Bevezetés a modern fizika fejezeteibe

1.

Rugalmas hullámok

Utolsó módosítás: 2013. szeptember 10.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformálható testek mozgása (1)

A Helmholtz-féle kinematikai alaptétel:

A deformálható test elegendően kicsiny térfogatának általános helyzetváltozása összetehető egy haladó mozgásból (transzlációból), egy forgásból (rotációból) és három egymásra merőleges irányban való megnyúlásból ill. összehúzódásból (dilatációból ill. kontrakcióból).

A deformálható testek mozgása (2)

A rugalmas közeg kiszemelt $P_0(0,0,0)$ pontja kis környezetének $P(x,y,z)$ pontja végezze az $\boldsymbol{s}=(\xi,\eta,\zeta)$ elmozdulást. A P_0 pont környezetében az elmozdulás vektor komponenseit Taylor-sorba fejthetjük:

$$\xi = \xi_0 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0 z$$

$$\eta = \eta_0 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)_0 z$$

$$\zeta = \zeta_0 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)_0 z$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A deformálható testek mozgása (3)

Az első sorban a – $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\eta}{\partial x}y$ és $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x}z$ –,

a másodikban a – $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\xi}{\partial y}x$ és $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial y}z$ –,

a harmadikban – $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\xi}{\partial z}x$ és $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial\eta}{\partial z}y$ –

zérusösszegű kifejezéspárok bővítésével, valamint a zárójelek lábánál lévő $_0$ index elhagyásával:

A deformálható testek mozgása (4)

$$\xi = \xi_0 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) z\right] + \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) z\right]$$

$$\eta = \eta_0 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) z\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) x + \frac{\partial \eta}{\partial y} y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) z\right]$$

$$\zeta = \zeta_0 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) y\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} z\right]$$

A deformálható testek mozgása (5)

Az elmozdulás három összetevőre bontható. Az

$$s_{transz} = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$$

értékek a transzlációs (haladó) mozgás x, y és z komponensei. A fenti egyenletekben álló első szögletes zárójelbeli kifejezéseken megjelenő

$$\delta\varphi_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right), \quad \delta\varphi_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \quad \delta\varphi_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$$

a szögelfordulásokat adják meg.

A deformálható testek mozgása (6)

Zárt alakban

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} rot\, \boldsymbol{s}$$

A vektorszorzás használatával ellenőrizhető, hogy a formulák első zárójeles kifejezései az rotációval kapcsolatosak:

$$\boldsymbol{s}_{rot} = [\delta\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{r}] = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}$$

Ha ezt az elmozdulást elosztjuk a hozzá tartozó rövid δt időtartammal, akkor a kinematikából ismert

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

sebesség kifejezésre jutunk.

A deformálható testek mozgása (7)

A második szögletes zárójelben álló kifejezések a teljes elmozdulás deformációból származtatható részei:

$$\xi_{def} = \varepsilon_{xx}x + \varepsilon_{xy}y + \varepsilon_{xz}z$$

$$\eta_{def} = \varepsilon_{yx}x + \varepsilon_{yy}y + \varepsilon_{yz}z$$

$$\zeta_{def} = \varepsilon_{zx}x + \varepsilon_{zy}y + \varepsilon_{zz}z$$

A deformálható testek mozgása (8)

Az itt bevezetett mennyiségek:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \eta}{\partial y}; \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}; \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$

A deformálható testek mozgása (9)

A mennyiségekből képezhető a deformációs tenzor (nyúlási vagy dilatációs tenzor), amely mindig szimmetrikus:

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Ezzel a deformációhoz tartozó elmozdulás

$$\boldsymbol{s}_{deform} = \hat{E}\boldsymbol{r}$$

Ezzel a Helmholtz-tételt bebizonyítottuk.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A kontinuumok mozgásegyenlete (1)

A kontinuumok mozgásegyenletének leszármaztatásához Newton II. axiómáját terjesztjük ki. Az így kapott egyenletet a kontinuumok Cauchy-féle mozgásegyenletének nevezik. Integrális alakja:

$$\int_V \varrho \boldsymbol{a}\, dV = \int_A \hat{T}\, d\boldsymbol{A} + \int_V \varrho \boldsymbol{f}\, dV$$

Itt $\boldsymbol{a}$ a gyorsulás, $\hat{T}$ a felületi erőkhöz tartozó (szimmetrikus) feszültségtenzor

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{f}$ a tömegegységre ható (fajlagos) erő a térfogati erő

A kontinuumok mozgásegyenlete (2)

A felületi integrált a Gauss-tétel értelmében térfogati integrállá alakítva, majd az integrálást „elhagyva" a mozgásegyenlet differenciális alakjához jutunk

$$\varrho \boldsymbol{a} = div\hat{T} + \varrho \boldsymbol{f}$$

Ez az egyenlet formálisan leírja minden kontinuum általános mozgását, de a konkrét feladatok megoldásához meg kell mondani, hogy mi a kapcsolat az $\hat{E}$ deformációtenzor és a $\hat{T}$ feszültségtenzor között, azaz mi a kapcsolat az elmozdulás és az erőhatás között? Ez lényegében a konstitutív (anyag-)egyenlet megkeresését jelenti.

