

# Fizika feladatok

2015. október 10.

Ez a feladatgyűjtemény a villamosmérnök hallgatók korábbi jogos igényének megfelelően, nagy hiányt pótol. A kitűzött feladatok az I. féléves fizika tárgyának anyagához illeszkednek. Remélhetőleg érzékelhető segítséget jelent mind a hallgatók, mind a tárgyat oktatók számára, valamint hozzájárul az egységes oktatás megvalósításához. A gyűjteményben a \* jelzés a magasabb nehézségi szintű feladatokat jelöli, míg a \*\* -gal jelölt feladatokat a kihívásokat kedvelő megoldóknak ajánljuk. A feladatgyűjtemény folyamatosan bővül új feladatokkal és megoldásokkal. Javaslatokat új feladatokra, valamint megoldásokra és egyéb észrevételeket szívesen látunk. (Szerk.: Márkus Ferenc, Rakyta Péter, Krafcsik Olga, Barócsi Attila, Sólyom András, Gilyén András, Márkus Bence Gábor, Gambár Katalin)

# Tartalomjegyzék

<b>1. Feladatok a kinematika tárgyköréből</b>	<b>13</b>
Tömegpontok mozgása egyenes mentén . . . . .	13
1.1. Feladat . . . . .	13
1.2. Feladat . . . . .	13
1.3. Feladat . . . . .	13
1.4. Feladat . . . . .	14
1.5. Feladat . . . . .	14
1.6. Feladat . . . . .	15
1.7. Feladat . . . . .	15
1.8. Feladat . . . . .	16
1.9. Feladat . . . . .	17
1.10. Feladat . . . . .	18
1.11. Feladat . . . . .	19
1.12. Feladat . . . . .	19
1.13. Feladat . . . . .	20
1.14. Feladat . . . . .	20
1.15. Feladat . . . . .	22
1.16. Feladat . . . . .	22
1.17. Feladat . . . . .	23
Tömegpontok síkbeli mozgása . . . . .	24
1.18. Feladat . . . . .	24
1.19. Feladat . . . . .	25
1.20. Feladat . . . . .	25
1.21. Feladat . . . . .	26
1.22. Feladat . . . . .	27
1.23. Feladat . . . . .	28
1.24. Feladat . . . . .	29
1.25. Feladat . . . . .	29
1.26. Feladat . . . . .	30
1.27. Feladat . . . . .	30
1.28. Feladat . . . . .	31
1.29. Feladat . . . . .	32
1.30. Feladat . . . . .	32
1.31. Feladat . . . . .	33



1.32. Feladat . . . . .	34
1.33. Feladat . . . . .	35
Tömegpontok síkbeli mozgása . . . . .	36
1.34. Feladat . . . . .	36
<b>2. Feladatok körmozgás tárgyköréből</b>	<b>36</b>
Kerületi sebesség . . . . .	36
2.1. Feladat . . . . .	36
2.2. Feladat . . . . .	37
Szöggyorsulás . . . . .	37
2.3. Feladat . . . . .	37
2.4. Feladat . . . . .	38
Centripetális és tangenciális gyorsulások . . . . .	39
2.5. Feladat . . . . .	39
2.6. Feladat . . . . .	40
2.7. Feladat . . . . .	41
2.8. Feladat . . . . .	41
<b>3. Feladatok a dinamika tárgyköréből</b>	<b>42</b>
Newton három törvénye . . . . .	42
3.1. Feladat . . . . .	42
3.2. Feladat . . . . .	43
3.3. Feladat . . . . .	43
3.4. Feladat . . . . .	44
Centripetális erő . . . . .	45
3.5. Feladat . . . . .	45
3.6. Feladat . . . . .	45
3.7. Feladat . . . . .	46
3.8. Feladat . . . . .	47
3.9. Feladat . . . . .	48
Súrlódási erő . . . . .	49
3.10. Feladat . . . . .	49
3.11. Feladat . . . . .	50
3.12. Feladat . . . . .	50
3.13. Feladat . . . . .	50
3.14. Feladat . . . . .	51
3.15. Feladat . . . . .	52

3.16. Feladat . . . . .	52
3.17. Feladat . . . . .	53
3.18. Feladat . . . . .	54
3.19. Feladat . . . . .	55
3.20. Feladat . . . . .	55
3.21. Feladat . . . . .	56
3.22. Feladat . . . . .	57
3.23. Feladat . . . . .	58
3.24. Feladat . . . . .	58
Közegellenállási erők . . . . .	59
3.25. Feladat . . . . .	59
3.26. Feladat . . . . .	60
3.27. Feladat . . . . .	60
3.28. Feladat . . . . .	62
<b>4. Feladatok munkavégzés és konzervatív erők tárgyköréből. Munkatétel</b>	<b>63</b>
Munkavégzés . . . . .	63
4.1. Feladat . . . . .	63
4.2. Feladat . . . . .	64
4.3. Feladat . . . . .	64
4.4. Feladat . . . . .	65
4.5. Feladat . . . . .	65
4.6. Feladat . . . . .	66
4.7. Feladat . . . . .	67
4.8. Feladat . . . . .	68
4.9. Feladat . . . . .	69
Munkatétel . . . . .	69
4.10. Feladat . . . . .	69
4.11. Feladat . . . . .	70
4.12. Feladat . . . . .	71
4.13. Feladat . . . . .	72
Munkavégzés konzervatív erőterben. Potenciális energia . . . . .	72
4.14. Feladat . . . . .	72
4.15. Feladat . . . . .	73
4.16. Feladat . . . . .	74
4.17. Feladat . . . . .	75

