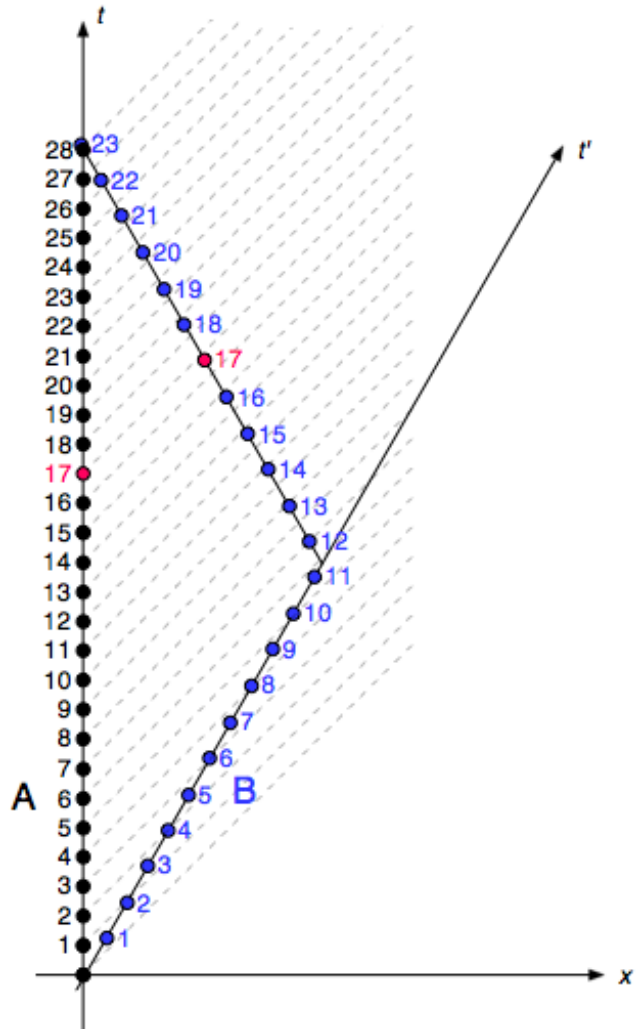
IKERPARADOXON VIDEÓÜZENETTEL

Van két iker, A és B. A az űrállomáson marad, B oda-vissza utat tesz meg az űrhajóján v = áll. sebességgel (a visszafordulás pillanatszerű). Az egész oda-vissza út T_A ideig tart A óráján (B óráján pedig T'_B ideig).

A feladatban adott T_A és v (vagy T'_B és v).

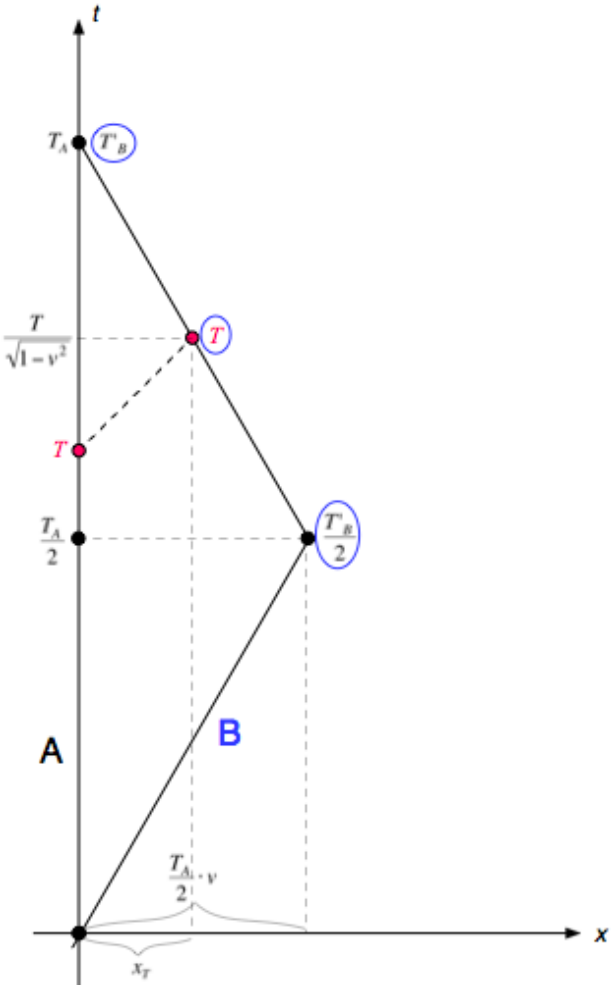
A a teljes kísérlet minden napján videóblogot vesz fel magáról. Az egyik videóblogot (fénysebességgel) B után szeretné küldeni, mégpedig azt, amelyen ő éppen annyi idős, amennyi B lesz akkor, amikor a videóüzenetet megkapja és megnézi. Másképpen megfogalmazva: A melyik videóblogját küldje el – még aznap – B-nek, ha azt akarja, hogy az üzeneten B annyi idősnek lássa A-t, amennyi ő (B) is éppen akkor?