A deformáció és feszültség kapcsolata (1)

Ha homogén izotróp testek vizsgálatára szorítkozunk (és most itt főleg az izotrópia a lényeges), akkor főtengelyrendszerben a feszültségek és elmozdulások kapcsolatai az alábbi módon fogalmazhatók meg:

$$\sigma_x = a\varepsilon_x + b\varepsilon_y + c\varepsilon_z$$

$$\sigma_y = a\varepsilon_y + b\varepsilon_z + c\varepsilon_x$$

$$\sigma_z = a\varepsilon_z + b\varepsilon_x + c\varepsilon_y$$

Itt az a, b és c paraméterek kapcsolják össze a különböző fizikai mennyiségeket.

A deformáció és feszültség kapcsolata (2)

Az izotrópia miatt b=c (az első index-szel szemben a másik kettő egyenrangú), így pl.

$$\sigma_x = (a-b)\varepsilon_x + b(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Az a és b együtthatók helyett szokás a

$$2\mu = a - b \qquad\qquad \lambda_L = b$$

jelöléseket használni. Az így bevezetett állandók közös összefoglaló neve: Lamè-állandók. A három egyenletre összefoglalva:

$$\sigma_i = 2\mu\varepsilon_i + \lambda_L(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (i = x, y, z)$$

A deformáció és feszültség kapcsolata (3)

A főtengelyrendszerről áttérve – kihasználva, hogy a feszültség-tenzor és a deformációtenzor szimmetrikus – kapjuk:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) \\ = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda_L\Theta$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) \\ = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda_L\Theta$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) \\ = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda_L\Theta$$

A deformáció és feszültség kapcsolata (4)

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu\varepsilon_{xy}\,,\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu\varepsilon_{yz}\,,\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{xz}$$

Zárt formulában összefoglalva:

$$\boxed{\hat{T} = 2\mu\hat{\boldsymbol{E}} + \lambda_L\Theta}$$

A rugalmas test mozgásegyenletei (1)

Szilárd testek esetén kis elmozdulásokat feltételezve:

$$\varrho \boldsymbol{a} = \varrho \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2}$$

A feszültségtenzor komponenseit kifejezzük az elmozdulás vektor komponenseivel:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = 2\mu\frac{\partial\xi}{\partial x} + \lambda_L\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A rugalmas test mozgásegyenletei (2)

Az x irányú elmozduláshoz tartozó mozgásegyenlet ezt követően úgy írható, hogy

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \varrho f_x$$

Behelyettesítés után:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu \Delta \xi + (\mu + \lambda_L) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \varrho f_x$$

A rugalmas test mozgásegyenletei (3)

Hasonlóan számolhatók ki az y és z irányú elmozdulásokhoz tartozó mozgásegyenlet:

$$\varrho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \mu\Delta\eta + (\mu+\lambda_L)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+\varrho f_y$$

$$\varrho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \mu\Delta\zeta + (\mu+\lambda_L)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+\varrho f_z$$

Itt a rövidítés végett célszerű bevezetni a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplace-operátort.

A rugalmas test mozgásegyenletei (4)

Az eredményeket egy zárt formulába összefoglalva írhatjuk. Ezt az egyenletet a rugalmas testek mozgásegyenletének nevezik:

$$\varrho \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} = \mu \Delta \boldsymbol{s} + (\mu + \lambda_L) grad\, div\, \boldsymbol{s} + \varrho \boldsymbol{f}$$

Gyakorlati okokból célszerűbb a Lamé-állandók helyett a Young-modulus és a Poisson-szám használata:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda_L)}{\mu + \lambda_L} \qquad \nu_P = \frac{\lambda_L}{2(\lambda_L + \mu)}$$

Egy speciális eset

Tételezzük fel, hogy nem hatnak tömegerők (f = 0) és a deformációból eredő jelterjedés x tengely irányú. Ekkor a

$$\frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial z}$$

parciális deriváltak zérusok, így a fenti mozgásegyenletek az alábbi alakokra egyszerűsödnek:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda_L)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad \varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

Milyen mozgást írnak le ezek az egyenletek?