4.18. Feladat . . . . .	75
4.19. Feladat . . . . .	76
Energiatétel . . . . .	77
4.20. Feladat . . . . .	77
4.21. Feladat . . . . .	78
<b>5. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből</b>	<b>79</b>
Centrifugális erő . . . . .	79
5.1. Feladat . . . . .	79
5.2. Feladat . . . . .	80
5.3. Feladat . . . . .	81
Coriolis-erő . . . . .	82
5.4. Feladat . . . . .	82
5.5. Feladat . . . . .	82
5.6. Feladat . . . . .	83
5.7. Feladat . . . . .	83
5.8. Feladat . . . . .	84
<b>6. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből</b>	<b>84</b>
Impulzustétel . . . . .	84
6.1. Feladat . . . . .	85
6.2. Feladat . . . . .	85
6.3. Feladat . . . . .	86
6.4. Feladat . . . . .	86
Impulzusmegmaradás törvénye . . . . .	87
6.5. Feladat . . . . .	87
Rugalmatlan ütközések . . . . .	88
6.6. Feladat . . . . .	88
6.7. Feladat . . . . .	88
6.8. Feladat . . . . .	89
6.9. Feladat . . . . .	90
6.10. Feladat . . . . .	90
6.11. Feladat . . . . .	91
6.12. Feladat . . . . .	92
Rugalmas ütközések . . . . .	93
6.13. Feladat . . . . .	93
6.14. Feladat . . . . .	94

6.15. Feladat . . . . .	94
6.16. Feladat . . . . .	96
6.17. Feladat . . . . .	97
Rugalmas ütközések . . . . .	97
6.18. Feladat . . . . .	97
Folytonos közegek impulzusváltozása . . . . .	98
6.19. Feladat . . . . .	98
6.20. Feladat . . . . .	98
6.21. Feladat . . . . .	99
6.22. Feladat . . . . .	100
6.23. Feladat . . . . .	100
6.24. Feladat . . . . .	101
<b>7. Feladatok a gravitációs erő tárgyköréből. Kepler törvényei</b>	<b>102</b>
Centrális erőter. Potenciális energia . . . . .	102
7.1. Feladat . . . . .	102
7.2. Feladat . . . . .	103
7.3. Feladat . . . . .	103
7.4. Feladat . . . . .	104
7.5. Feladat . . . . .	104
7.6. Feladat . . . . .	105
7.7. Feladat . . . . .	105
7.8. Feladat . . . . .	106
7.9. Feladat . . . . .	107
Kepler törvényei . . . . .	107
7.10. Feladat . . . . .	107
<b>8. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből</b>	<b>108</b>
Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel . . . . .	108
8.1. Feladat . . . . .	109
8.2. Feladat . . . . .	109
8.3. Feladat . . . . .	110
8.4. Feladat . . . . .	111
8.5. Feladat . . . . .	112
8.6. Feladat . . . . .	113
8.7. Feladat . . . . .	114
8.8. Feladat . . . . .	115

8.9. Feladat . . . . .	115
8.10. Feladat . . . . .	116
8.11. Feladat . . . . .	117
8.12. Feladat . . . . .	118
8.13. Feladat . . . . .	119
8.14. Feladat . . . . .	120
8.15. Feladat . . . . .	121
Impulzusmomentum megmaradása . . . . .	122
8.16. Feladat . . . . .	122
8.17. Feladat . . . . .	124
Forgási energia . . . . .	125
8.18. Feladat . . . . .	125
8.19. Feladat . . . . .	126
8.20. Feladat . . . . .	126
<b>9. Feladatok a rezgőmozgás és a mechanikai hullámok tárgyköréből</b>	<b>127</b>
Harmonikus rezgőmozgás . . . . .	127
9.1. Feladat . . . . .	127
9.2. Feladat . . . . .	128
9.3. Feladat . . . . .	128
9.4. Feladat . . . . .	129
9.5. Feladat . . . . .	129
9.6. Feladat . . . . .	130
9.7. Feladat . . . . .	131
9.8. Feladat . . . . .	131
9.9. Feladat . . . . .	132
9.10. Feladat . . . . .	132
9.11. Feladat . . . . .	134
9.12. Feladat . . . . .	135
9.13. Feladat . . . . .	136
9.14. Feladat . . . . .	137
9.15. Feladat . . . . .	137
9.16. Feladat . . . . .	138
Csillapodó és gerjesztett rezgések . . . . .	138
9.17. Feladat . . . . .	139
9.18. Feladat . . . . .	140

Rugalmas közegekben terjedő hullámok . . . . .	140
9.19. Feladat . . . . .	140
9.20. Feladat . . . . .	140
9.21. Feladat . . . . .	141
9.22. Feladat . . . . .	142
<b>10. Feladatok a termodinamika tárgyköréből</b>	<b>143</b>
Hővezetés, hőterjedés sugárzással . . . . .	143
10.1. Feladat . . . . .	143
10.2. Feladat . . . . .	143
10.3. Feladat . . . . .	143
Ideális gázok állapotegyenlete . . . . .	144
10.4. Feladat . . . . .	144
10.5. Feladat . . . . .	144
10.6. Feladat . . . . .	144
10.7. Feladat . . . . .	145
10.8. Feladat . . . . .	145
Körfolyamatok ideális gázzal . . . . .	146
10.9. Feladat . . . . .	146
10.10. Feladat . . . . .	147
10.11. Feladat . . . . .	148
10.12. Feladat . . . . .	148
10.13. Feladat . . . . .	149
10.14. Feladat . . . . .	150
10.15. Feladat . . . . .	150
10.16. Feladat . . . . .	152
Hőátadás . . . . .	153
10.17. Feladat . . . . .	153
10.18. Feladat . . . . .	154
10.19. Feladat . . . . .	154
10.20. Feladat . . . . .	155

