text{cutoff}}. \quad (190)$$

Térben koherens megvilágításnál az impulzusválasz függvény  $\tilde{U}_i$ , amiből:

$$\text{OTF} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\tilde{U}_i\right\} = \tilde{O}, \quad (191)$$

azaz maga a pupillafüggvény. Ekkor az OTF-et nem a besugárzás, hanem a komplex amplitúdóeloszlásra kell alkalmazni. Ilyen rendszereknél a vágási frekvencia *feleakkora* mint a térben inkoherens megvilágításnál:

$$f_{\text{cutoff}} = \frac{D}{2 \cdot \lambda_0 \cdot l}. \quad (192)$$



**78. ábra.** Diffrakciókorlátos rendszer MTF diagramja, és a vágási frekvencia (térben koherens eset).

JÖVŐ ÓRÁN

**Az optikai tervezés folyamata**

**Fontosabb leképező rendszerek áttekintése**

## 10. AZ OPTIKAI TERVEZÉS FOLYAMATA

### ISMÉTLÉS

**Kiterjedt tárgyak leképezése:** konvolúció, MTF

#### 10.1. AZ OPTIKAI TERVEZÉS MENETE

##### Gyártás kontra vásárlás

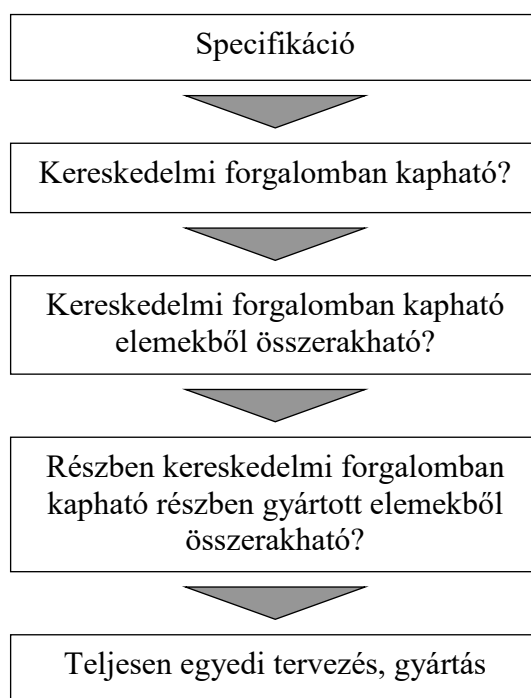
Háromtagú rendszer, öt készlet (kb. nettó árak Magyarországon, 2019)	
Optikai tervezés	1.300.000 Ft (10.000 Ft/óra, kb. 1 mérnökhó)
Lencsegyártás	400.000 Ft ( $\approx$ 14.000 Ft/db + szerszámköltség)
Lencserétegezés	400.000 Ft ( $\approx$ 200.000 Ft/db)
Foglalástervezés	400.000 Ft
Foglalásgyártás	300.000 Ft
Szerelés, bemérés	200.000 Ft
<b>Összesen</b>	<b>3.000.000 Ft</b>

**3. táblázat.** Háromtagú rendszer öt készletének gyártási ára Magyarországon (2019).

Edmund Scientific-nél megvásárolva (nettó árak):

1 db síkdomború lencse (dia. 20, efl 60mm+MgF2): €31	$\approx$ 10.000 Ft
1 db háromtagú okulár: €60	$\approx$ 19.000 Ft
1 db akromát (dia. 20, efl 60mm+MgF2): €79	$\approx$ 25.000 Ft
1 db minőségi 10 $\times$ mikr.obj (Olympus): €315	$\approx$ 100.000 Ft

##### Tervezési előkészületek



**79. ábra.** Optikai rendszer tervezésének előkészületei.

## Főbb specifikációs adatok, követelmények

- hullámhossz tartomány
- nagyítás (tartomány)
- tárgyszög
- tárgyávolság (tartomány)
- numerikus apertúra
- f-szám (relatív nyílás)
- effektív fókuszávolság
- felbontóképesség (képátló/foltméret)
- mélységélesség
- képminőség (RMS foltméret, RMS OPD, MTF adott frekvenciákon, torzítás)
- szerkezeti hossz (első lencsefelület homlokpontjától az utolsóig)
- leképezési hossz (tárgytól a képig)
- hátsó fókuszávolság
- transzmisszió, roncsolási teljesítmény küszöb
- szórt fény
- szerelhetőség
- mérhetőség
- környezeti feltételek (hőmérsékleti tartomány, nyomás, porvédelem stb.)
- a legfontosabb: az ár

## Beszerzési lehetőségek

Külföldi vásárlás	Magyarországi gyártás
<a href="http://www.edmundoptics.com">www.edmundoptics.com</a> (közepes ár)	Geodesy Kft. (foglalás, lencsék, réteg)
<a href="http://www.cvilaseroptics.com">www.cvilaseroptics.com</a> (drága)	Schmidt&Bender Kft.(lencsék + foglalás)
<a href="http://www.thorlabs.com">www.thorlabs.com</a> (igen drága)	Europtik Kft. (precíziós lencsék + rétegezés)
<a href="http://www.qioptiq.com">www.qioptiq.com</a> (korábban Linos)	OptiLab Kft. (rétegezés, optika gyártás)
<a href="http://www.cdcorp.com">www.cdcorp.com</a> (olcsó, kínai)	MikroT Kft. (fotolitográfia)
<a href="http://www.optics.org">www.optics.org</a> (optika ált.)	BME Gépgyártástechnológia (UP eszterga)
<a href="http://www.pgo-online.com">www.pgo-online.com</a> (síkoptika)	DirectLine Kft. (UP eszterga + prec. mech.)
<a href="http://www.newport.com">www.newport.com</a> (precíziós optika)	Zeiss (szemüveglencse és sportoptika)
<a href="http://www.optimaxsi.com">www.optimaxsi.com</a> (lencse prototípus)	
<a href="http://www.dymax.com">www.dymax.com</a> (UV ragasztók)	

4. táblázat. Optikai elemek beszerzési lehetőségei.

## 10.2. OPTIKAI TERVEZŐ PROGRAMOK

### Mire jók a tervező programok?

- Kereskedelmi forgalomban kapható rendszerek minősítése.
- Ker. forg.-ban kapható elemekből összeállítható rendszer tervezése, minősítése.
- Egyedi tervek készítése, minősítése és a gyártási hibák hatásainak modellezése.
- Eddig nem modellezett jelenségek képminőségre gyakorolt hatásának vizsgálata.

### És mire nem jók?

- A programok a specifikációt nem találják ki maguktól
- Nem gondolkoznak helyettünk a feladat megoldásán (nincs intuíciójuk)
- A hibáinkat nem javítják ki (sőt, ritkán maguk is hibáznak)



- Alapos, pontos mérnöki ismeretek
- Nagy tervezési tapasztalat (a létező optikai rendszerek ismerete)
- Súlyos rendszer használata
- Állandó ellenőrzés (a tervezési folyamat állandó nyomon követése)

A mai tervezőprogramok gyakorlatilag bármilyen specifikációnak megfelelő leképező rendszert képesek kiszámolni. A gyakorlott és gyakorlatlan tervező eredményei közötti különbségek a gyárthatóságban és az árban mutatkoznak meg. Tervezési tapasztalat birtokában emellett gyorsabban tudunk dolgozni és egyszerűbb konstrukciókat tudunk alkotni.

### A tervező programok fajtái

Manufacturer		Optical design	Illumination analysis	Other
Synopsys	(USA)	CODE V	LIGHT TOOLS	LucidShape
Zemax Development Corp.	(USA)	ZEMAX OpticStudio	ZEMAX OpticStudio	OpticsBuilder
Lambda Research Corporation	(USA)	OSLO (OSLO EDU - free)	TRACEPRO	LENSVIEW
Breault Research Organization	(USA)	-	ASAP	APEX
Optis (Ansys megvette)	(France)	-	SPEOS	-
Wolfram Research, Inc.	(USA)	OPTICA (with MATHEMATICA)	-	-
QiOptiq	(Germany)	WinLens (free)	-	GLASS MANAGER
LTI Optics	(USA)	-	Photopia	-
Photon Engineering	(USA)	FRED	FRED	-
Lighting Analysts	(USA)	-	-	Agj32
LightTrans	(Germany)	-	-	VirtualLab
OptiCAD	(USA)	-	OptiCAD	-
ITLboulder	(USA)	-	AutoLUX	-

5. táblázat. Optikai tervező programok fajtái.

- + lézerrezonátor tervező
- + hullámvezető tervező (planár, csatorna, szál)
- + hullámoptikai tervező (pl. diffraktív optika, diffúzorok) - Lumerical

### Tervezési lépések

- Specifikáció elkészítése
- Kiindulási lencserendszer optomechanikai modelljének elkészítése
- Optikai minősítő eljárások alkalmazása
- A leképezés jellemzőinek javítása (optimalizáció)
- Gyártási hibák hatásának vizsgálata a leképezésre (tűrésszámítás)
- Ez eredmények grafikus vagy szöveges megjelenítése
- Tervdokumentációk készítése (ISO 10110 szabvány szerint)

### 10.3. ALAPFOGALMAK DEFINÍCIÓI

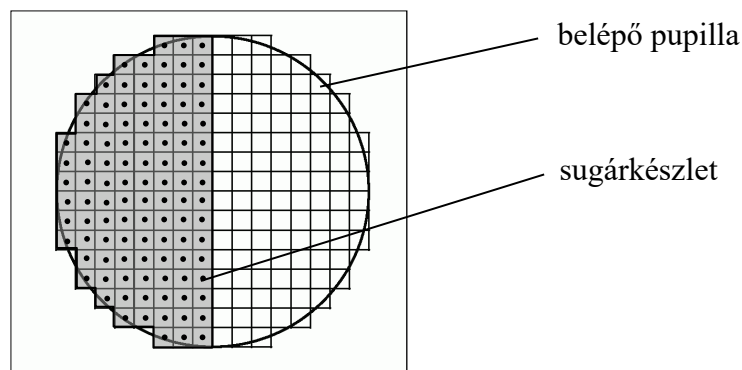
#### Sugárcélzási fajták

- Rendes sugarak: adott tárgypontról megcélizzuk a belépő pupilla egy pontját
- Iteratív sugarak: egy adott tárgypontról indított sugarat iteratíven annyiszor vezetünk át a rendszeren, amíg el nem találja a referencia felület adott pontját (ez általában az apertúrarekesz)

#### Relatív koordináták

- Tárgytér mérete:  $OBH$  (félátmérő) [mm]
- Belépő pupillán a nyaláb mérete:  $EBR$  (félátmérő) [mm]
- Tárgypont relatív koordináta:  $FBY \equiv y / OBH$  [-] (193)
- Pupilla relatív koordináta:  $FY \equiv y / EBR$  [-] (194)

#### Pupillamintavételezés



**80. ábra.** RMS foltméret, RMS OPD, PSF, MTF számításához ehhez hasonlóan osztjuk fel a belépő pupillát. Az osztások száma funkcionként változtatható, a négyzethálós elrendezés hexapolárisra (körök és küllők) vagy véletlenszerűre is állítható.

## Optimalizáció (azaz tervezés)

Az optikai rendszer leképezés minőségének iteratív javítása adott szerkezeti paraméterek (változók) automatizált javításával.

### Optimalizációs változók

Azon konstrukciós paraméterek összessége, amelyeket az optimalizáció során automatikusan kívánunk változtatni (pl. görbületi sugár, lencse vastagság stb.).