Síkhullámok végtelen kiterjedésű, szilárd izotróp közegekben (1)

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda_L) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

longitudinális hullám

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

transzverzális hullám

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

transzverzális hullám

Síkhullámok végtelen kiterjedésű, szilárd izotróp közegekben (2)

Két új együttható bevezetésével

$$c_1^2 = \frac{2\mu + \lambda_L}{\varrho}$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}$$

alakilag egyforma egyenleteket kapunk! →

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A hullámegyenlet általános alakja

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

vagy

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Térbeli problémák esetén:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) = c^2 \Delta\psi$$

Laplace-operátor:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

A hullámegyenlet általános megoldásai

$$\psi(x,t) = f(t-\frac{x}{c})$$

vagy

$$\psi(x,t) = f(t+\frac{x}{c})$$

Az f tetszőleges függvény!

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A hullámegyenlet megoldásának fizikai jelentése – síkhullámok (1)

A t_1 időben az x_1 helyen keltett zavarra érvényes:

$$f\left(t_1 - \frac{x_1}{c}\right)$$

Ez a zavar az x_2 helyen

$$t' = \frac{x_2 - x_1}{c}$$

idővel később jelenik meg, azaz a $t_2 = t_1 + t'$ időben.

A hullámegyenlet megoldásának fizikai jelentése – síkhullámok (2)

Az

$$f\left(t_2 - \frac{x_2}{c}\right) = f\left(t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c} - \frac{x_2}{c}\right) = f\left(t_1 - \frac{x_1}{c}\right)$$

összefüggés miatt egy „+" (növekvő x) irányban terjedő hullám. Az

$$f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

megoldás pedig egy „–" (csökkenő x) irányba terjedő hullám.

Harmonikus hullám

A harmonikus vagy szinuszos síkhullám, amely térben és időben egyaránt periodikus:

$$\psi(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\right]$$

A: amplitúdó

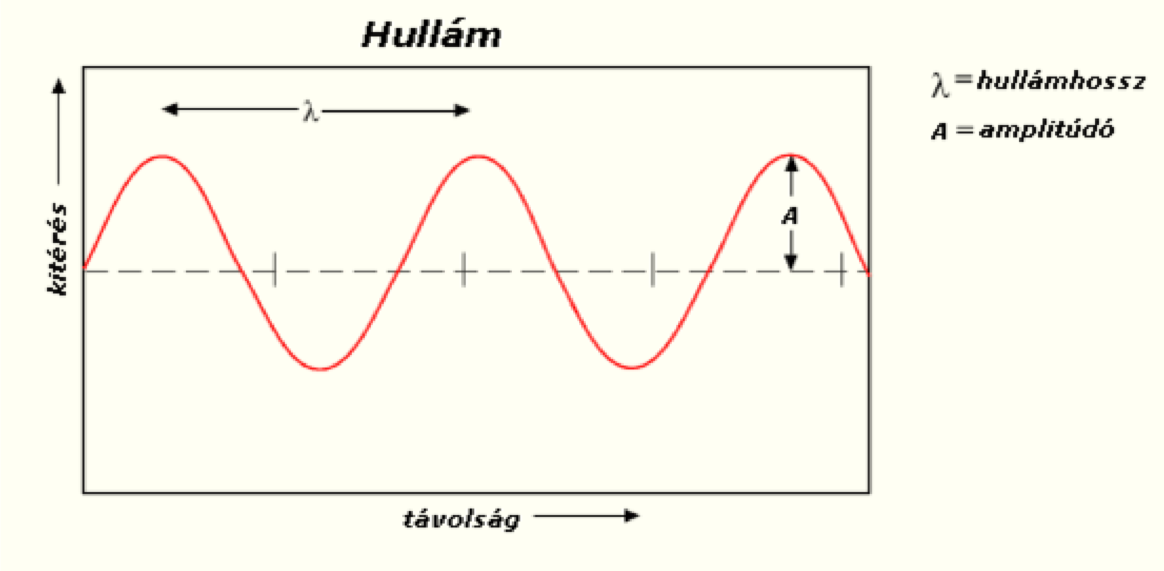
ω: körfrekvencia

c: terjedési sebesség

δ: kezdő fázis

Hullámtani alapfogalmak

Hullámforrás: ahol a rezgés kialakul. A hullámforrás rezgését a környező tér részecskéi átveszik, de késve követik azt → fáziskésés.
A mechanikai hullámokkal energia és impulzus terjed tovább.



fázis: a hullám adott pontjának mozgásállapota (Síkhullámoknál hullámfrontot, térbeli hullámoknál hullámfelületet alkotnak az azonos fázisú pontok.)
hullámhossz (λ): az egymás melletti azonos fázisú pontok távolsága
a hullám terjedési sebessége (c): a rezgés fázisának terjedési sebessége, nem egyezik meg a hullámban mozgó részecskék sebességével a hullámforrás rezgésének periódusideje alatt a hullám egy hullámhossznyi távolságot tesz meg