# 1. Feladatok a kinematika tárgyköréből

## Tömegpontok mozgása egyenes mentén

**1.1. Feladat:** Mekkora az átlagsebessége annak pontnak, amely mozgásának első szakaszában  $v_1$  sebességgel  $s_1$  utat, második szakaszában  $v_2$  sebességgel  $s_2$  utat tesz meg?

**Megoldás:** Az átlagsebességet az összesen megtett útmennyiség és az ehhez szükséges teljes időtartam hányadosaként kapjuk meg:  $\bar{v} = \frac{\sum_i s_i}{\sum_i t_i}$ . Az eltelt időtartamok:  $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$  és  $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$ . Így

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}. \quad (1.1.1)$$

**1.2. Feladat:** Két mozdony  $s_1$  távolságból, egymáshoz képest  $v$  sebességgel közeledik egymás felé az egyenes vasúti pályán. Az egyik fényjelet ad, amely a szélvédőkről visszaverődik. Mekkora utat tesz meg a fény, amíg  $s_2$  távolságra lesznek egymástól?

**Megoldás:** Az eltelt idő:

$$t = \frac{s_1 - s_2}{v}, \quad (1.2.1)$$

amely idő alatt a fény

$$s = ct = c \frac{s_1 - s_2}{v} \quad (1.2.2)$$

utat tesz meg.

**1.3. Feladat:** Egyenes vasúti pályán egy mozdony halad  $v$  sebességgel, s közben  $\Delta t$  ideig dudál. Milyen hosszúnak hallja a pálya mellett álló utas a dudaszót, ha a vonat nem halad el mellette?

**Megoldás:** Tegyük fel, hogy a mozdony  $s$  távolságban van, amikor elkezd dudálni. A hangot

$$t_1 = \frac{s}{c} \quad (1.3.1)$$

idő elteltével hallja meg a megfigyelő. Ezt követően  $\Delta t$  idő múlva már csak  $s - v\Delta t$  távolságban lesz a mozdony, amely ekkor befejezi a dudálást. A dudaszó vége

$$t_2 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} \quad (1.3.2)$$

idő elteltével jut a megfigyelőhöz. A dudaszót a megfigyelő tehát

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c - v}{c} \Delta t \quad (1.3.3)$$

hosszúnak hallja. *Megjegyzés:* Távolodó mozdony esetén a dudaszó

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s + v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c + v}{c} \Delta t \quad (1.3.4)$$

időtartamúnak hallatszik.

**1.4. Feladat:** Egy gépkocsi 54 km/h sebességről 5 m/s<sup>2</sup> lassulással egyenletesen lefékez. Mekkora a teljes fékút?

Megoldás: Legyenek  $v_0 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$  és  $a = 5 \text{ m/s}^2$ . A sebesség az idő függvényében a

$$v(t) = v_0 - at, \quad (1.4.1)$$

összefüggéssel adható meg. Ennek segítségével a gépkocsi megállásáig eltelt idő

$$t = \frac{v_0}{a} = 3 \text{ s}. \quad (1.4.2)$$

A teljes fékút pedig

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 = 22,5 \text{ m}. \quad (1.4.3)$$

**1.5. Feladat:** Egy tömegpont az  $x$  tengely mentén mozog  $-4 \text{ m/s}^2$  állandó gyorsulással. Az  $x = 0$  helyen a sebessége 20 m/s, az időt ekkor kezdjük el mérni. Mikor lesz a test először az  $x = 18 \text{ m}$  helyen?

Megoldás: Legyenek  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ,  $a = -4 \text{ m/s}^2$ . A tömegpont helye, mint az idő függvénye az

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.5.1)$$

összefüggéssel adható meg. Oldjuk meg az egyenletet a  $t$  változóra az  $x = 18 \text{ m}$  helyettesítés mellett:

$$18 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.5.2)$$

Az egyenlet gyökei:  $t_1 = 1 \text{ s}$  és  $t_2 = 9 \text{ s}$ . A tömegpont először a  $t_1$  időpillanatban éri el az  $x = 18 \text{ m}$  helyet.



**1.6. Feladat:** (HN 2B-18) Egy futó a 100 m-es vágtszámot 10,3 s-os eredménnyel nyerte meg. Egy másik futó 10,8 s-os idővel futott be. Feltéve, hogy az atléták az egész távon egyenletesen futottak, határozzuk meg, hogy milyen távol volt a második futó a céltől, amikor a győztes átszakította a célszalagot!