### Optimalizációs operandusok

Azon optikai jellemzők összessége (ld. specifikációk), amelyet az optimalizáció során kívánt értékre szeretnénk beállítani (pl. effektív fókusz távolság, szóródási folt méret, NA stb.).

### Hibafüggvény

Az operandusokból négyzetes összegzéssel előállított skalár értékű  $\Phi$  függvény, amely nullához tart, ha a rendszer közelít az előírt tulajdonságokhoz. Magukat az operandusokat is úgy kell kialakítani, hogy nullához tartsanak a rendszer javulásával:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^m w_i \cdot f_i^2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad ; \quad W = \sum_{i=1}^m w_i \quad , \quad (195)$$

ahol  $w_i$  a tervező által beállított súlyozó tényező, amely arra szolgál, hogy a különböző nagyságrendű operandusokat közelítőleg azonos értékre hozza, hogy egyformán javuljanak az optimalizáció során.  $f_i$  jelöli az „m” db operandust,  $x_j$  pedig az „n” db változót. Az operandusok bonyolult módon függenek a változók értékeitől, ezt fejezi ki a fenti függvénykapcsolat. A program az optimalizáció jóságát az

$$ERR = \sqrt{\Phi} \quad (196)$$

hibával jellemzi.

### Csillapított legkisebb négyzetek módszere

A legkisebb négyzetek módszerével a  $\Phi$  hibafüggvény lokális minimumát keressük úgy, hogy a változókból alkotott  $\mathbf{x}_k$  vektort kis  $\Delta \mathbf{x}_k$  értékekkel módosítva,  $\Phi$  értékét kis  $\Delta \Phi$  értékekkel csökkentjük. („k” – az iterációs index.) Alapegyenlet:

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}, \quad (197)$$

ahol  $\mathbf{A}$  a derivált mátrix (Jakobi-mátrix):

$$A_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (198)$$

Ez az egyenlet általában túlhatározott ( $m > n$ ), azaz ebben a formában nem megoldható. Csak egy olyan megoldást lehet találni, ahol  $\Delta \mathbf{x}$  minimalizálja az eltérést ( $\mathbf{r}$ ) a megoldástól:

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f} = \mathbf{r}, \quad (199)$$

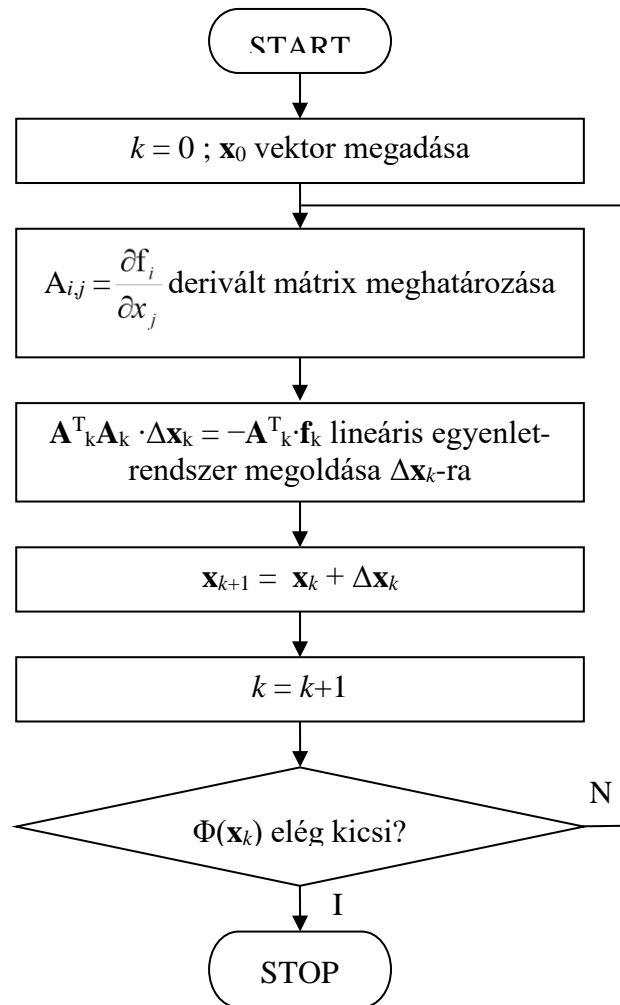
ahol

$$|\mathbf{r}|^2 = \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{r} = \min. \quad (200)$$

értéket keressük. Ebből az új alapegyenlet:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{f}. \quad (201)$$

Ezt nevezik Gauss-transzformációnak.



**81. ábra.** Az optimalizációhoz használt csillapított legkisebb négyzetek módszerének blokkdiagramja.

Azért, hogy túl nagy  $\Delta \mathbf{x}_k$  lépések ne legyenek, egy csillapító tagot adnak az egyenletekhez, ezzel meggátolják azt, hogy véletlenül át ne lépjünk egy lokális minimumot. Ez a csillapított legkisebb négyzetek módszere (Damped Least Squares – DLS). Fontos, hogy olyan változókat (szabadsági fokokat) definiáljunk, amelyekre a hibafüggvény nem invariáns!

### Globális optimalizáció

- Hammer-módszer
- Genetikai algoritmusok
- Adaptív szimulált hőkezelés (ASA)
- „Global search”

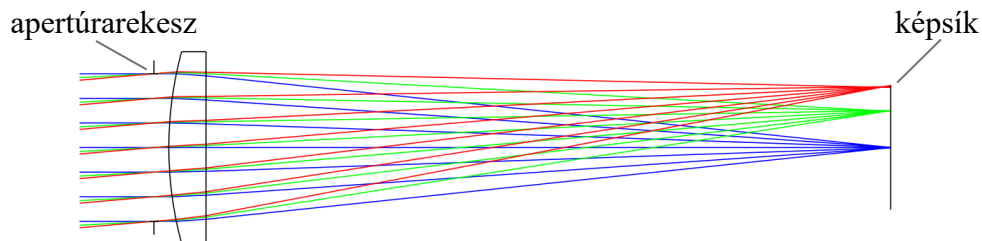
### A sűgó használata

Enélkül nem lehet megtanulni a program használatát, annyira összetett.



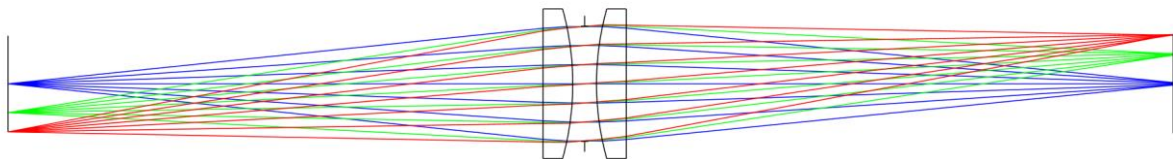
#### 10.4. A MEGFELELŐ KÉPKALKOTÓRENDSZER KIVÁLASZTÁSÁNAK SZEMPONTJAI

Amint láttuk, a leképezőrendszerek specifikációs paramétereinek igen hosszú a listája. Az ezeket megvalósító, óriási változatosságot mutató lencserendszerek közül érdemes kiemelni azokat, amelyek végtelen távoli tárgyat képeznek le a köztérbe, azaz egy képdetektorra vagy ernyőre, ld. 82. ábra. Hasonló fókusz-távolság és numerikus apertúra esetén ezek a rendszerek egymással jól összehasonlíthatóak, jellemző struktúrájuk jól példázza egy adott leképezési feladat összetettségét.



**82. ábra.** Végtelenből végesbe történő leképezés, egy síkdomború lencsével bemutatva.

Amennyiben végesből-végesbe történő leképezés (ún. képátvetítés) megvalósítása a cél, a fentebb említett végtelenre korrigált rendszerekből kettőt egymással szembe fordítva a legtöbb esetben kielégítő megoldást kapunk (ekkor a végtelen tárgy-/ képtávolságú oldalak néznek egymással szembe, ld. 83. ábra).

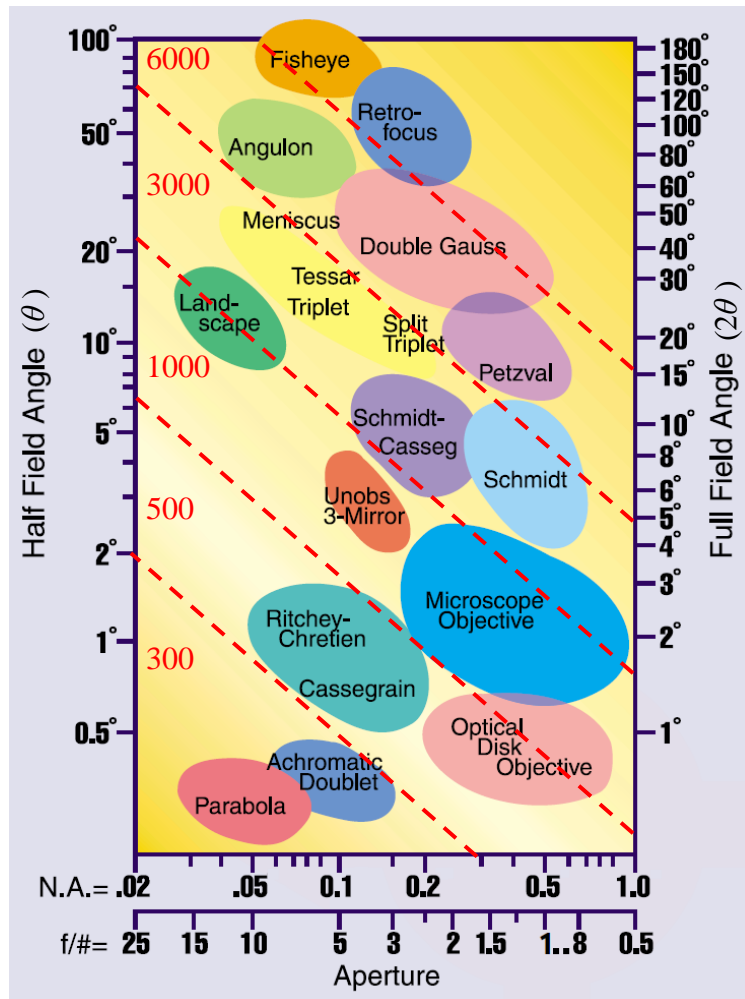


**83. ábra.** Végesből végesbe történő leképezés, két síkdomború lencsével bemutatva.

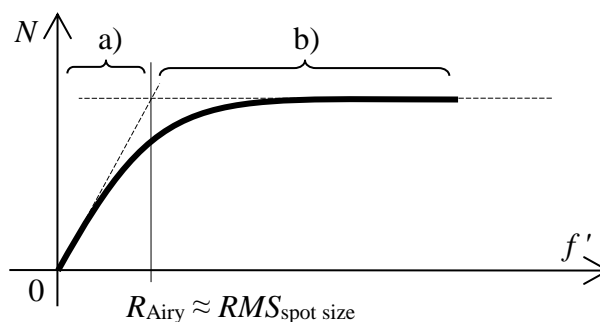
A lencserendszerek felépítésének összetettségét elsősorban az adott tárgytérben optikailag felbontható pontok száma határozza meg, azaz a képátló mentén elhelyezhető felbontott pontok száma ( $N$ ). (Pl. diffrakciókorlátos esetben a Rayleigh-féle kritérium alapján a két még felbontható pont távolsága megegyezik az Airy-rádiusszal.) A tipikus konfigurációkat a 84. ábra foglalja össze, mely jó kiindulás a kezdő optikai tervezők számára. Az érdeklődőbbeknek a [8], [9], [10] szakkönyvek valamelyikének tanulmányozását ajánljuk.