A hullámtani mennyiségek közötti fontos matematikai összefüggések

c: terjedési sebesség
λ : hullámhossz
T: periódus idő
f vagy ν : frekvencia
ω: körfrekvencia
k: hullámszám

$$\lambda = cT$$

$$f = \nu = \frac{1}{T}$$

$$c = \lambda \nu$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

$$k = \frac{1}{\lambda}$$

A hullámok terjedési sebessége a mérhető fizikai mennyiségekkel kifejezve

A longitudinális hullám sebessége:

$$c_{long} = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda_L}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu_P)}{\rho(1+\nu_P)(1-2\nu_P)}}$$

A transzverzális hullám sebessége:

$$c_{transzv} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu_P)}}$$

Itt a μ és λ_L a két Lamé-állandó, E a Young-modulus, ν_P a Poisson szám!

http://www.vilaglex.hu/Lexikon/Html/Hullam.htm

Rugalmas hullámok sebessége vasban (1)

sűrűség:

$$\rho = 7850\ kg/m^3$$

Young-modulus:

$$E = 2 \times 10^{11}\ Pa$$

Poisson-szám:

$$\nu_P = 0{,}29$$

longitudinális sebesség:

$$c_{long} = 5800\ m/s$$

transzverzális sebesség:

$$c_{transzv} = 3150\ m/s$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Rugalmas hullámok sebessége vasban (2)

Ha a haránt irányú kontrakció elhanyagolható ($\nu_P = 0$), akkor

$$c_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

A vas esetében:

$$c_{long} = 5050\ m/s$$

Kisebb mint a transzverzális hullámok jelenléte esetén!

Hullámok térben → gömbhullámok (1)

A Laplace-operátor alakja 3D-ben gömbszimmetrikus esetre szorítkozva:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

Ezzel a hullámegyenlet:

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)}$$

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/dopplereff_hu.htm

Hullámok térben → gömbhullámok (2)

Ennek megoldása:

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

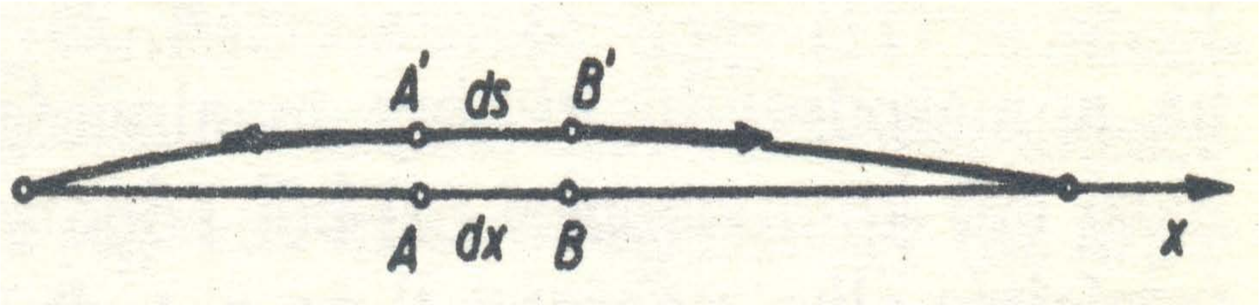
„kifutó” hullám

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

„befutó” hullám

A húr rezgése

Az F erővel feszített q keresztmetszetű húr kezdetben az x tengelyre rásimulva nyugalomban van. Tekintsünk két egymáshoz közeli pontot a húron:



$$A(x,0,0) \qquad B(x+dx,0,0)$$

A húrt megfeszítve a pontok elmozdulnak:

$$A'(x+\xi,\eta,\zeta) \qquad B'\left(x+dx+\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}dx,\eta+\frac{\partial\eta}{\partial x}dx,\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial x}dx\right)$$

A húr longitudinális rezgése (1)

A megnyúlt húrdarab hossza:

$$ds \approx (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x})dx$$

A relatív megnyúlás:

$$\frac{ds - dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Ezért az A' helyen ébred egy F' erő a „-" irányban a megnyúlásnak megfelelően:

$$F' = Eq\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A húr longitudinális rezgése (2)

A B’ pontban ébredő F” erő „+” irányban:

$$F'' = Eq\frac{\partial \xi}{\partial x} + Eq\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx$$

A két erő eredője dF = F”-F’, amely a gyorsulással mozgatja a dm tömegű húrdarabot. (Newton II. axiómája!)

$$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$dm = \rho q dx$$

A húr longitudinális rezgése (3)

Ekkor a húr x irányú (hosszanti) elmozdulásának mozgásegyenlete egy hullámegyenlet. A kialakuló hullám longitudinális.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Az egyenletből a hullám terjedése közvetlenül leolvasható:

$$c_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ezt összevethetjük egy korábbi eredménnyel!