**Megoldás:** Az adatokat jelöljük az alábbi módon:  $s = 100$  m;  $t_1 = 10,3$  s;  $t_2 = 10,8$  s. A másodikként célba érkező futó sebessége

$$v = \frac{s}{t_2} = 9,26 \text{ m/s} \quad (1.6.1)$$

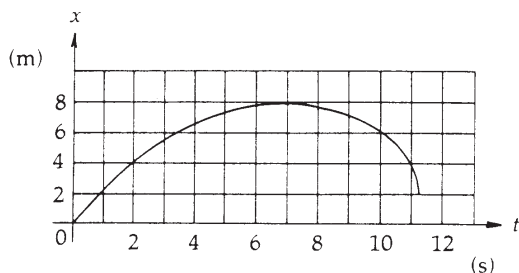
volt. Mivel a hátránya  $t = t_2 - t_1 = 0,5$  s volt, így  $d = vt = 4,63$  m-re volt a célvonalától.

**1.7. Feladat:** (HN 2B-19) Az 1. ábra egy egyenesvonalú pályán mozgó részecske út-idő grafikonját mutatja.

(a) Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a  $t_1 = 2$  s és  $t_2 = 5$  s időintervallumra!

(b) Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége?

(c) Mekkora a  $t = 10$  s időpontban a pillanatnyi sebessége?



1. ábra.

**Megoldás:**

(a) A grafikonról leolvasható, hogy a  $t_1 = 2$  s időpillanatban  $x_1 = 4$  m a helykoordináta, valamint a  $t_2 = 5$  s időpillanatban  $x_2 = 7$  m. Az átlagsebességet a teljesen megtett út és hozzá tartozó idő hányadosaként kapjuk meg:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1 \text{ m/s.} \quad (1.7.1)$$

(b) A mozgás sebessége ott zérus, ahol a görbéhez húzott érintő meredeksége zérus. Ez jó közelítéssel láthatóan a

$$t' = 7 \text{ s} \quad (1.7.2)$$

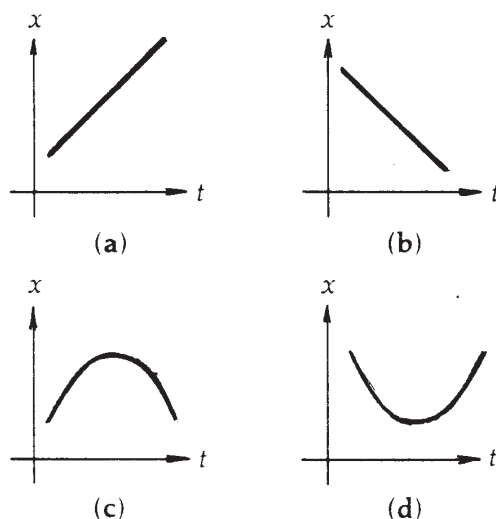
időpillanatban áll fenn.

(c) A  $t = 10$  s-beli sebesség meghatározása a pontbeli érintő kiszámolását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a ponthoz nagyon közeli értékeket kellene leolvasni. Mivel elég nagy a leolvasási pontatlanság – a megértés lényegét pedig nem érinti – az érintő meghatározását úgy végezzük el, hogy tekintjük a  $t_9 = 9$  s-hoz és  $t_{11} = 11$  s-hoz tartozó  $x_9 = 7$  m és  $x_{11} = 4$  m helykoordinátákat, és kiszámoljuk a

$$v_{10} = \frac{x_{11} - x_9}{t_{11} - t_9} \sim -1,5 \text{ m/s.} \quad (1.7.3)$$

meredekséget. A negatív előjel arra utal, hogy a pont az origó felé mozog. A mozgás irányának megváltozása a  $t' = 7$  s időpillanatban történt.

**1.8. Feladat:** (HN 2B-22) A 2. ábra négy különböző mozgás hely-idő függvényábráját mutatja. Állapítsuk meg minden esetben, hogy a gyorsulás pozitív, negatív vagy zérus!



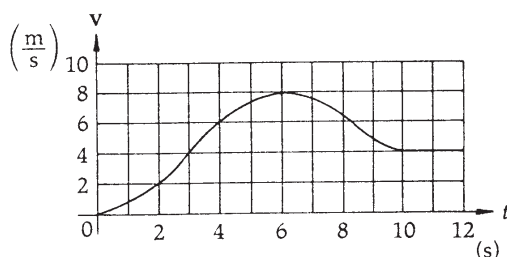
2. ábra.

**Megoldás:** A 2. (a) és (b) ábráinak grafikonjai lineáris összefüggést írnak le a megtett út és az eltelt idő között. A lineáris grafikonok egyenes sebességű mozgást írnak le, következésképpen a mozgások alatt a gyorsulás zérus. A gyorsulás mellett a tömegpont sebességének iránya is megállapítható a grafikonok meredekségéből: a 2. (a) ábrán pozitív meredeksége van a grafikonnak, tehát a tömegpont pozitív irányba mozog és sebessége pozitív, míg a 2. (b) ábra negatív meredekségű egyenest mutat, mely negatív irányba mozgó tömegpontot ír le negatív sebességgel. A 2. (c) ábra grafikonja olyan mozgást ír le, mely során a tömegpont először pozitív irányba mozog, majd egy adott pillanatban visszafordul. A grafikon meredekségét elemezve az

egy  $t$  időpillanatokban megállapítható, hogy kezdetben pozitív irányba mozgott a tömegpont, majd pedig visszafordult, a sebessége negatív lett. A tömegpont gyorsulása ezért negatív volt a mozgás során. Végül a 2. (d) ábra az előző megfontolások alapján egy pozitív irányba gyorsuló tömegpont mozgását írja le.

**1.9. Feladat:** (HN 2B-24) A 3. ábra egy egyenes úton nyugalomból induló motorkerékpáros sebesség-idő grafikonját mutatja.