Az 1. ábra egy konkrét eset Minkowski-diagramját mutatja, amelyben $T_A = 28$ év, $v = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ez utóbbi összhangban van azzal, hogy B világvonalát 60°-os egyenes ábrázolja). Az ábrából leolvasható, hogy (A óráján) kb. $T = 17$ évvel az indulás után kell a feladatnak megfelelő videóüzenetet elküldeni.



1. ábra

T kiszámítása a 2. ábra Minkowski-diagramjából egyszerű geometriai megfontolásokkal adódik. Arra kell csak vigyázni, hogy az ábrán szereplő távolságokat ne euklideszi értelemben használjuk, hanem vegyük figyelembe a Minkowski-geometria sajátosságait – pl. az időtágulatot –, úgy ahogy pl. már az 1. ábra időtengelyeinek kalibrációja is mutatta.



2. ábra

A 2. ábrán a B által mért időértékek kék keretben szerepelnek. A kék keretben nem szereplő adatokat A inerciarendszere méri.

Írjuk fel az x_T távolságot kétféle módon (ez az a távolság, amelyre A-tól B elhelyezkedik – A nyugalmi rendszerében mérve –, amikor a videóüzenetet megkapja). Először úgy, mint a fényjel által megtett utat:

$$x_T = \frac{T}{\sqrt{1-v^2}} - T \qquad (1)$$

másodszor pedig mint B eredő elmozdulását:

$$x_T = \frac{T_A}{2} \cdot v - \left(\frac{T}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{T_A}{2} \right) \cdot v \qquad (2)$$

Az (1) és (2) jobb oldalait egyenlővé téve, és az így kapott egyenletet T-re megoldva a

$$T = T_A \cdot \frac{v\sqrt{1-v^2}}{1-\sqrt{1-v^2}+v} \qquad (3)$$

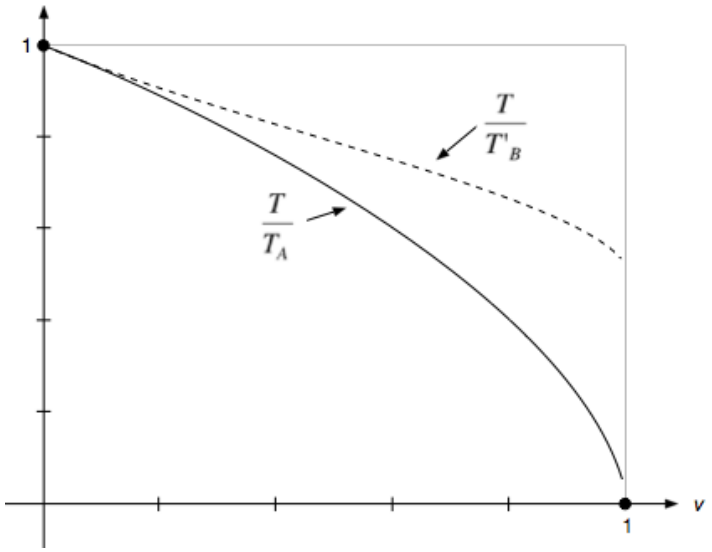
eredmény adódik. <u>Ezzel a feladatot megoldottuk.</u>