A húr transzverzális rezgése

Hasonló meggondolásokkal a haránt irányú rezgések is leszármaztathatók. A kapott hullámegyenletek és a terjedési sebesség:

y irányú kitérésre

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

z irányú kitérésre

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

Itt σ a húrbeli feszültség:

$$\sigma = \frac{F}{q}$$

$$c_{transzv} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Hullámok szuperpozíciója

A szuperpozíció elve: Lineáris rendszerekre megfogalmazható általános elv, amely a hullámok esetén azt mondja ki, hogy egy adott pontban a kölcsönható hullámok kitéréseinek algebrai összege eredményezi az eredő hullám kitérését.

Pl. az y_1 és y_2 harmonikus hullámok esetére:

$$y_1 = A_1 \sin\left(\omega_1 t - k_1 x_0 + \delta_1\right)$$

$$y_2 = A_2 \sin\left(\omega_2 t - k_2 x_0 + \delta_2\right)$$

Az eredő hullám az adott pontban:

$$y = y_1 + y_2$$

Interferencia

Definíció:

Interferencia: Olyan hullámtani jelenség, amely akkor következik be, ha két különböző forrású koherens hullám találkozik. A találkozó rezgések fázisától függően a hullámok szuperpozíciójának eredménye lehet erősítés vagy gyengítés, esetleg teljes kioltás attól függően, hogy a hullámok azonos vagy ellentétes fázisban találkoznak.

Definíció:

Koherencia: hullámok közötti viszony. Két azonos frekvenciájú hullám akkor mondható koherensnek (összetartozónak), ha fáziskülönbségük egy adott helyen időben állandó.

Ha két koherens hullám találkozásáról beszélünk , akkor a hullámok olyanok, amelyek fáziskülönbsége állandó. Következésképp csak az azonos frekvenciájú hullámok képesek interferenciára.

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/interference_hu.htm

ÁLLÓHULLÁM

Definíció:

Az állóhullámok egymással szemben haladó egyenlő amplitúdójú, frekvenciájú és polaritású hullámok interferenciája esetén fellépő jelenség.

A kialakult állóhullám két alapvető jellegzetessége kísérletileg is megfigyelhető. http://www.walter-fendt.de/ph14hu/stwaverefl_hu.htm

Az egyik az, hogy pl. a rezgő test különböző részei nem egymás után, hanem egyszerre végzik *rezgésüket.*

A másik jellegzetesség az amplitúdó-eloszlásnál figyelhető meg. Bizonyos pontok nyugalomban vannak (ezek a *csomópontok), ill. elektromágneses hullámok esetén a csomópontokban zérus az elektromágneses* tér, mások pedig maximális kitéréssel végzik rezgésüket (ezek a *duzzadási helyek).*