- Mekkora a motorkerékpáros átlagos gyorsulása a  $t_0 = 0$  s és  $t = 6$  s időtartamban?
- Állapítsuk meg (közelítőleg), hogy mikor éri el a gyorsulás maximális értékét és mekkora a gyorsulás ebben a pillanatban?
- Mikor zérus a gyorsulás?
- Mikor veszi fel a gyorsulás legnagyobb negatív értékét és mekkora ez az érték?



3. ábra.

### Megoldás:

- (a) A  $[t_0, t]$  s időintervallumban a teljes sebességváltozás  $\Delta v = 8$  m/s. Az átlag gyorsulás ezért

$$a = \frac{\Delta v}{t - t_0}. \quad (1.9.1)$$

A számértékek behelyettesítése után  $a = 1.3$  m/s<sup>2</sup>.

- (b) A legnagyobb gyorsulást akkor éri el a motorkerékpáros, amikor a sebesség-idő grafikonban legnagyobb a mindenkor érintő meredeksége. a 3. ábra alapján ez  $t \approx 3$  s pillanatban következik be. Ekkor a motorkerékpáros gyorsulásának közelítő értékét az ábráról leolvasható értékek segítségével határozhatjuk meg. Az ábráról leolvasható adatok pontosságát a felrajzolt négyzet-rács határozza meg. A gyorsulás meghatározásához szükséges sebességek értékét a szomszédos  $t_1 = 2$  s és  $t_2 = 4$  s időpillanatokban olvashatjuk le. A sebességek értékét a  $t \approx 3$  s pillanatban húzott érintő segítségével határozhatjuk meg:  $v_1 = 2$  m/s és  $v_2 = 6$  m/s. A maximális gyorsulás tehát:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.9.2)$$

Behelyettesítés az értékeket  $\bar{a} = 2 \text{ m/s}^2$  adódik.

(c) Mivel a motorkerékpáros gyorsulását a sebesség-idő grafikon pontjaiban húzott érintők meredeksége jelzi, a vízszintes érintőjű pontok a zérus gyorsulású pillanatoknak felelnek meg.

A 3. ábra egyetlen olyan pontja melyben az érintő vízszintes, a  $t = 6 \text{ s}$  pillanathoz tartozik.

(d) A motorkerékpáros a legnagyobb negatív értékű gyorsulását a  $t = 8 \text{ s}$  pillanatban éri el, mivel ebben a pillanatban a legmeredekebb a grafikon érintője. Megszerkesztve a grafikon érintőjét a (b) feladatrészhez hasonlóan megállapítható gyorsulás közelítő értéke, mely  $\bar{a}_n \approx 2 \text{ m/s}^2$ -nak adódik.

**1.10. Feladat:** (HN 2B-26) Egy gépkocsi sebessége 9 s alatt 4 m/s-ról egyenletesen 7 m/s-ra növekszik.

(a) Mekkora a kocsi gyorsulása?

(b) Ezután az autó 12 s alatt egyenletesen lassulva megáll. Mekkora a gyorsulás ezen a szakaszon?

(c) Összesen mekkora utat tett meg a 21 s alatt az autó?

(d) Mekkora az átlagsebessége?

**Megoldás:** Legyenek  $t_1 = 9 \text{ s}$ ,  $v_1 = 4 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 7 \text{ m/s}$  és  $t_2 = 12 \text{ s}$ .

(a) A mozgás első szakaszát leíró gyorsulás

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_1} = \frac{1}{3} \text{ m/s}^2. \quad (1.10.1)$$

(b) A sebesség időbeli változása

$$v(t) = v_2 + a_2 t_2, \quad (1.10.2)$$

amellyel a megállás tényét is figyelembe véve a

$$0 = 7 + 12a_2 \quad (1.10.3)$$

egyenlet írható fel. A második szakasz gyorsulása tehát

$$a_2 = -\frac{7}{12} \text{ m/s}^2. \quad (1.10.4)$$

(c) A megtett út az első szakaszra

$$x_1 = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 39,5 \text{ m}, \quad (1.10.5)$$

a másodikra

$$x_2 = v_2 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 42 \text{ m}, \quad (1.10.6)$$

így az összesen megtett út 81,5 m.

(d) Az átlagsebesség

$$\bar{v} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = 3,88 \text{ m/s}. \quad (1.10.7)$$

**1.11. Feladat:** (HN 2A-32) Függőlegesen felfelé hajítunk egy labdát 12 m/s sebességgel. Hol van, mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik

(a) 1 s és

(b) 2 s időpontban az elhajítás után?

**Megoldás:** A függőleges felfelé hajításra vonatkozó sebesség-idő és hely-idő összefüggések:

$$v(t) = v_0 - gt \quad (1.11.1)$$

és

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.11.2)$$

Behelyettesítés után:

(a)  $v(1 \text{ s}) = 2 \text{ m/s}$  felfelé (a pozitív előjel ezt mutatja);  $y(1 \text{ s}) = 7 \text{ m}$ ;

(b)  $v(1 \text{ s}) = -8 \text{ m/s}$  lefelé (a negatív előjel ezt mutatja);  $y(1 \text{ s}) = 4 \text{ m}$ .

**1.12. Feladat:** (HN 2B-33) 50 m mély kútba követ ejtünk. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva halljuk a kő csobbanását! A hang terjedési sebessége 330 m/s.