A jelfeldolgozásból ismert, korábban említett, Nyquist-Shannon-mintavételezési törvényből levezethető, hogy adott optikai rendszerhez olyan képdetektort kell választani, amelyre a képátlón elhelyezkedő pixelek száma kb. kétszerese az optikailag felbontott pontok számának. Pl. dupla-Gauss elrendezésű objektíveknél (ilyenek a mai fényképezőgép-objektívek)  $6000 \cdot 2 = 12000$  pixel szükséges a képátlón (ld. 84. ábra), ami 4:3 arányú képnél  $9600 \times 7200$  képpontot, azaz kb. 70 megapixeles képdetektort eredményez. Ez persze egy elvi érték, a valóságban a gyártási hibák, konstrukciós megkötések erősebben korlátozhatják a felbontóképességet.

Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül bemutatunk néhány alapvető leképezőrendszert. Az egyszerűség és szemléletesség kedvéért az ismertetésre kerülő eszközöket térben és időben koherens fényvel vizsgáljuk, azaz a fényforrás mindig monokromatikus pontforrás. Fontos megjegyezni, hogy ezek a rendszerek nem megfordíthatóak, viszont a tárgy és képsíkjuk felcserélhető. Azaz egy fényképezőgép-objektívet használhatunk pl. diavetítő lencsének, ha a képdetektor helyére a filmet tesszük.



**84. ábra.** Objektívtérkép végtelenből végesbe történő leképezés esetén (W.J. Smith, *Engineering an Optical system*, SPIE OE Magazine, 2002). A pirossal írt kiegészítő számok nagyjából tükrözik az azonos sávokban lévő rendszerek képátlóján elhelyezhető felbontott pontok számát ( $N$ ). A rendszer komplexitása olyan méretnél optimális ha  $R_{\text{Airy}} \approx \text{RMS}_{\text{spot size}}$ .



**85. ábra.** Leképezőrendszerek skálázhatósága: egy adott konstrukció méretarányos növelése/kicsinyítése esetén a felbontható pontok száma ( $N$ ) nem állandó. Kis fókusz távolságok ( $f'$ ) esetén, ld. a) tartomány, a diffrakciós folt nem skálázódó mérete korlátot jelent. Ekkor a rendszer  $NA$ -ja és emiatt komplexitása növelendő. b) tartományban a felbontás kb. konstans, mivel a képméret és a szóródási folt arányosak. Itt a komplexitás csökkenthető.

JÖVŐ ÓRÁN

**Alapvető képző rendszerek bemutatása:** kondenzor, szem, nagyító, akromát

## 11. ALAPVETŐ KÉPALKOTÓ RENDSZEREK BEMUTATÁSA

### ISMÉTLÉS

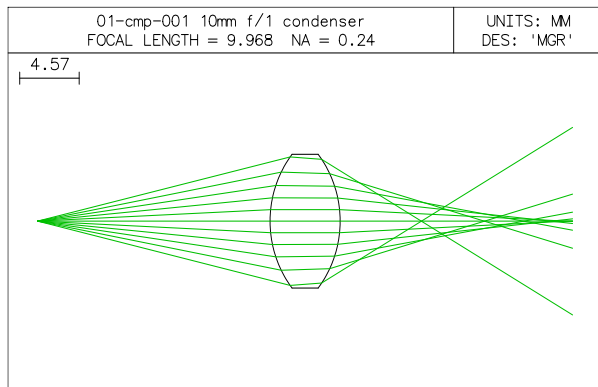
**Az optikai tervezés menete:** gyártási megfontolások, specifikáció, beszerzések

**Optikai tervező programok:** működés, főbb jellemzők

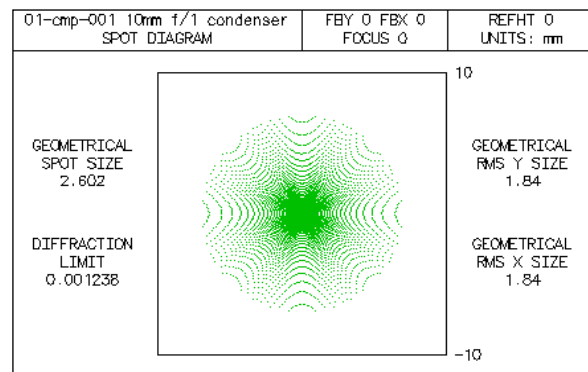
### 11.1. ELŐADÁSON BEMUTATOTT RENDSZEREK

#### Kétszerdomború kondenzor

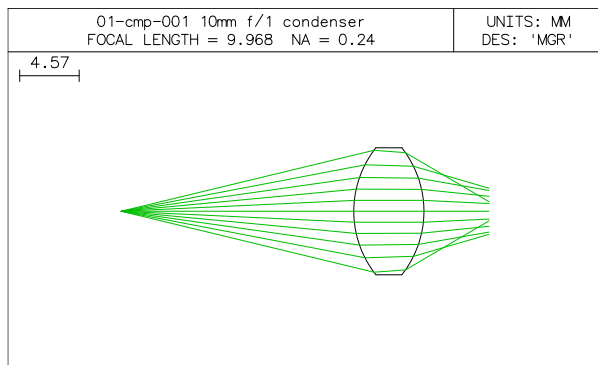
Megfigyelhető az óriási nyíláshiba. A fókusz síkba helyezett tárgyat emiatt inhomogén módon világítja ki. Mindemellett a lencse a síkdomború lencsékhez képest nehezebben gyártható. A bemutatott két kondenzor változat NA-ja és fókusz távolsága (azaz főbb paraxiális jellemzői) azonosak az összehasonlíthatóság kedvéért.



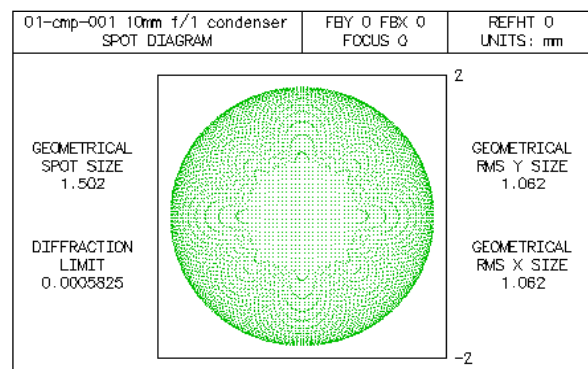
**86. ábra.** Kétszerdomború kondenzor, paraxiális képsík.



**87. ábra.** Szóródási folt paraxiális képsíkban.



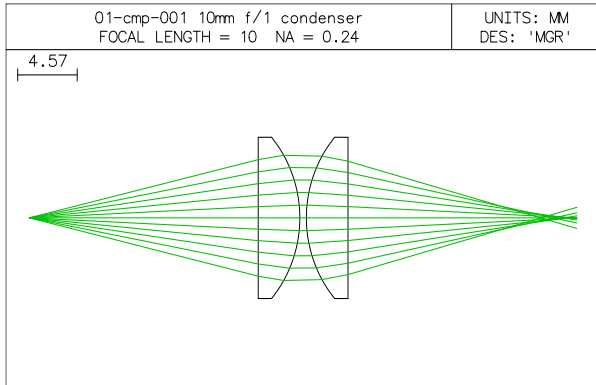
**88. ábra.** Képsík kb. a hátsó fókusz síkban.



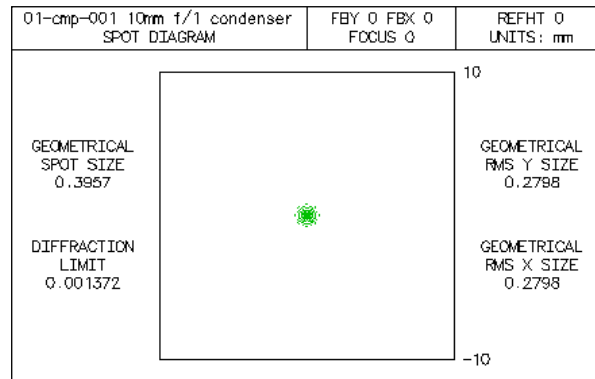
**89. ábra.** Szóródási folt kb. a hátsó fókusz síkban.

## Kondenzor két síkdomború lencséből

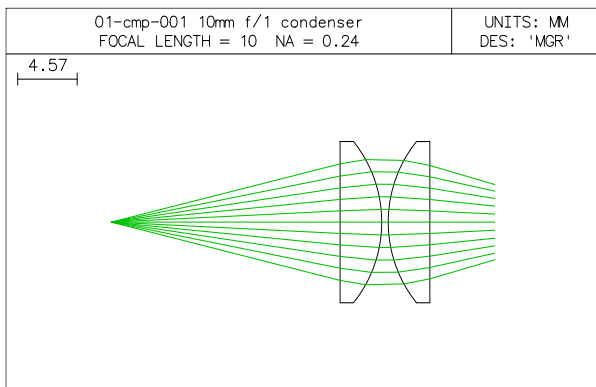
Egyszerű felépítés, könnyű gyárthatóság mellett jelentősen kisebb nyíláshiba. A tárgy megvilágítottsága sokat javult. Nyíláshibán kívül egyéb aberrációkra nem korrigált.



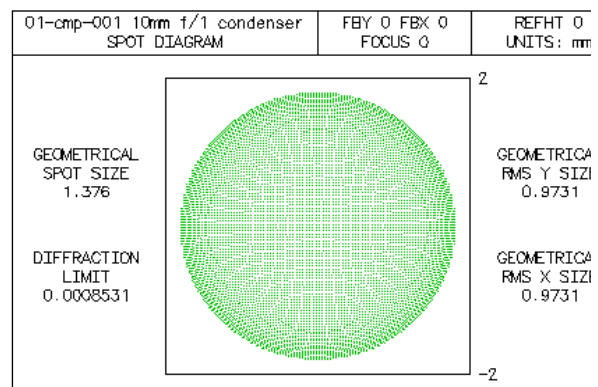
90. ábra. Képsík paraxiális képsíkban.



91. ábra. Szóródási folt paraxiális képsíkban.



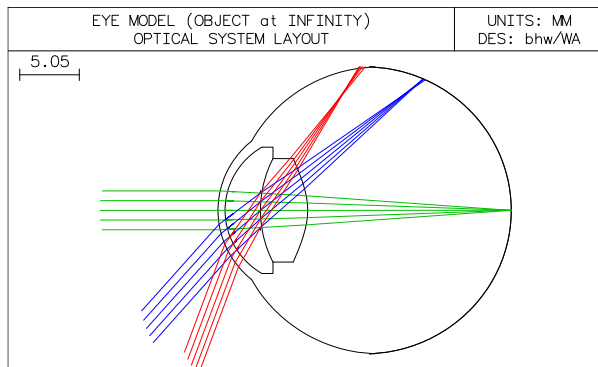
92. ábra. Képsík kb. a hátsó fókusz síkban.