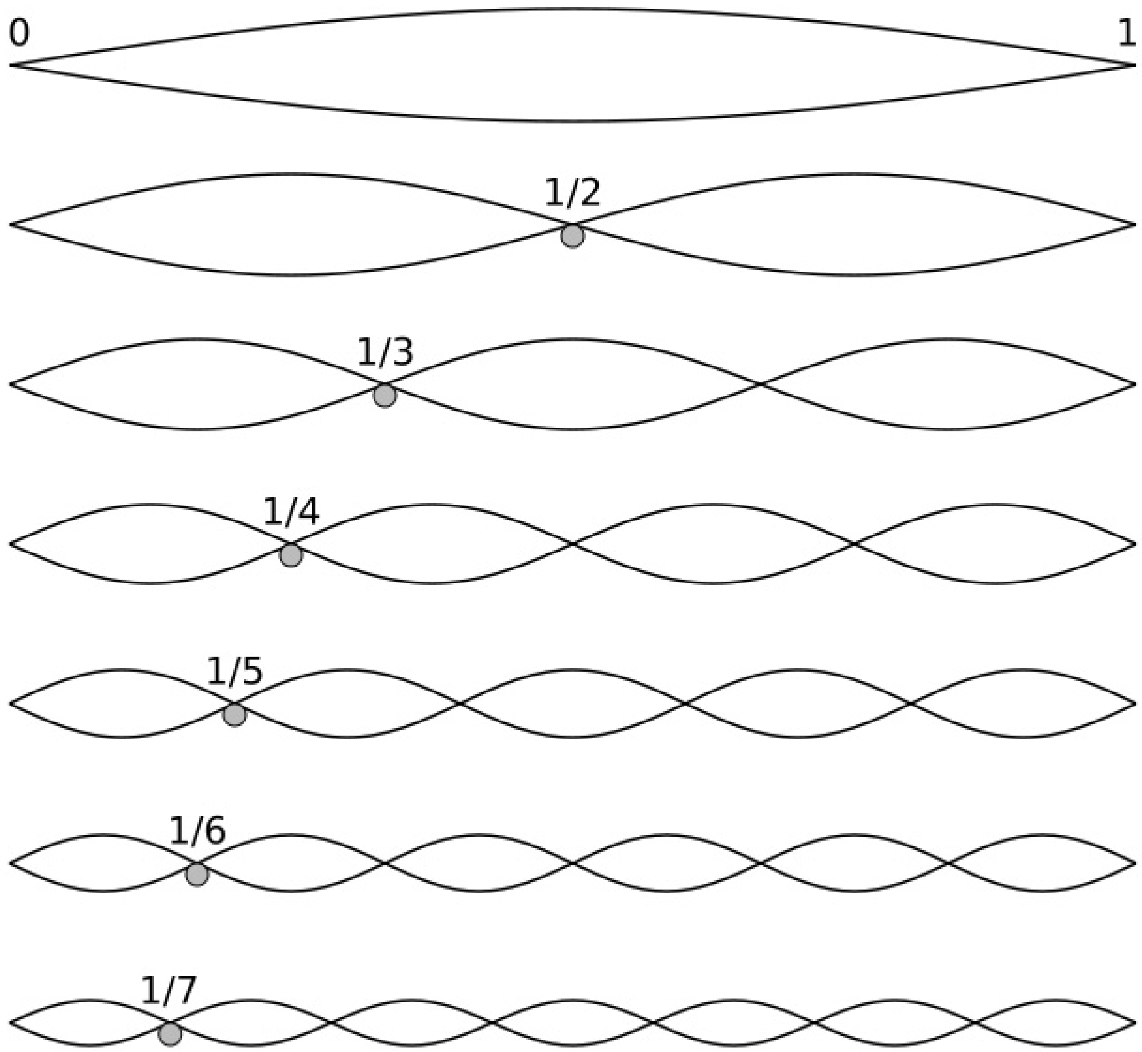
*(*Pl. egy nagyobb teljesítményű állóhullámú antenna csomópontjait akár meg is lehet fogni, de a duzzadási helyek érintése áramütéssel járhat, tehát életveszélyes.)

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/stlwaves_hu.htm http://www.tests.hu/show/159/F-C-C

Állóhullámok rezgő húron (1)

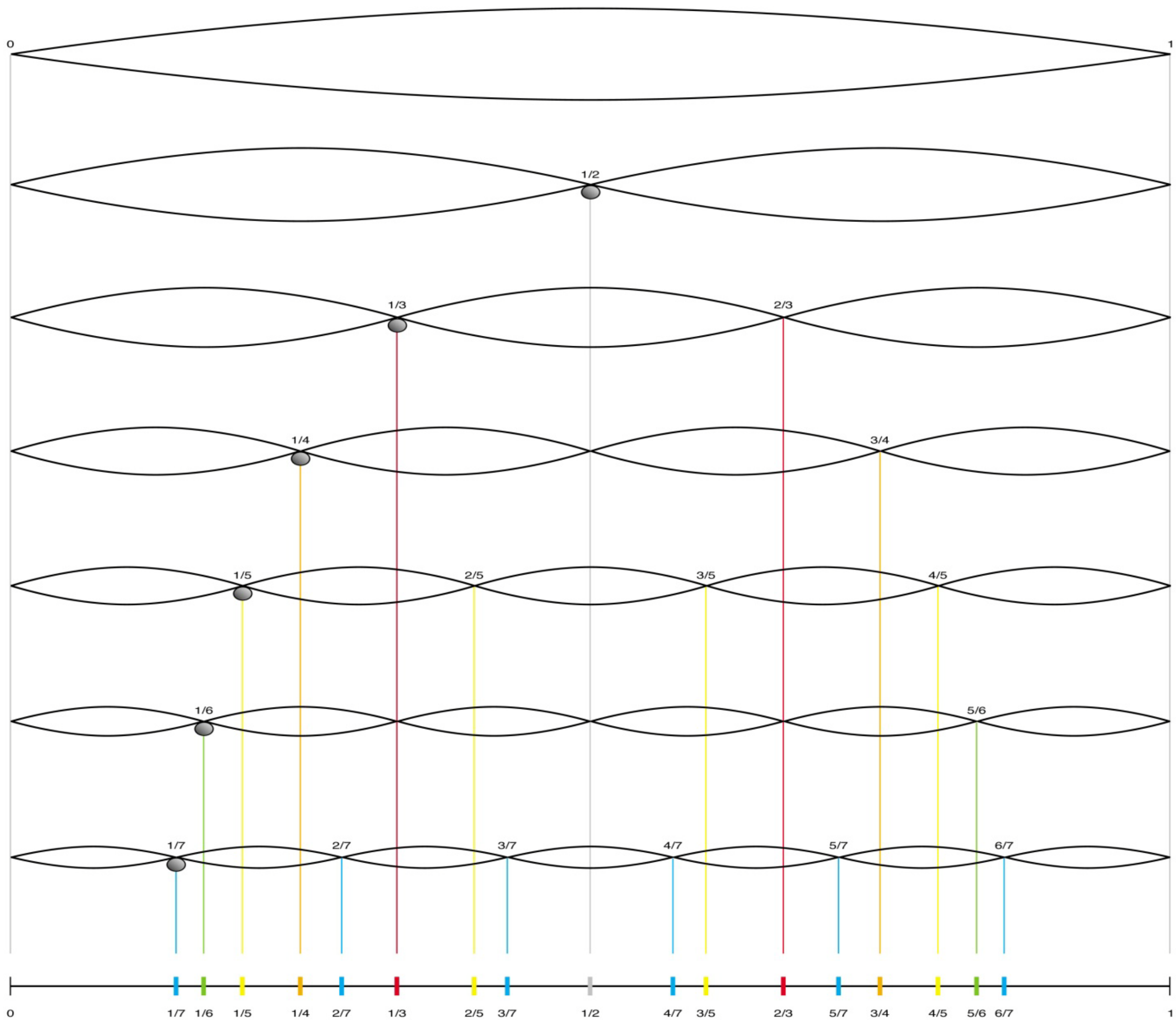
Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Állóhullámok rezgő húron (2)



Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Állóhullámok rezgő húron (3)



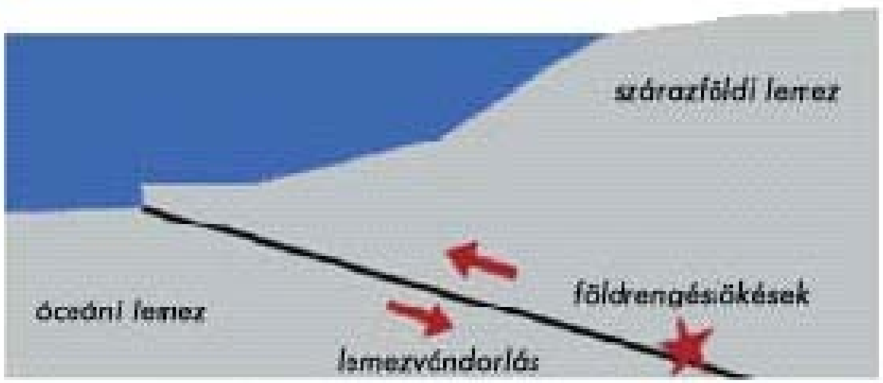
http://www.illyes-bors.sulinet.hu/uj/oktatas/tantargyak/Fizika/Fejezetek/Hullamtan/113-1/allohull.htm