**Megoldás:** A  $h$  mélységű kút aljára

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (1.12.1)$$

idő alatt ér le a kő. A  $h$  utat a hang

$$t_2 = \frac{h}{c} \quad (1.12.2)$$

idő alatt teszi meg. Így összesen

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c} = 3,31 \text{ s} \quad (1.12.3)$$

idő múlva hallható a csobbanás.

**1.13. Feladat:** (HN 2B-35) Feldobunk egy érmét 4 m/s sebességgel. Mennyi idő alatt ér fel 0,5 m magasra. Miért kapunk két eredményt?

Megoldás: Az emelkedés út-idő függvénye:

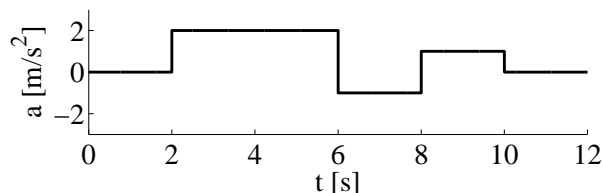
$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.13.1)$$

Az adatokat behelyettesítve a

$$0 = 5t^2 - 4t + 0,5 \quad (1.13.2)$$

másodfokú egyenlet adódik, amelynek megoldásai a  $t_1 = 0,155$  s és a  $t_2 = 0,644$  s. Azért van két megoldás mert az első időpont után még tovább emelkedik, s a lefele esésnél a második időpontban ugyancsak 0,5 m magasan lesz.

**1.14. Feladat:** (HN 2C-54) Egy, az origóból induló test a 4. ábra szerinti gyorsulással egyenesvonalú mozgást végez. Rajzoljuk meg a mozgás sebesség-idő és hely-idő függvényvénnyeket!



4. ábra.

Tüntessük fel a  $t = 2, 6, 8$  és  $10$  s időpontokhoz tartozó sebesség és helykoordináták értékét.

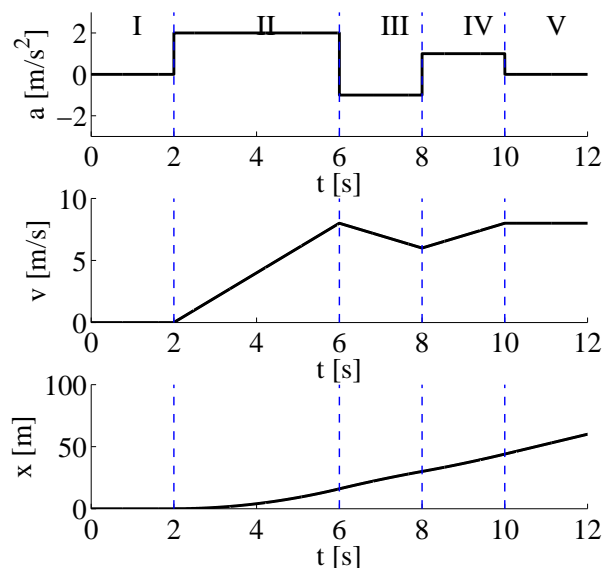
Megoldás: Egyenletesen gyorsuló mozgás esetében a gyorsulás, a sebesség és a megtett út az alábbi egyenletekkel adható meg:

$$a(t) \equiv a_0, \quad (1.14.1)$$

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0), \quad (1.14.2)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2, \quad (1.14.3)$$

ahol  $a_0$  a gyorsulás nagysága (a pozitív iránnyal ellentétesen gyorsuló mozgás esetében negatív),  $t_0$  a mozgás kezdeti időpontja,  $v_0$  a kezdősebesség,  $x_0$  pedig a tömegpont kezdeti koordinátája. A tömegpont mozgását bontsuk fel az 5. ábra alapján I,II,III,IV és V szakaszokra. Az egyes szakaszokban a  $v_0$  kezdősebesség,  $x_0$  koordináta és  $t_0$  időpont az előző szakasz végpontjában



5. ábra.

felvett értékekből határozhatóak meg. (A soron következő összefüggésekben a  $\{\xi\}$  jelölés a  $\xi$  fizikai mennyiség számértékét jelöli SI mértékegységekben.)

**I. szakasz:**  $0 < t < 2\text{s}$ . A kezdeti értékek:  $a_0 = 0 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 0 \text{ m}$ ,  $t_0 = 0 \text{ s}$ .

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig  $v(t) = 0 \text{ m/s}$  és  $x(t) = 0 \text{ m}$  adódik.

A  $t = 2 \text{ s}$  pillanatban a sebesség és kitérés értékei:  $v(2\text{s}) = 0 \text{ m/s}$  és  $x(2\text{s}) = 0 \text{ m}$ .

**II. szakasz:**  $2\text{s} < t < 6\text{s}$ . A kezdeti értékek:  $a_2 = 0 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 0 \text{ m}$ ,  $t_0 = 2 \text{ s}$ .

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig  $\{v(t)\} = 2(\{t\} - 2)$  és  $\{x(t)\} = (\{t\} - 2)^2$  adódik.

A  $t = 6 \text{ s}$  pillanatban a sebesség és kitérés értékei:  $v(6\text{s}) = 8 \text{ m/s}$  és  $x(6\text{s}) = 16 \text{ m}$ .

**III. szakasz:**  $6\text{s} < t < 8\text{s}$ . A kezdeti értékek:  $a_0 = -1 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 8 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 16 \text{ m}$ ,  $t_0 = 6 \text{ s}$ .