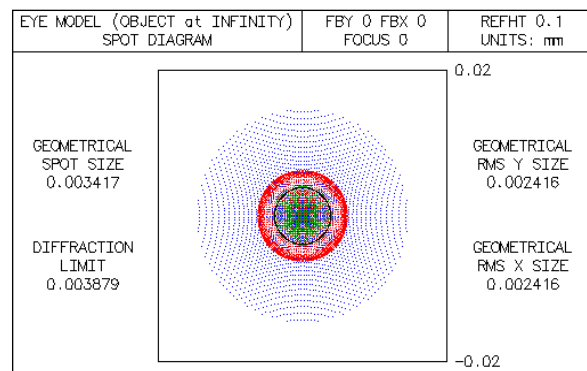
93. ábra. Szóródási folt kb. a hátsó fókusz síkban.

## Emberi szem

Kék színre sokkal rosszabb a feloldás mint zöldre vagy pirosra. A szem legnagyobb felbontóképességét kb.  $\varnothing 2,5$  mm-es pupillánál éri el, alatta a diffrakció, felette a geometriai aberrációk dominálnak. A szem egymáshoz képest kb. 1 szögperc alatt látható tárgypontokat képes megkülönböztetni (kb. 0,1 mm a tisztánlátás távolságán azaz 250 mm-en).

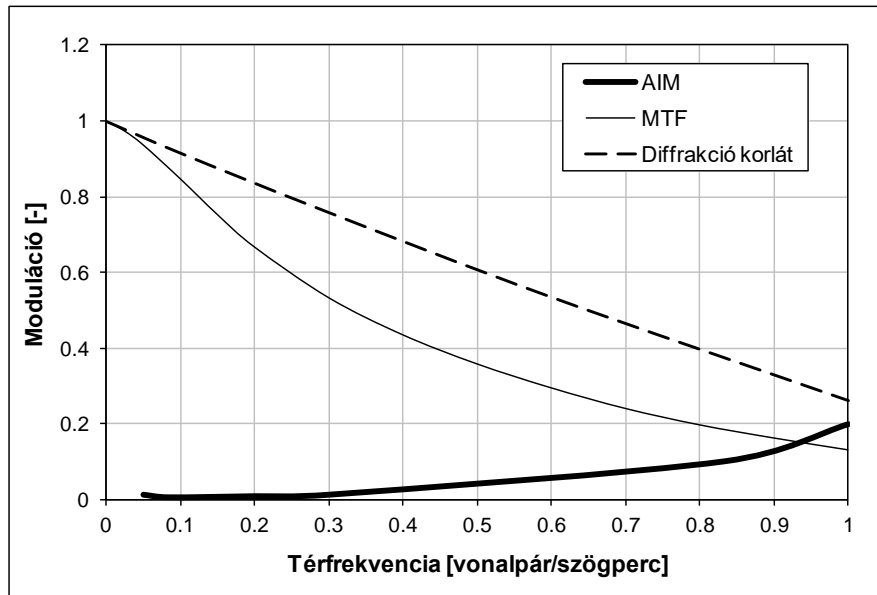


**94. ábra.** A szem modellje W. J. Smith, “Modern Optical Engineering”-beli modellje alapján.



**95. ábra.** A szem szóródási foltja a retinán  $\varnothing 3$  mm-es pupilla esetén. A kék szín defókuszáltságán jól látható a longitudinális színhiba.

A pupilla mérete függ a megvilágítástól. A 2,5 mm-es átmérőt kb. 100 candela/m<sup>2</sup> fénysűrűség esetén éri el (ez nagyjából a borult égboltnak felel meg). Amikor a leképezés diffrakciókorlátos, a diffrakciós folt sugara 4  $\mu$ m. A szem a látómezejének csak a középső kb.  $\pm 2^\circ$ -os tartományán lát élesen (ez esik a retina sárgafoltnak nevezett részére), itt csökken a látásélesség a maximum felére. A sárgafolton (foveán) a legsűrűbb a legérzékenyebb receptorok, a csapok eloszlása. A csapok távolsága kb. 2  $\mu$ m, ami meglepően jól illeszkedik a 4  $\mu$ m-es diffrakciós folthoz. (A Nyquist-Shannon-féle mintavételezési törvény alapján az optika által átvitt legnagyobb térfrekvencia periódusának fele kell hogy legyen a detektorok távolsága, és az eddig tanultak alapján ez a periódus hossz kb. az Airy-folt sugara.) A szem teljes tárgyszög tartománya  $\pm 110^\circ$  vízszintesen. A szem levegőre vonatkoztatott átlagos effektív fókustávolsága 17,1 mm. A retinán mérve a térfrekvenciát, az átlagos szem kb. 160 vonalpár/mm-t ( $\div 0.8$  vonalpár/szögperc) old fel (szinuszos tárgy esetén). Négyzetjel-jellegű (azaz nem szinuszos) tárgy esetén nagyon jó szem akár 280 vonalpár/mm-t ( $\div 1.5$  vonalpár/szögperc) is feloldhat ideális körülmények között.

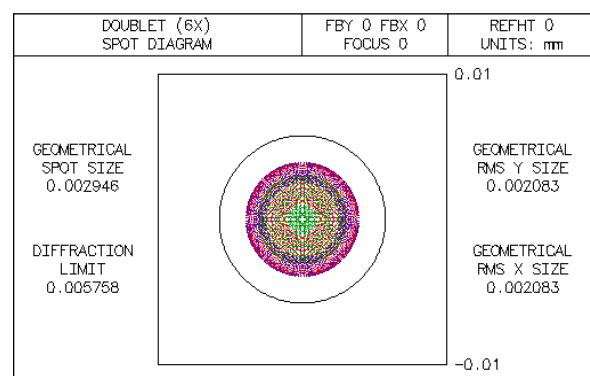
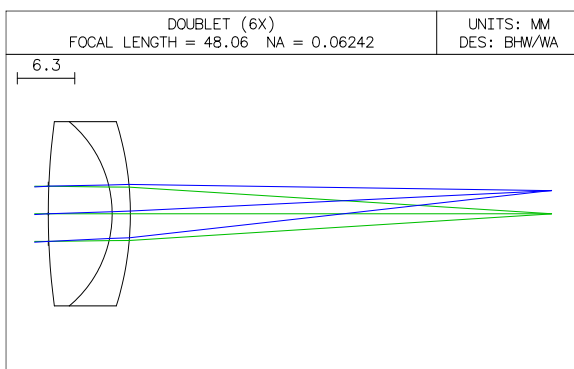


**96. ábra.** Az átlagos emberi szem optikájának MTF görbéje  $\varnothing 3,0$  mm pupilla esetén, polikromatikus fényben. (Emlékeztetőül: az MTF a szinuszos tárgy moduláció átvitelét mutatja.) Az AIM (Aerial Image Modulation) görbe adja meg a retinán ahhoz szükséges modulációt, hogy a szem az adott térfrekvenciájú képet még éppen érzékelni tudja. (Az AIM görbe azért szükséges, mert pl. egy CCD detektor mátrixszal ellentétben a szem esetén nem tudjuk megmérni, hogy milyen modulációval látja az illető a képet, csak azt tudjuk, hogy látja-e vagy sem.) Az AIM és MTF görbék metszéspontja határozza meg a legnagyobb feloldható térfrekvencia értékét. Az AIM görbét T. Liu et al., *Measurements of retinal aerial image modulation (AIM) for white light based on wave-front aberration of human eye*, 2008-as cikke alapján származtattuk. A tárgyterben kifejezett 1 vonalpár/szögperc térfrekvencia a retinán 200 vonalpár/mm-nek felel meg.

## Ragasztott akromát #1 (duplet) végtelenből végesbe, kis tárgyszög mellett

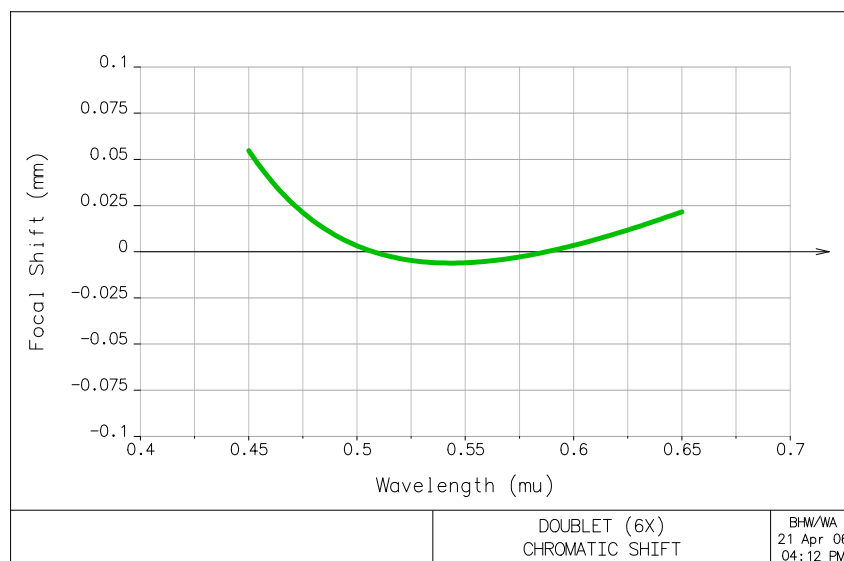
A ragasztott akromát, más néven duplet felbontóképessége alacsony, kb. 400 pont a teljes tárgytérben, aminek oka a korrigálatlan képmezőhajlás. A lencse két különböző diszperziójú üvegy anyagból van összeállítva, ezért az elsőrendű színhibája nulla, azaz kiterjedt hullámhossztartományban kb. állandó a fókusz távolsága. Ezek a rendszerek emellett szférikus aberrációra és kómára is elég jól korrigáltak. Egyszerű leképezési feladatokra az akromát remek választás. A szemünket a tárgytérbe helyezve, és egy vizsgálandó mintát a fókusz síkba téve kiválóan használható nagyítólencsének is.

Általában az akromátok (mint ez is) kis (néhány fokos) tárgyszögre, végtelenből véges leképezésre vannak korrigálva (a rekesz legtöbbször a lencsén van). Mérsékelt NA mellett még diffrakciókorlátos a leképezés. Az alábbiakban bemutatott „ragasztott akromát #1 viselkedése nagy tárgyszög mellett”, és „ragasztott duplet #2 (akromát) mint „landscape” (tájkép) lencse” esetekben a lencsék NA-ja és effektív fókusz távolsága azonos az összehasonlíthatóság érdekében.



**97. ábra.** Ragasztott akromát optimális leképezéshez megfelelően rekeszelve, kis tárgyszög esetén.

**98. ábra.** Ragasztott akromát polikromatikus szóródási foltja. A leképezés kb.  $\pm 3^\circ$  tárgyszög tartományon belül diffrakciókorlátos.