Figyelembe véve a T_A és T'_B között érvényes $T'_B = T_A\sqrt{1-v^2}$ időtágulatot, T kifejezhető a B óráján eltelt teljes időtartammal is:

$$T = T'_B \cdot \frac{v}{1-\sqrt{1-v^2}+v} \qquad (4)$$

Megjegyzés: Kicsit módosul az ábra kinézete, ha $T < \frac{T_A}{2}$, azaz ha a T a $\frac{T_A}{2}$ alá kerül a függőleges tengelyen. Az (1) és (2) egyenletek azonban ekkor is változatlan formában igazak.

A 3. ábra a (3) és (4) képleteket mutatja v függvényében.



3. ábra

További részletekre is legyünk kiváncsiak.

Tegyük fel, hogy A nem csak a feladat követelményeit teljesítő egyetlen videóüzenetet küldi el B-nek, hanem az összes videóblogját minden nap. Hogyan látja B ezeken a videóblogokon öregedni A-t?

A klasszikus mechanika szerint, mivel B az útja során mindig valamekkora távolságra van A-tól, és annak a távolságnak a megtételéhez a fénynek időre van szüksége, B a teljes út során saját magánál fiatalabbnak látja A-t a videóüzeneteken. Amíg távolodik A-tól, addig saját magánál lassabb tempóban látja öregedni ikertestvérét (ez érthető akkor, ha meggondoljuk, hogy A napi üzenetei nem naponta, hanem annál ritkább időközönként jutnak el hozzá). Visszaút alatt A-nak a videóblogokon követhető öregedése felgyorsul (napi üzenetei kevesebb mint 24 órás periódusidővel érkeznek meg B-hez). Mire az ikrek ismét találkoznak, A-nak a videóblogokon látható öregedése „utóléri“ B öregedését, és találkozáskor a két testvér pontosan ugyanannyi idősnek látja egymást. Ez összhangban van a 3. ábrával, amelyről leolvasható, hogy a klasszikus határesetben ($v << 1$) $T \approx T_A \approx T'_B$, tehát B éppen az újra találkozáskor (az „utolsó videóüzeneten“) látja saját magával azonos korúnak testvérét.

A helyes, relativisztikus tárgyalás azonban általános esetben más eredményt ad. A mozgás kezdeti szakaszán B ismét saját magánál fiatalabbnak látja A-t a videóüzeneteken (a részleteket ld. később). Az újra találkozáskor azonban – ez éppen az ikerparadoxon jól ismert, meglepő eredménye – B lesz fiatalabb A-nál. Útközben tehát kellett lennie egy olyan videóüzenetnek, amelyen B saját magával egyező korúnak látta A-t. [Hogy ez mikor volt, éppen erre a kérdésre adnak választ a (3) és (4) képletek.]

Határozzuk meg a $t_{Avideo}(t'_B)$ függvényt, ahol t'_B a B kora (a „karóráján mutatott“ idő) akkor, amikor A adott videóüzenetét nézi, t_{Avideo} pedig a B által épp nézett videóüzeneten A kora (a videóüzeneten az ő „karóráján mutatott“ idő).

A 2. ábráról látható, hogy a fordulópontig (azaz $t'_B \le \frac{T'_B}{2}$-re) t'_B és t_{Avideo} között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$\left(t_{Avideo} + x_B\right)\sqrt{1-v^2} = t'_B, \tag{5}$$

ahol x_B a fordulópontig B által megtett út (A szerint), amelyre

$$x_B = vt_B = v\frac{t'_B}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{6}$$

(5) és (6) felhasználásával a keresett függvény $t'_B \le \frac{T'_B}{2}$-re vonatkozó szakasza:

$$t_{Avideo}\left(t'_B\right) = t'_B\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}. \qquad \left(t'_B \le \frac{T'_B}{2}\right) \tag{7}$$

Az (5)-(7) gondolatmenet voltaképpen az elektromágneses Doppler-effektus levezetése volt az egymástól távolodó fényforrás és megfigyelő esetére, a (7) képlet pedig maga a Doppler-formula.