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig  $\{v(t)\} = 8 - (\{t\} - 6)$  és  $\{x(t)\} = 16 + 8(\{t\} - 6) - \frac{1}{2}(\{t\} - 6)^2$  adódik.

A  $t = 8 \text{ s}$  pillanatban a sebesség és kitérés értékei:  $v(8\text{s}) = 6 \text{ m/s}$  és  $x(8\text{s}) = 30 \text{ m}$ .

**IV. szakasz:**  $8\text{s} < t < 10\text{s}$ . A kezdeti értékek:  $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 6 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 30 \text{ m}$ ,  $t_0 = 8 \text{ s}$ .

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig  $\{v(t)\} = 6 + (\{t\} - 8)$  és  $\{x(t)\} = 30 + 6(\{t\} - 8) + \frac{1}{2}(\{t\} - 8)^2$  adódik.

A  $t = 10 \text{ s}$  pillanatban a sebesség és kitérés értékei:  $v(10\text{s}) = 8 \text{ m/s}$  és  $x(10\text{s}) = 44 \text{ m}$ .

**V. szakasz:**  $10\text{s} < t < 12\text{s}$ . A kezdeti értékek:  $a_0 = 0 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 8 \text{ m/s}$ ,  $x_0 = 44 \text{ m}$ ,  $t_0 = 10 \text{ s}$ .

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig  $\{v(t)\} = 8$  és  $\{x(t)\} = 44 + 8(\{t\} - 10)$  adódik.

A  $t = 12$  s pillanatban a sebesség és kitérés értékei:  $v(12\text{s}) = 8$  m/s és  $x(12\text{s}) = 60$  m.

**1.15. Feladat:** (HN 2C-66) Egy leejtett kődarab útjának a talajra érkezés előtti utolsó harmadát 1,0 s alatt teszi meg. Milyen magasról esett le a kő?

**Megoldás:** Jelölje  $h$  az ejtés magasságát,  $t$  a teljes esési időt és  $t_0 = 1$  s az utolsó harmadhoz tartozó időt. A szabadon eső tömegpont kinematikai összefüggései alapján:

$$h = \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.15.1)$$

Az út 2/3-át pedig  $t - t_0$  idő alatt teszi meg a kődarab:

$$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2. \quad (1.15.2)$$

A  $h$  változó eliminálásával  $t$ -re az alábbi másodfokú egyenlet adódik

$$0 = \frac{1}{6}gt^2 - gtt_0 + \frac{1}{2}gt_0^2. \quad (1.15.3)$$

A másodfokú egyenlet két megoldása  $t_1 = 5,45$  s, valamint  $t_2 = 0,55$  s. A második megoldás fizikailag nem értelmes, mivel  $t_2 < t_0$ . A  $t_1$  megoldáshoz tartozó magasság:

$$h = 148,51 \text{ m}. \quad (1.15.4)$$

**1.16. Feladat:** \* (HN 2B-40) Az  $x$  tengelyen mozgó részecske sebesség-idő függvényét a  $v(t) = 4 + 2t - 3t^2$  függvény adja meg. A  $t = 0$  időpillanatban a részecske az  $x = 8$  m helyen van.

- Mi az egyes együtthatók mértékegysége?
- Határozzuk meg a mozgás gyorsulás-idő függvényét!
- Határozzuk meg a mozgás hely-idő függvényét!
- Mekkora a részecske legnagyobb  $+x$  irányú sebessége?

**Megoldás:**

(a)  $A = 4$  m/s,  $B = 2$  m/s<sup>2</sup>,  $C = 3$  m/s<sup>3</sup>:  $v(t) = A + Bt - Ct^2$ .

(b) A gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, azaz

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = B - 2Ct = 2 - 6t. \quad (1.16.1)$$



(c) A kezdeti  $t = 0$  s időpillanatban a részecske koordinátája  $x = 8$  m. A hely-idő függvény a sebesség idő szerinti integrálásával kapható meg a kezdeti feltételek illesztése mellett. Ezt a

$$dx = v dt \quad (1.16.2)$$

összefüggésből kiindulva a

$$\int_{x_0}^x dx = x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^t (A + Bt - Ct^2) dt \quad (1.16.3)$$

határozott integrál kiszámolásával kaphatjuk. Ennek eredménye

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^t (A + Bt - Ct^2) dt = \left[ At + \frac{1}{2} Bt^2 - \frac{1}{3} Ct^3 \right]_{t_0=0}^t, \quad (1.16.4)$$

ahonnan a hely

$$x(t) = x_0 + At + \frac{1}{2} Bt^2 - \frac{1}{3} Ct^3 = 8 + 4t + t^2 - t^3. \quad (1.16.5)$$

(d) A sebesség akkor a legnagyobb, amikor a gyorsulás zérus. Ez a  $t = 1/3$  s időpillanatban következik be. A sebesség értéke ekkor  $v = 4,33$  m/s.

**1.17. Feladat:** \* (HN 2B-41) Az  $x$  tengelyen mozgó részecske helyzetét az  $x(t) = a + bt - ct^2$  függvény adja meg. Az együtthatók számértéke SI egységekben:  $\{a\} = 2$ ,  $\{b\} = 3$ ,  $\{c\} = 4$ ,

- Adjuk meg az egyes együtthatók dimenzióját!
- Határozzuk meg a sebesség-idő függvényt!
- Határozzuk meg a gyorsulás-idő függvényt!
- Határozzuk meg a részecske maximális  $x$  irányú elmozdulását és az ehhez tartozó időpontot is!