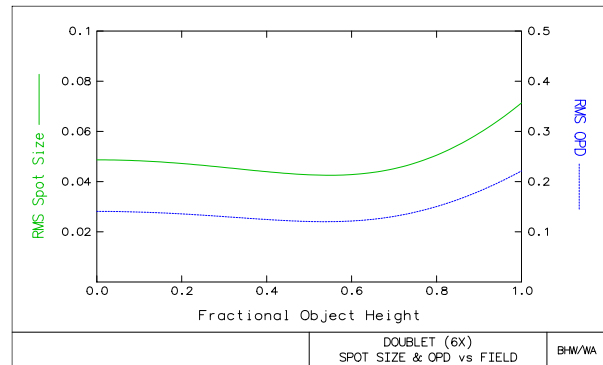
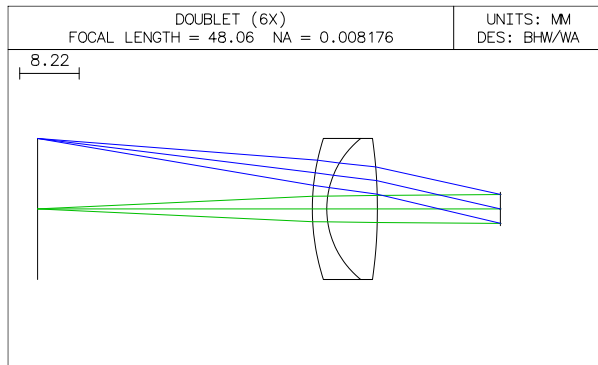
**99. ábra.** Ragasztott akromát fókusz síkjának eltolódása a hullámhossz függvényében. Jól látható, hogy két hullámhosszon azonos a fókusz sík helyzete. A görbe parabolikus formája a törésmutató diszperzió másodfokú görbével leírható jellegéből származik.

## Ragasztott duplet #1 (akromát), mint nagyító (lupe)

Megfordítva, és a szem helyére kitolt rekesszel nagyítóként is kiváló az akromát. A lupe nagyítása

$$m \equiv 250 \text{ mm} / f' \text{ [mm]}. \quad (202)$$

250 mm a „tisztánlátás” távolsága (avagy olvasási távolság), adott tárgy esetén itt a legnagyobb a retinán a kép. Ennél közelebb már fárasztja a szemet, távolabb fix tárgyméret esetén csökken a tárgyszög, ezzel együtt a képméret.

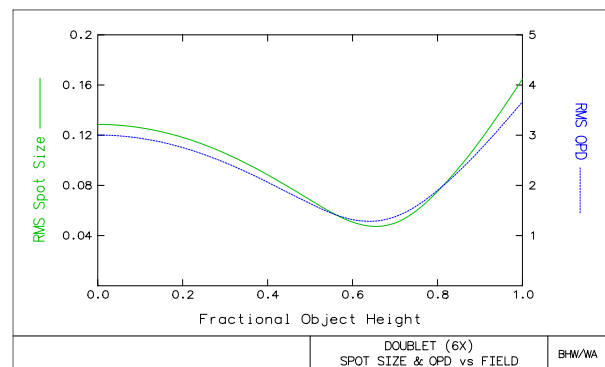
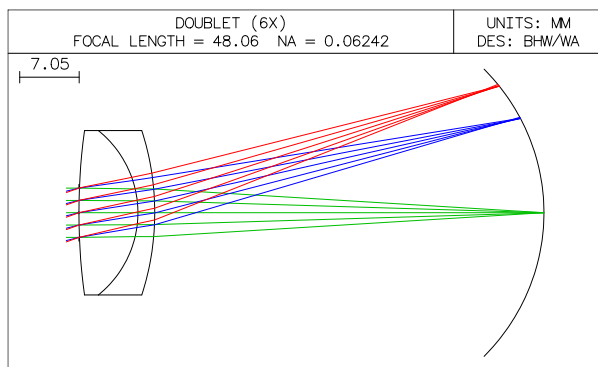


**100. ábra.** Ragasztott akromát mint nagyító. A képsík virtuális, és a szem pupillájától (ld. a kép jobb oldala)  $-250$  mm távolságban (balra) helyezkedik el. Tárgyszög  $\pm 10^\circ$ , szem pupilla  $\varnothing 4$  mm.

**101. ábra.** A szóródási folt RMS mérete (folytonos görbe) a tárgymagasság függvényében. Az RMS OPD (szaggatott görbe) mutatja, hogy jelen esetben a leképezés nem diffrakció-korlátos, de ahhoz ( $0,07 \lambda$ ) közel van.

## Ragasztott akromát #1 viselkedése nagy tárgyszög mellett

Nagyobb tárgyszögekre hirtelen megnő az akromát foltmérete a nagy képmezőhajlás és asztigmatizmus miatt (ld. a transzverzális sugáraberrációt leíró harmadrendű polinomot: az asztigmatizmus négyzetesen függ a tárgymérettől).



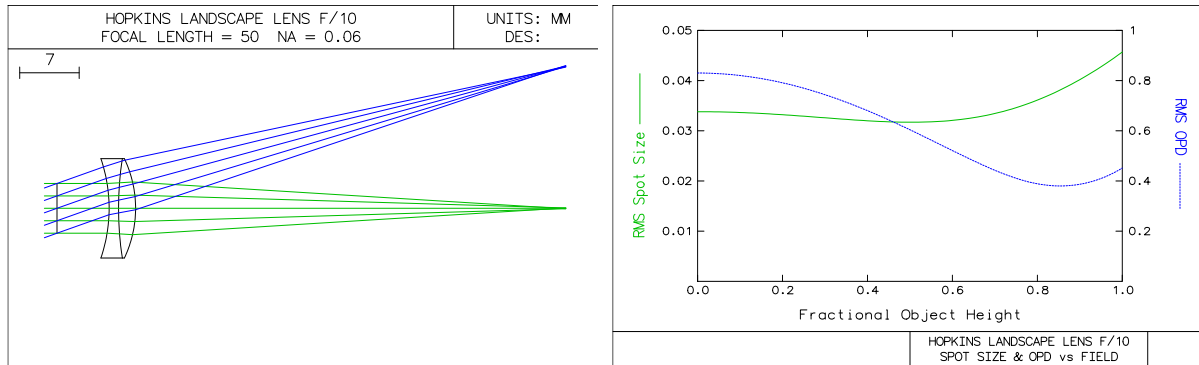
**102. ábra.** Ragasztott akromát nagy,  $\pm 20^\circ$ -os tárgyszög esetén. A hatalmas képmezőhajlás és asztigmatizmus elrontja a leképezés minőségét.

**103. ábra.** A szóródási folt RMS mérete (folytonos görbe) a tárgymagasság függvényében, az optimális görbe képfelület esetén. A leképezés távolról sem diffrakciókorlátos.



## Ragasztott duplet #2 (akromát) mint „landscape” (tájkép) lencse

Kb.  $f_{\text{eff}}/5$ -be kitolt rekesszel, megváltoztatott (hajlított) alakkal az akromát akár  $\pm 20^\circ$ -os szögben is elfogadható leképezést ad. A képalkotás itt közel sem diffrakciókorlátos (még a tengelyen sem, a megnövekedett nyíláshiba miatt), de a foltméret kicsi marad nagy tárgyszög tartományon belül (a csökkentett asztigmatizmus, kóma és képmezőhajlás miatt).

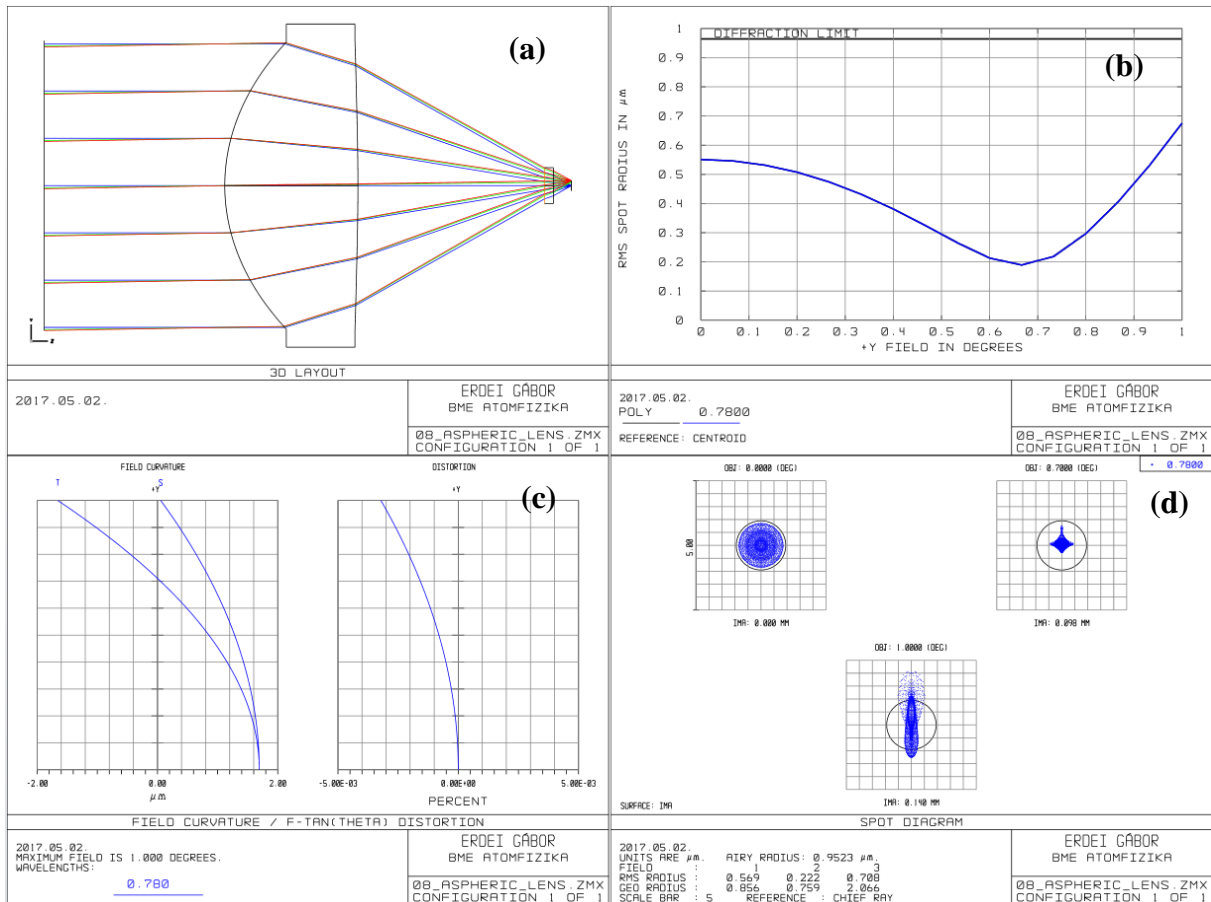


**104. ábra.** Tájkép lencse (optimális alakú ragasztott akromát kitolt rekesszel) nagy,  $\pm 20^\circ$ -os tárgyszög esetén.

**105. ábra.** A szóródási folt RMS mérete (folytonos görbe) a tárgymagasság függvényében sík képfelületen. Hála az optimalizált lencsealaknak és a kitolt rekesznek, a leképezés közel diffrakciókorlátos.