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

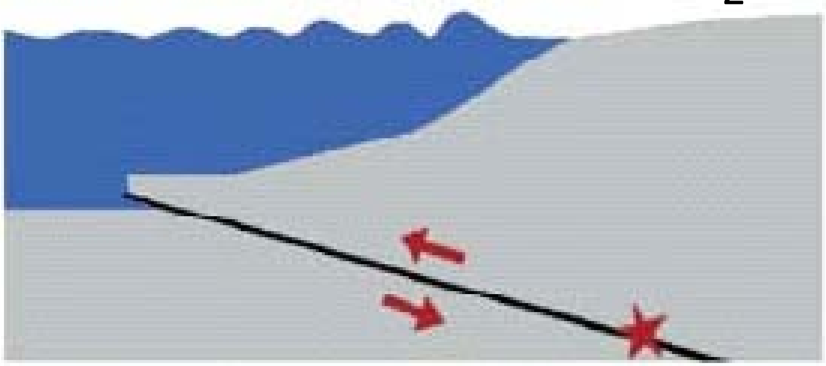
Szökőár

A szökőár (cunami) születése

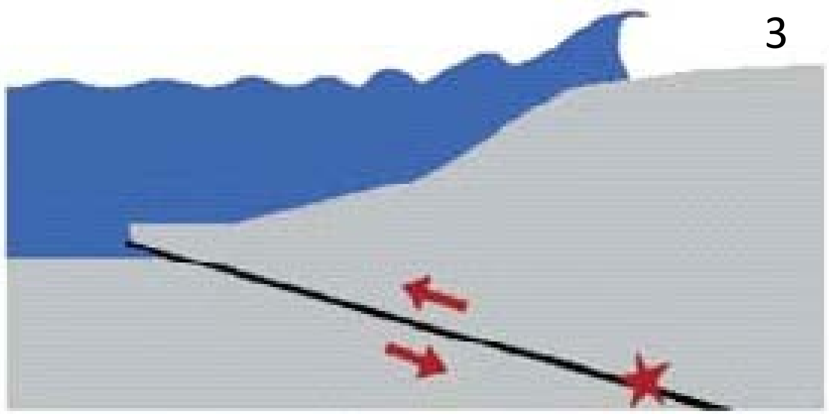
1



2



3



Óriáshullámok

Az óriáshullámok a nyílt (tengeri, óceáni) vizeken jelennek meg. Óriáshullámnak a 25 méternél magasabb hullámokat nevezik. Kialakulásukban a hullámok szuperpozíciója mindenképp fontos szerepet játszik. Elméleti számítások szerint maximális magasságuk 60 méter körül lehet. A megfigyelt óriáshullámok átlagosan 30 méter magasak voltak.

Fourier-soros vagy Bernoulli-féle megoldás (1)

Feladat:

Egy húr fekszik az x=0 és x=l pontok között. A végpontok rögzítése mellett keressük a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

hullámegyenlet megoldását, amikor már kialakultak az állóhullámok.

Fourier-soros vagy Bernoulli-féle megoldás (2)

Keressük a megoldást $\psi(x,t) = U(x)V(t)$

alakban. A hullámegyenletbe történő behelyettesítés után az U és V függvények szeparálhatók:

$$\frac{U''}{U} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{V}}{V}$$

Itt a *vessző* helyszerinti, a *pont* időszerinti deriváltat jelent.

A két oldal külön-külön ugyanazzal a konstanssal kell egyenlő legyen. A konstanst $-k^2$ –nek választva írható:

$$U'' = -k^2 U \qquad \ddot{V} = -k^2 c^2 V$$

Harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenletei!

Fourier-soros vagy Bernoulli-féle megoldás (3)

Megoldás az U-ra: $U(x) = A\,sin\,kx + B\cos kx$

A határfeltételeket figyelembe vételével:

$$k = k_n = n\frac{\pi}{l}$$

Megoldás az V-ra:

$$V(t) = C\sin kct + D\cos kct$$

$k_n ct = 2\pi v_n t$ amivel $v_n = n\frac{c}{2l}$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A rezgő húron kialakuló állóhullámok lehetséges hullámhosszai

$$\lambda_n = \frac{c}{\nu_n} = \frac{2l}{n}$$

vagy

$$l = n\,\frac{\lambda_n}{2}$$

Azaz a húron csak a fél hullámhossz egész számú többszörösei jelenhetnek meg ! (lásd az „Állóhullámok rezgő húrokon” képeket)

Kérdések

Mit állít Helmholtz tétele?
Mi a kontinuumok általános mozgásegyenlete (Cauchy-féle mozgásegyenlet). A mechanika mely axiómája van kiterjesztve e mozgásegyenletben? Milyen két nagy csoportra osztjuk az erőket e leírásban?
A kontinuumok általános mozgásegyenlete a feszültségeket (feszültség tenzort) tartalmazza. Milyen lépéseket kell tenni, hogy a mozgásegyenlet megoldható legyen? (→ a feszültségek helyett az elmozdulásokkal kapcsolatos deformáció tenzort kell bevezetni a leírásba)
Milyen a feszültségtenzor és a defomációtenzor kapcsolata?
Homogén izotróp test esetén hány rugalmassági állandóra van szükségünk a mozgás leírásához?
Hogy néz ki a rugalmas kontinuumok mozgásegyenlete?
Mi a hullámegyenlet általános alakja?

Kérdések (2)

Mi a hullámegyenlet általános megoldása síkhullámok és gömbhullámok esetén?
Milyen hullámok terjedhetnek rugalmas kontinuumokban?
Mi a harmonikus hullám?
Mit mond ki a szuperpozíció elve?
Hogyan alakulnak ki az állóhullámok?
Milyen a visszavert hullám fázisa a beeső hulláméhoz képest szabad illetve rögzített vég esetén?
Mi a Fourier-soros (Bernoulli) megoldás alapgondolata és főbb lépései?

(folyt. köv.) (A ilyen színnel írt kérdések a mélyebben érdeklődők részére vannak.)