A fordulópont után (azaz $t'_B > \frac{T'_B}{2}$-re) a visszafordulás utáni szakaszra ugyanilyen megfontolás alapján az egymáshoz közeledő forrásra és megfigyelőre vonatkozó Doppler-formula használandó. Ebből a keresett függvény $t'_B > \frac{T'_B}{2}$-re vonatkozó szakasza:

$$t_{Avideo}\left(t'_B\right) = \frac{T'_B}{2}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} + \left(t'_B - \frac{T'_B}{2}\right)\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}. \qquad \left(t'_B > \frac{T'_B}{2}\right) \tag{8}$$

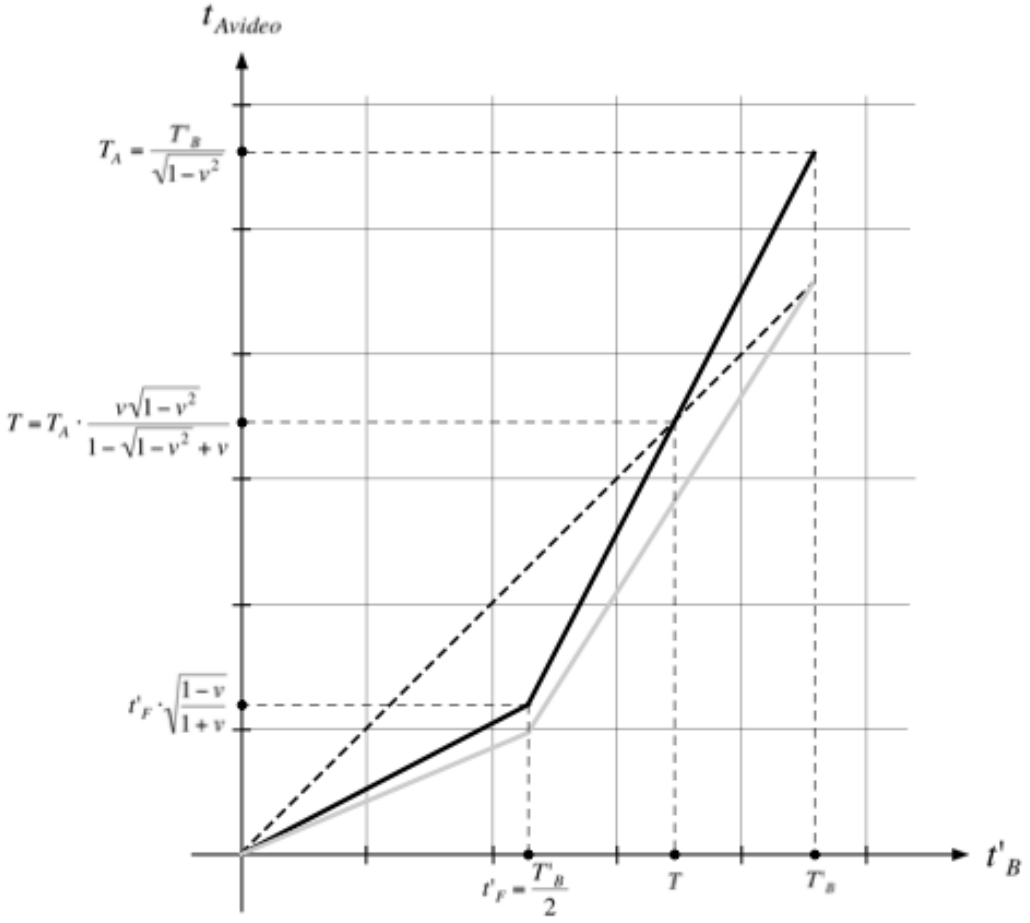
A teljes $t_{Avideo}\left(t'_B\right)$ függvény tehát [mint a fenti klasszikus gondolatmenet alapján is sejthető volt] egy 45°-nál lankásabb és egy annál meredekebb egyenes szakaszból áll, amelyek $t'_B = \frac{T'_B}{2}$-nél kapcsolódnak össze.