## Aszférikus kollimátorlencse

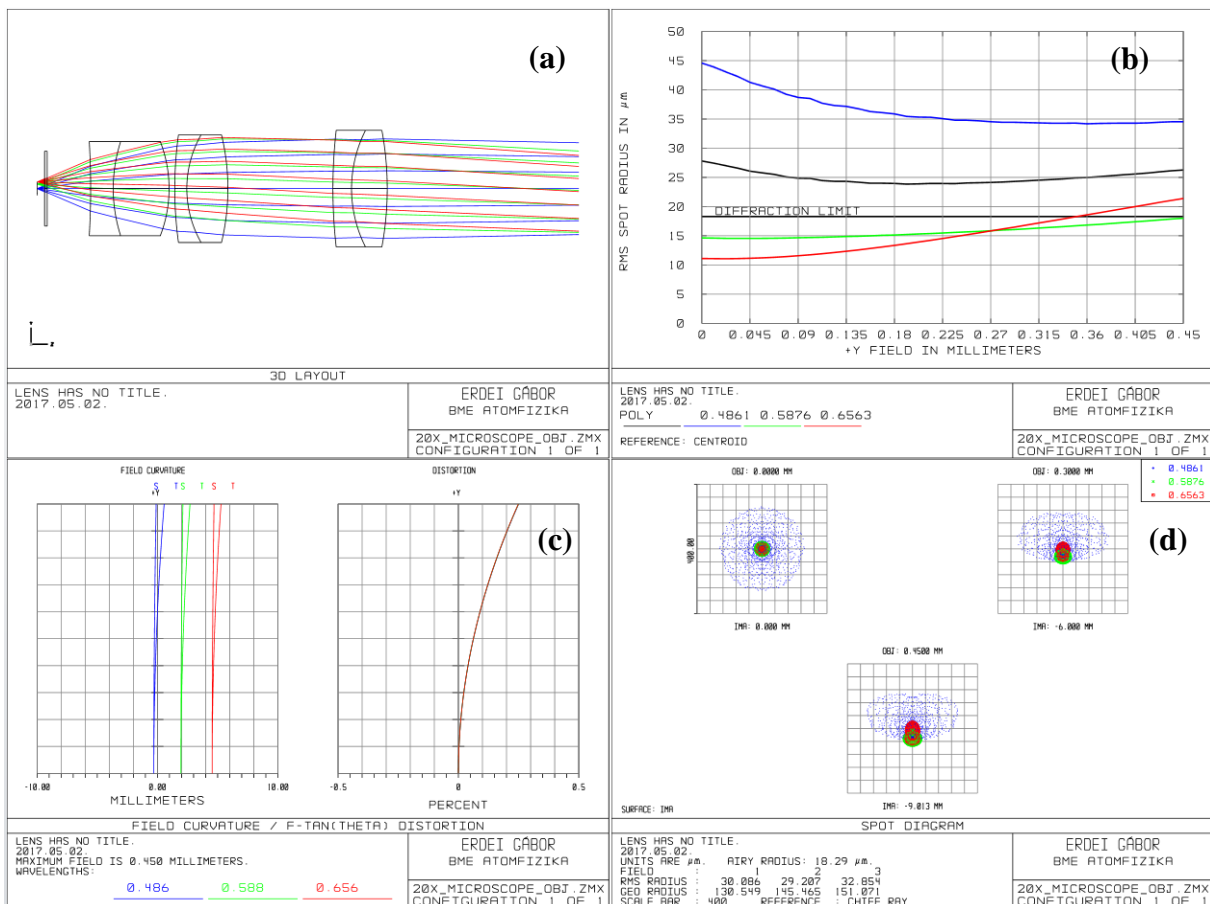
A kvázi-pontforrások (pl. lézerdiodák) nyalábjának kollimálására (párhuzamosítására) manapság üvegből préselt aszférikus (nem gömbi felületű) lencsákat használnak, 0,12-0,7 közötti NA-val. Effektív fókusztávolságuk kicsit, 1-16 mm közötti. Bár itt a tárgyter jellemzően nem kiterjedt ( $\pm 0,5^\circ$ ), a felbontás kb. 400 pontra tehető. Diffrakciókorlátos a viselkedésük, de színhibára nem korrigáltak, emiatt hullámhosszváltáskor újra kell fókuszálni őket. Az aszférikus lencsék másik tipikus felhasználási területe az optikai adattárolás (CD, DVD), ahol egy síkhullámot kell az adathordozó felületére fókuszálni egy néhány mikrométer átmérőjű foltba. A blueRay lemezeknél a nagy numerikus apertúra ( $NA = 0,85$ ) miatt már kéttagú lencserendszereket használnak. Fontos megjegyezni, hogy a képminőséget alapvetően befolyásolja a lézerdiodák asztigmatizmusa (a tangenciális és szagittális tárgyponatok közötti távolság tipikusan 5-10  $\mu\text{m}$ ), illetve, hogy a fénynyalábjuk elliptikus (kb.  $15^\circ \times 70^\circ$ -os a divergencia félértékszélessége).



**106. ábra.** Aszférikus kollimátorlencse képe (a), a szóródási folt tárgyszög-függése (b), képmezőhajlás és torzítás (c), monokromatikus szóródási foltok három jellemző tárgyponat esetén, ahol a körök az Airy-foltot szimbolizálják (d).

## Mikroszkópobjektív

Az átlagos mikroszkópobjektívek felbontóképessége kb. 900 pont, nagyításuk 4-100× között van. Jellemző szerkezetüket a 107. (a) ábra mutatja. Manapság szinte kizárólag olyanokat használnak, ahol a kép végtelenben keletkezik, emiatt csak egy tubuslencsével (pl. ragasztott akromát) kiegészítve tudnak valós képet alkotni pl. egy kamera képérzékelőjén (az ábrán a tubuslencse nincs feltüntetve). A jellemző képátló 20 mm („field number”). A régebbi, végesbe leképző, adott nagyítású objektívek képtávolsága (mechanikai tubushossz) 160 mm körül van (szabványfüggő). Jellemzően akromatikusak, nulla a szférikus aberrációjuk és a kómájuk (aplanatizmus). A képmezőhajlás megengedett, sík felületen a képátló kb. 65%-n éles a kép. „Semi-plan”-nál az átlagosnál kisebb (a kép 85%-a éles), „plan”-nál gyakorlatilag nem kimutatható (a kép 95%-a éles). A tárgyoldalon a fénynyalábok telecentrikusak, emiatt a nagyítás nagyjából defókusz-független. A torzításuk alacsony, pár tized százalék. Ha a numerikus apertúra 0,4 vagy annál nagyobb, figyelni kell a tárgylemez általában 0,17 mm vastag fedőüvegének szférikus aberrációjára, amelyet biológiai objektíveknél kikorrigálnak. Ezek a lencsék gyakorlatilag kizárólag a fókuszszíkba helyezett tárgy esetén aberrációmentesek. A mikroszkópobjektívek numerikus apertúrája 0,1-1,25. Az NA 1,0 fölé immerziós folyadék segítségével növelhető, amit a minta és a lencserendszer közé kell cseppenteni, megnövelve ezzel a tárgytéri közeg törésmutatóját. (Csak erre a célra tervezett, megfelelően tömített objektíveknél használható ez az eljárás!)

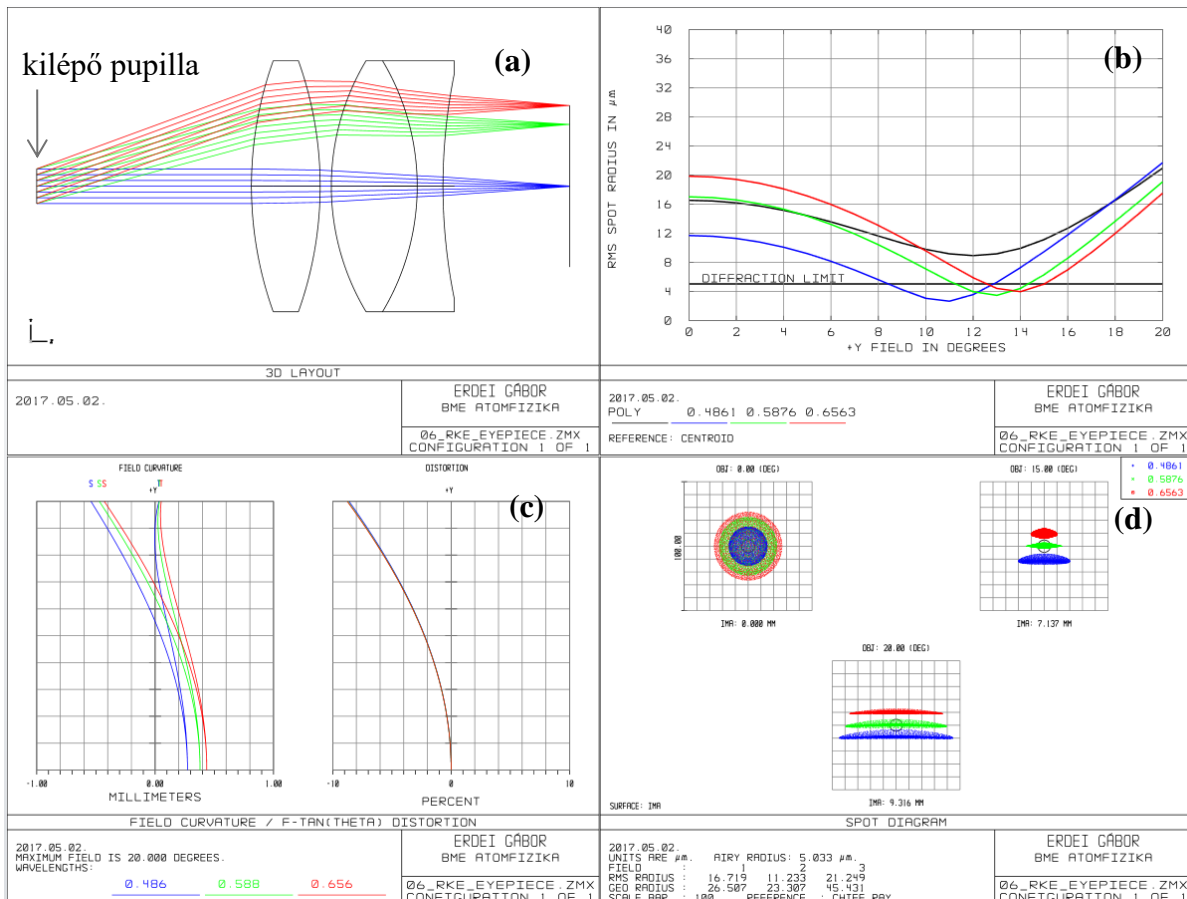


**107. ábra.** 10×-es nagyítású, NA 0,4-es, véges képtávolságra korrigált mikroszkópobjektív képe. (a), a szóródási folt tárgyszög-függése (b), képmezőhajlás és torzítás (c), polikromatikus szóródási foltok három jellemző tárgypont esetén (d).

további típusok: apo (apokromatikus)  
tükrös (UV, IR)

## Betekintő lencse (okulár)

A mikroszkópok és távcsövek képét nem egyszerű nagyítólencsével, hanem ún. betekintő lencsével, vagy okulárral szokták vizuálisan megfigyelni. Felbontásuk ennek megfelelően kb. 1100 pont a tárgytérben. Mivel szemmel történő megfigyelésre fejlesztették ki őket, a torzításuk (2-5%) és képmézőhajlásuk általában tetemes. Sajátos specifikációs paraméterük a betekintési távolság (a kilépő pupilla és a lencserendszer közötti távolság), amely minél nagyobb, annál kényelmesebb mind szabad szemmel mind szemüveggel belenézni. Szélsőségesen nagy a betekintési távolság (> 10 cm) fegyvertávcsöveknél, ahol a lövés okozta hátrarúgás miatt fellépő balesetveszélyt próbálják ezzel minimalizálni.



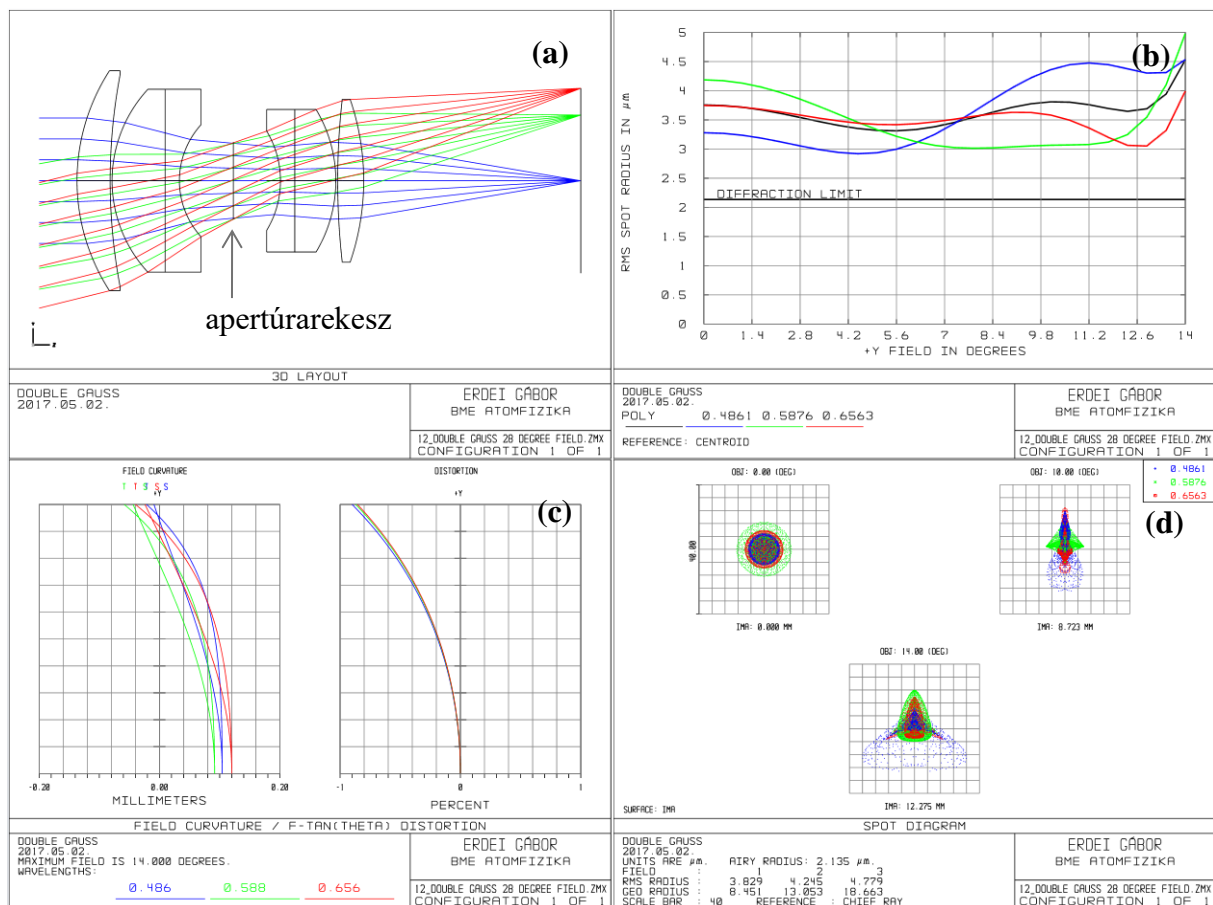
**108. ábra.** RKE (Rank, Kaspereit, Erfle) típusú mikroszkópopulár képe. (a), a szóródási folt tárgyszög-függése (b), képmézőhajlás és torzítás (c), polikromatikus szóródási foltok három jellemző tárgypont esetén, ahol a körök az Airy-foltot szimbolizálják (d).

betekintési távolság: 10-25 mm  
 tárgyméret:  $\approx \text{Ø}20$  mm („field number”)  
 nagyítás: 5×-40×  
 típusok: Huygen  
 Ramsden  
 Kellner  
 RKE  
 Orthoscopic  
 Plössl  
 Erfle

## Dupla-Gauss fényképezőgép-objektív

A korszerű fényképezőgép-, kamera- és projektorobjektívek általában dupla-Gauss, azaz „biotar” elrendezésűek. Névadójuk az 1817-ben feltalált Gauss-objektív eredetileg távcső lencse volt, és csupán egy pozitív és egy tőle kis léggözzel elválasztott negatív lencsét tartalmazott. Mind a két optikai elem meniszkusz alakú, azaz a szemüveglencsékhez hasonlóan egy konvex és egy konkáv felületből áll. A törőerőt a pozitív tag adja, a negatív pedig csökkenti a színhibát. Ezen objektívet számos cég (pl. a Zeiss) fejlesztette mai alakjára.

A dupla-Gauss rendszerek kb. 6000 pontot tudnak felbontani a tárgytérben  $f/3.0$  mellett. Jellemzőjük a közel szimmetrikus elrendezés, középen az apertúrarekesszel. Torzításuk 0,5-1%, és a képalkotási hibák nagy tárgytávolság-tartományban korrigáltak (végtelentől néhány cm-ig.)

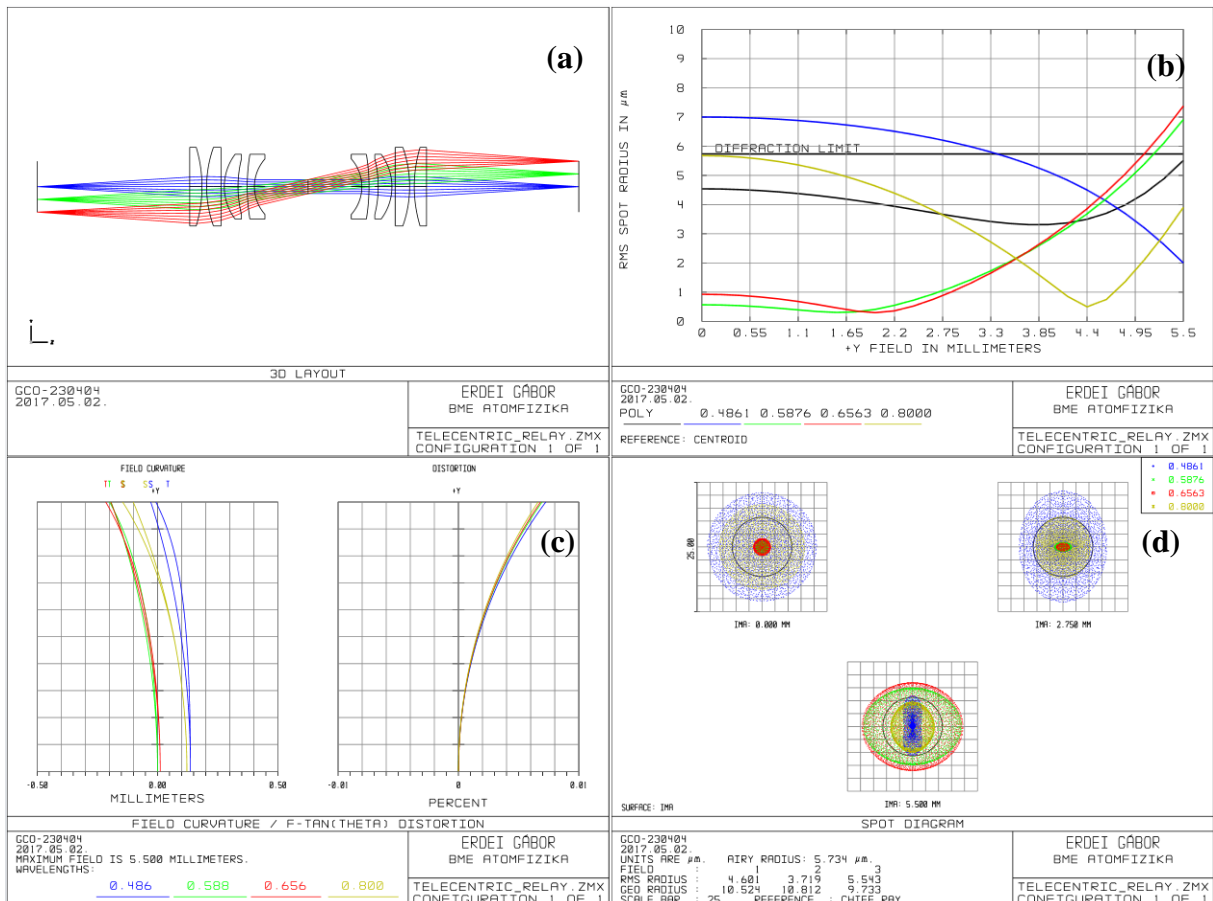


**109. ábra.** Dupla-Gauss-típusú fényképezőgép-objektív képe (a), a szóródási folt tárgyszög-függése (b), képmezőhajlás és torzítás (c), polikromatikus szóródási foltok három jellemző tárgypont esetén (d).

Speciális objektívfajtát képeznek a teleobjektívek, amelyek effektív fókusztávolsága már olyan nagy, hogy meghaladja az egész lencserendszer hosszát. Ennek köszönhetően a méretük jelentősen kisebbé válik, ami a kezelhetőséget segíti elő. A zoom-os objektívekben egy lencsecsoport mechanikai tologatásával folyamatosan lehet változtatni az effektív fókusztávolságot, ami a transzverzális nagyítást befolyásolja. A lebonyolultabb szerkezetek a nagylátószögű (halszem-) optikák. Ezek kétszeres tárgyszöge akár  $180^\circ$ -nál is nagyobb lehet, amit úgy érnek el, hogy egy dupla-Gauss objektív elé speciális előtétet terveznek, azt modellezve, ahogy a halak szeme a víz alól kitekint a levegőbe. E lencsék torzítása tetemes.