Ellenőrzésképpen nézzük meg, kiadja-e a (8) képlet a teljes ikerparadoxonra vonatkozó időtágulási eredményt. Ehhez helyettesítsük be (8)-ba az újra találkozásnak megfelelő $t'_B = T'_B$ értéket:

$$T_A = t_{Avideo}\left(t'_B = T'_B\right) = \frac{T'_B}{2}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} + \frac{T'_B}{2}\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \frac{T'_B}{\sqrt{1-v^2}}. \qquad (9)$$

(9) jobb és bal oldala valóban az ikerparadoxon teljes szakaszára vonatkozó időtágulási mutatja.

A 4. ábrán a (7) és (8) képletekkel adott $t_{Avideo}\left(t'_B\right)$ függvény látható [vastag folytonos vonal], $v = \frac{1}{\sqrt{3}}$-ra, azaz az 1. ábrán mutatott mozgás esetére. A 4. ábrából leolvasható a feladattal kapcsolatos összes lényegi információ.



4. ábra

Tanulságos felírni, milyen függvény adódik $t_{Avideo}(t'_B)$-re a klasszikus mechanikából.
Mivel ekkor az idődilatációról – hibásan – nem veszünk tudomást, az (5)-(7) levezetés így módosul:

$$(t_{Avideo} + x_B) = t'_B, \qquad \text{(5, klassz.)}$$

ahol

$$x_B = vt'_B, \qquad \text{(6, klassz.)}$$

és így

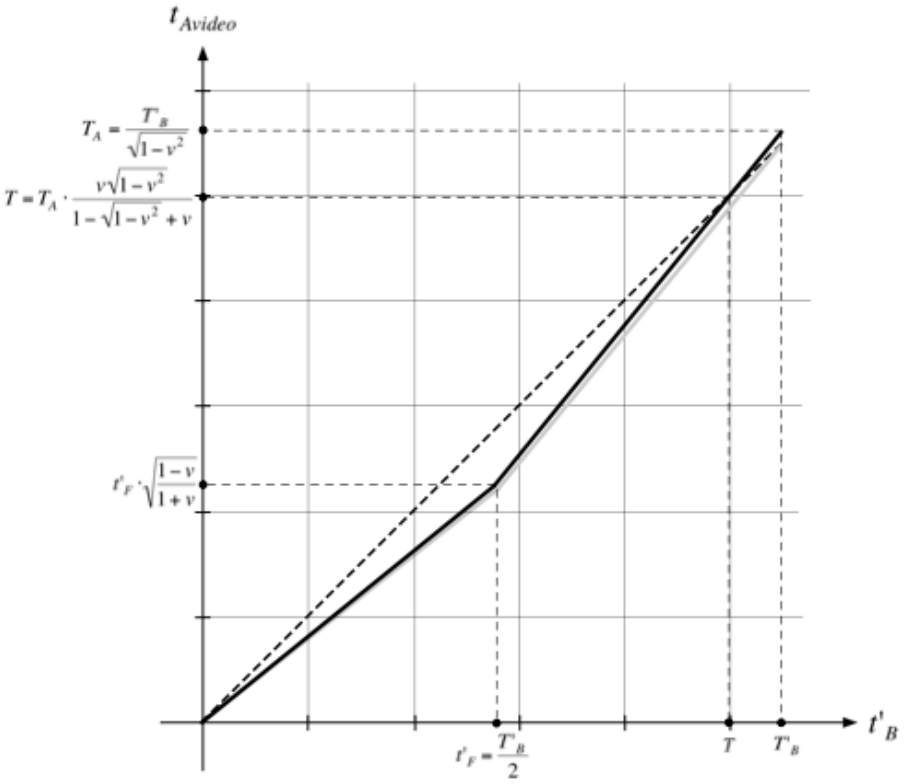
$$t_{Avideo}(t'_B) = t'_B \cdot (1 - v). \qquad (t'_B \le \frac{T'_B}{2}) \qquad \text{(7, klassz.)}$$

Ezzel voltaképpen visszakaptuk a klasszikus (hangtanból ismert) Doppler-effektus képletét, a „közeghez képest“ álló forrás és tőle távolodó megfigyelő esetére (valóban: klasszikusan a periodikus fény- és a hangjelek terjedését ugyanolyan törvények írják le). Érthető tehát, hogy a fordulópont után (azaz $t'_B > \frac{T'_B}{2}$-re) a visszafordulás utáni szakaszra az álló forrás és hozzá képest közeledő megfigyelő hangtani Doppler-formulája használandó. Ebből:

$$t_{Avideo}(t'_B) = \frac{T'_B}{2} \cdot (1 - v) + \left(t'_B - \frac{T'_B}{2}\right) \cdot (1 + v). \qquad (t'_B > \frac{T'_B}{2}) \quad \text{(8, klassz.)}$$

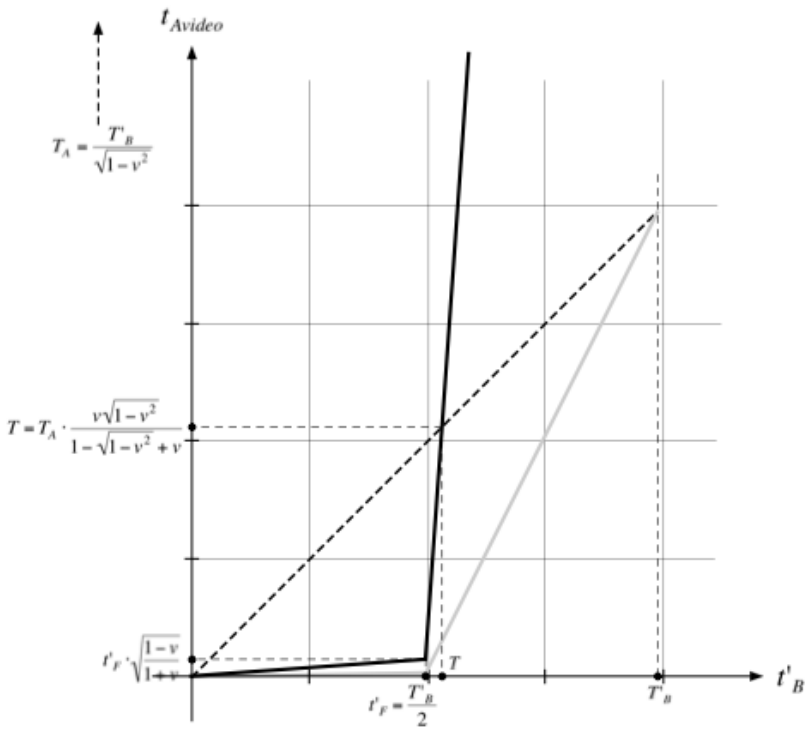
A klasszikus gondolatmenet is olyan $t_{Avideo}(t'_B)$ függvényhez vezet, amely egy 45°-nál lankásabb és egy annál meredekebb egyenes szakaszból áll, és ezek a $t'_B = \frac{T'_B}{2}$-nél kapcsolódnak össze. A 4. ábra szürke vonala ezt a klasszikus számolásból kapott függvényt mutatja. Újra találkozáskor tehát a klasszikus mechanika téves következtetése szerint A éppen annyi idős, mint B; ikerparadoxon nincs.

Az 5. ábrán a v=0.2 eset látható. Ennél a sebességnél a relativisztikus és a klasszikus eredmény kismértékben tér csak el (az időtágulási faktor értéke pl. $1/\sqrt{1-v^2} \approx 1.02$), mint az 5. ábrán látszik.



5. ábra

A 6. ábra a v=0.99 ultrarelativisztikus esetet mutatja. Ekkor a időtágulási faktor jelentősen eltér 1-től ($1/\sqrt{1-v^2} \approx 7$), és $T \approx \frac{T'_B}{2}$, összhangban a 3. ábrával.


t_{Avideo}
$T_A = \frac{T'_B}{\sqrt{1-v^2}}$
$T = T_A \cdot \frac{v\sqrt{1-v^2}}{1-\sqrt{1-v^2}+v}$
$t'_F \cdot \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$
T
$t'_F = \frac{T'_B}{2}$
T'_B
t'_B

6. ábra