## Telecentrikus képátvetítő

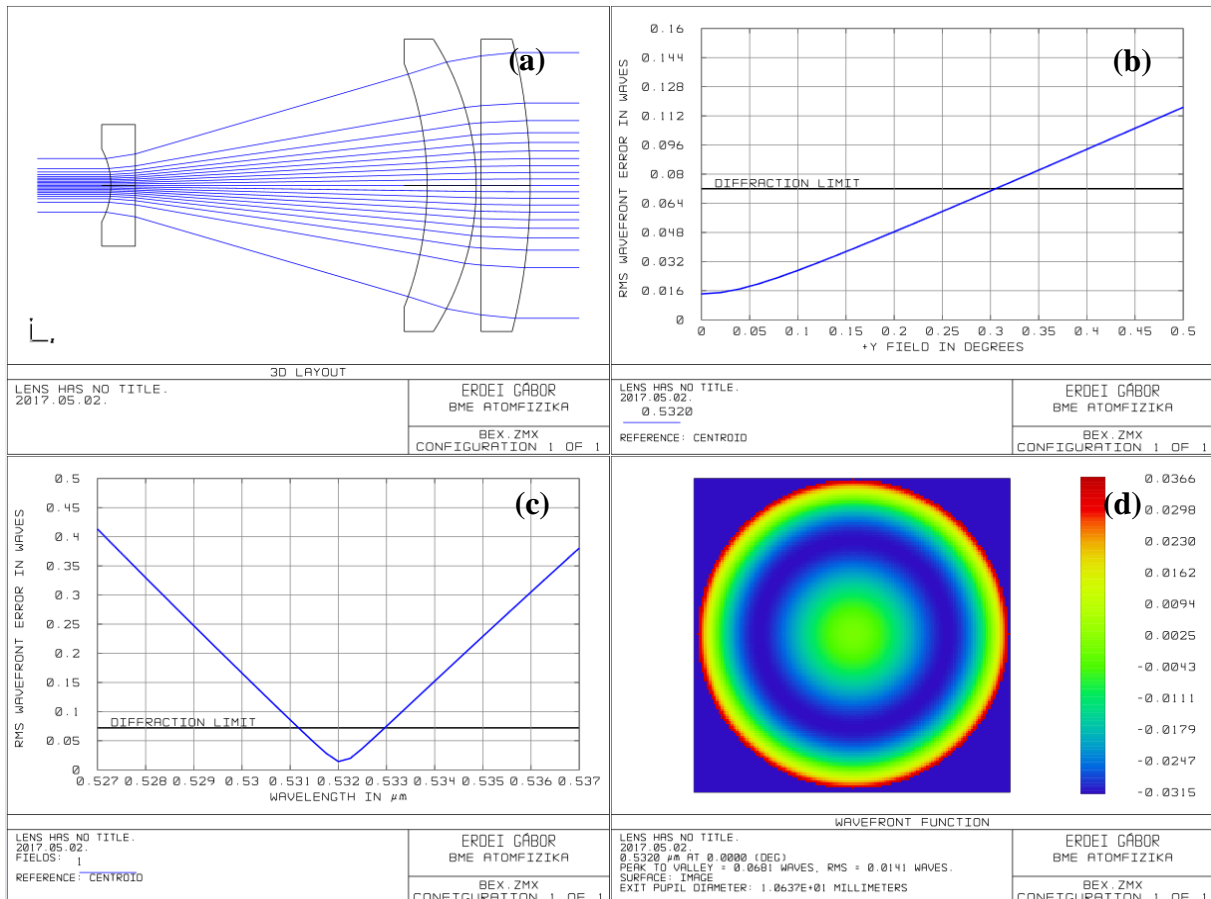
Egy korszerű optikai eszköz a telecentrikus képátvetítő. Ennek fő jellemzője, hogy mind a belépő és kilépő pupilla a végtelenben van, emiatt a nagyítás nem függ a tárgysík pozíciójától, ezért gépi látás rendszerekben előszeretettel alkalmazzák őket. A képalkotási hibáik egy adott tárgysík nagyon szűk környezetében korrigáltak, felbontásuk kb. 2000 pont a teljes képátlón. A szinte teljesen szimmetrikus elrendezés miatt a torzításuk gyakorlatilag elhanyagolható, 0,1% alatti.



**110. ábra.** Telecentrikus képátvetítő objektív képe (a), a szóródási folt tárgyszög-függése (b), képmezőhajlás és torzítás (c), polikromatikus szóródási foltok három jellemző tárgypont esetén, ahol a körök az Airy-foltot szimbolizálják (d).

## Nyalábtágító (Galilei-távcső)

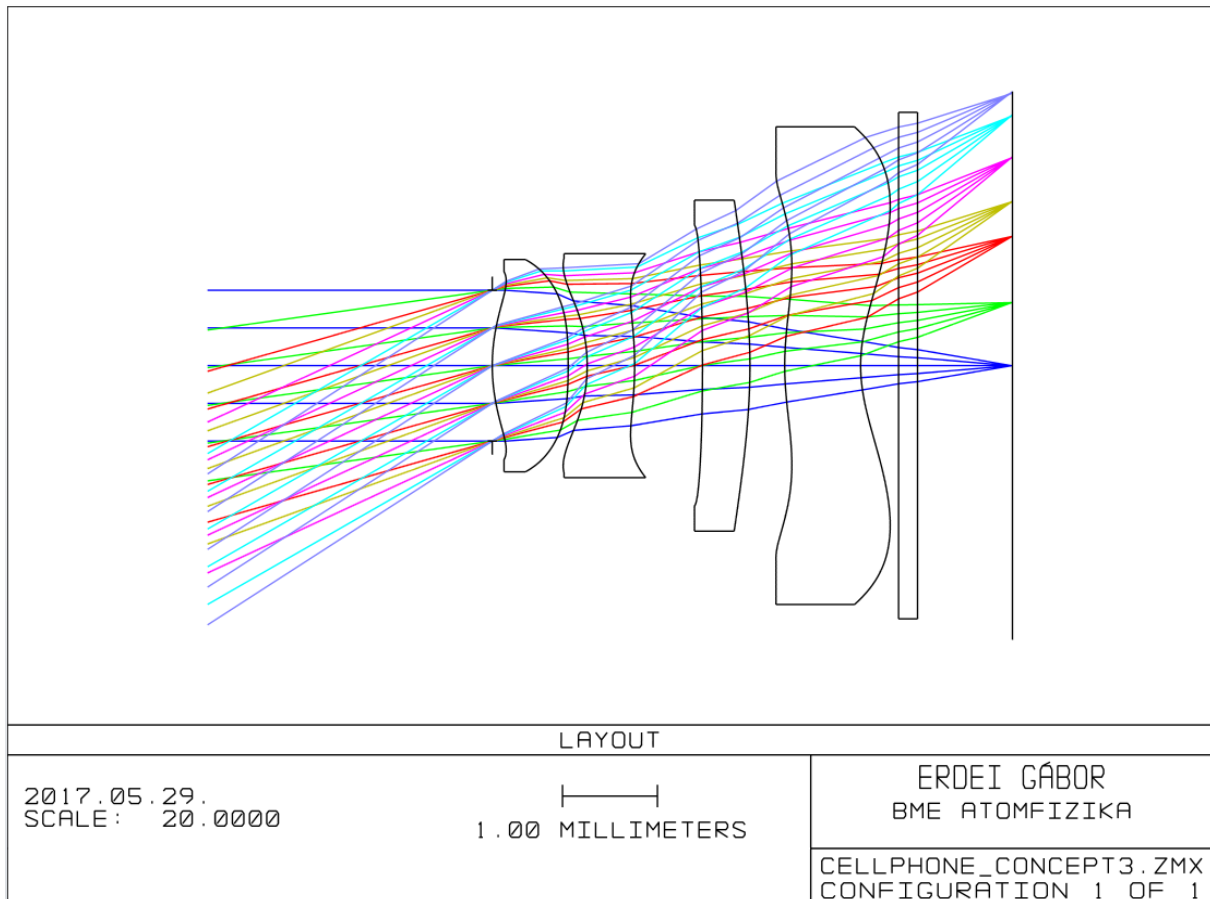
A Galilei-féle elrendezés jól ismert földi és színházi távcsövekből, ahol egy pozitív és egy negatív, konfokális (azonos fókuszpontú) pozícióba helyezett lencse segítségével alkotnak egyenes állású képet távoli objektumokról. Mivel ezek végtelenből végtelenbe képeznek le, és megváltoztatják a rajtuk áthaladó fénynyaláb méretét, előszeretettel használják őket lézerek nyalábtágítójaként. Megfelelő kialakítás esetén diffrakciókorlátos a leképzésük, azaz csak minimális mértékben torzítják a hullámfrontot. Annak érdekében, hogy az apertúrarekeszen fellépő diffrakció ne befolyásolja a rajtuk áthaladó lézernyaláb TEM<sub>00</sub> módusképét (Gaussnyaláb), a belépő pupilla átmérőjét a lézernyaláb  $1/e^2$  intenzitású átmérője legalább 2,5..3-szorosának kell választani.



**111. ábra.** Galilei-távcső jellegű lézernyaláb-tágító képe (a), a hullámfront-aberráció (*RMS OPD*) tárgyszög-függése (b), a hullámfront-aberráció hullámhosszfüggése (c), a hullámfront alakja a névleges hullámhosszon (d).

## Mobiltelefon kamera

A modern optikai eszközök iránt támasztott különleges specifikációs igények, valamint az új gyártási technológiák kifejlődése merőben átalakítja a lencserendszerekről alkotott elképzeléseket. Példaként álljon itt egy mobiltelefonba építhető kameraobjektív, amely műanyagból készített aszférikus lencsét tartalmaz. Hagyományos, szférikus üveglencséből 2-3-szor annyi kellene ugyanolyan képminőség eléréséhez mint a mai korszerű mobilkamerák esetében. Mivel a gyártók bizalmas információként kezelik e lencserendszerek felépítését, csupán egy sematikus ábrát (112. ábra) tudunk közölni róluk, képminőség-adatok nélkül.



**112. ábra.** Egy egyszerűbb mobiltelefon-kamera objektívjének koncepcionális képe (a képérzékelő a jobb oldalon található). A lencserendszert az alábbi hivatkozás alapján konstruáltuk: [http://www.novuslight.com/optimizing-lens-systems-for-tolerance-desensitization\\_N1459.html](http://www.novuslight.com/optimizing-lens-systems-for-tolerance-desensitization_N1459.html).



## 11.2. GYAKORLATON BEMUTATANDÓ RENDSZEREK

Üveglemez, ferde lemez

**Triplet (Cooke-, Tessar-fényképező objektív)**

**Halszem-optika (fisheye)**

**Scanner-lencse (f-theta objektív)**

**Cassegrain-tükrös távcső**

**Fourier-objektív, retrofocus objektív, teleobjektív, zoom**

### **Petzvál**

tervezés: 1841

kb 1000 pont

1%

### **Triplet**

Cooke-triplet: Harold Dennis Taylor, 1893

Tessar Paul Rudolph, Zeiss, 1902

felbontás: kb 3000 pont (f/16-nál) ; 2000(f/3.5-nél)

torzítás: 1-2%

Cooke felbontása 3000 (f/4), de jobban vinyettál

## IRODALOMJEGYZÉK

- [1] W. J. Smith, „*Modern Optical Engineering*”, McGraw-Hill
- [2] J. W. Goodman, „*Introduction to Fourier Optics*”, McGraw-Hill
- [3] M. Born, E. Wolf, „*Principles of Optics*”, Cambridge University Press
- [4] Richter P., „*Bevezetés a Modern Optikába I.-II.*”, Műegyetemi kiadó
- [5] RadiantZemax LLC, „*ZEMAX Manual*”
- [6] Kalló P., „*Optikai feladatgyűjtemény I-II.*”
- [7] Svelto, Lanna, „*Principles of Lasers*”
- [8] W. J. Smith, „*Modern Lens Design: A Resource Manual*”, McGraw-Hill
- [9] Laikin, „*Lens Design*”, Marcel Dekker
- [10] Walker, „*Optical Engineering Fundamentals*”, McGraw-Hill
- [11] W.J. Smith, „*Engineering an Optical System*”, SPIE OE Magazine, 2002.
- [12] T. Liu et al., „*Measurements of retinal aerial image modulation (AIM) for white light based on wave-front aberration of human eye*”, 2008
- [13] C.S. Williams, O.A. Becklund, „*Introduction to the Optical Transfer Function*”, SPIE Press
- [14] Bass M., et al. (eds.) „*OSA Handbook of Optics*”, McGraw-Hill
- [15] Saleh, Teich, „*Fundamentals of Photonics*”, Wiley
- [16] Goodman, „*Statistical Optics*”, Wiley
- [17] R.E. Fischer et al., „*Optical System Design*”, McGraw-Hill
- [18] M.J. Weber, „*Handbook of Optical Materials*”, CRC Press
- [19] J.M. Geary, „*Introduction to Lens Design with practical ZEMAX examples*”, Willmann-Bell
- [20] A. Nussbaum, R.A. Phillips, „*Modern optika mérnököknek és kutatóknak*”, Műszaki Könyvkiadó

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Szeretném hálás köszönetemet kifejezni Nemes-Czopf Anna felé, aki rengeteget segített a jegyzet szerkesztésében, korrektúrázásában.