Megoldás:

(a) Az egyes együtthatók dimenziója:  $[a] = \text{m}$ ;  $[b] = \text{m/s}$ ;  $[c] = \text{m/s}^2$

(b) A sebességet a hely idő szerinti deriváltjaként határozhatjuk meg:

$$\{v(t)\} = \frac{d\{x\}}{dt} = 3 - 8t. \quad (1.17.1)$$

(c) A gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltjával egyenlő:

$$\{a(t)\} = \frac{d\{v\}}{dt} = -8. \quad (1.17.2)$$

(d) A maximális elmozdulás pillanatában a test sebessége zérus ( $\{v(t)\} = 0$ ), ami a

$$t = \frac{3}{8} \text{ s}, \quad (1.17.3)$$

pillanatban következik be. A maximális elmozdulás pedig

$$x = \frac{51}{16} \text{ m}. \quad (1.17.4)$$

## Tömegpontok síkbeli mozgása

**1.18. Feladat:** \* Jelölje egy folyó partját az  $x$  tengely. A víz a parttal párhuzamosan folyik, az  $x$  irányú sebesség a parttól való távolság függvénye, amely a  $v_x(y) = ky$  lineáris összefüggéssel adható meg, ahol  $0 < k$ ,  $y$  pedig a parttól mért távolság. (A túloldali part sokkal távolabb van, mint a távolság, melyen a sodrási sebességet leíró lineáris összefüggés érvényes.) A parton lévő úszó a parttól  $d$  távolságra lévő stéghez szeretne úszni.

(a) Mekkora távolsággal előbb kell a vízbe mennie, ha a folyásirányra merőlegesen állandó  $u$  sebességgel fog úszni?

(b) Milyen a lesz a pályagörbe alakja?

### Megoldás:

(a) Az úszó a parttól az idő függvényében

$$y(t) = ut \quad (1.18.1)$$

távolságra jut. Közben az  $x$  irányú sebessége is folyamatosan változik a

$$v_x(t) = ky = kut \quad (1.18.2)$$

összefüggésnek megfelelően. A mozgás  $x$  irányú vetülete lényegében egy állandó gyorsulású mozgással azonosítható, ahol a gyorsulás  $a_x = ku$ :

$$x = \frac{1}{2} a_x t_s^2. \quad (1.18.3)$$

A sodródás ideje

$$t_s = \frac{d}{u}, \quad (1.18.4)$$

így meghatározható az a távolság is, amellyel az úszónak előrébb kell a vízbe mennie:

$$x = \frac{1}{2} a_x t_s^2 = \frac{1}{2} kut_s^2 = \frac{1}{2} \frac{kd^2}{u}. \quad (1.18.5)$$

(b) A pályagörbe meghatározásához válasszunk olyan koordinátarendszert, hogy a stég a

$$\left[ \frac{1}{2} \frac{kd^2}{u}; d \right] \quad (1.18.6)$$

koordinátájú pontban legyen. Ekkor az origóból indulva éppen ehhez a ponthoz jut. Az (1.18.1) és (1.18.1) egyenletekből küszöböljük ki a  $t$  változót. Ekkor a pályagörbére az

$$y^2(x) - \frac{2ux}{k} = 0 \quad (1.18.7)$$

összefüggést kapjuk, ami egy parabola egyenlete.

**1.19. Feladat:** Egy repülőgép 360 km/h sebességgel vízszintesen repül. A repülőgépből egy-egy pisztollyal felfelé és lefelé lőnek azonos pontból. Milyen messze van egymástól a két lövedék  $t = 0,8$  s múlva? Mindegyik lövedék kezdeti sebessége a repülőgéphez képest  $v_0 = 160$  m/s. (A közegellenállás elhanyagolható.)

**Megoldás:** Vízszintesen mindkét lövedék 360 km/h sebességgel halad, így ez nem befolyásolja a kettejük távolságát. A függőleges irányban mindkettőnek  $-g$  gyorsulása van, az egyiknek  $+v_0$ , a másiknak  $-v_0$  a kezdősebessége. Mivel mindkét lövedék ugyanazzal a gyorsulással esik, a távolodásukat a kezdősebességük határozzák meg. A két lövedék közötti távolság tehát

$$d = \left( v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) - \left( -v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) = 2v_0 t = 256 \text{ m.} \quad (1.19.1)$$

**1.20. Feladat:** (HN: 3B-21) Egy 25 m magas hídról vízszintes irányban hajítunk el egy követ. A kő becsapódási helyét  $45^\circ$ -os irányban látjuk.

- (a) Mekkora sebességgel hajítottuk el a követ?  
 (b) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódott a kő a vízbe?

**Megoldás:**

(a) A feladat feltétele szerint a kő becsapódási helyét a vízszinteshez képest lefelé  $45^\circ$ -os szög alatt látjuk. Ennek alapján a kő ugyanakkora távolságot tett meg vízszintesen mint függőleges irányban. Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját az eldobás pontjába. Ekkor becsapódás koordinátái:  $[x_0, H] = [25; -25]$  m. A  $v_0$  sebességgel elhajított kő mozgását leíró kinematikai egyenletek pedig

$$x(t) = v_0 t \quad (1.20.1)$$

és

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (1.20.2)$$

A becsapódás pillanatában:

$$x_0 = v_0 t \quad (1.20.3)$$

és

$$H = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (1.20.4)$$

Az két egyenletből a hajítás idejére  $t = 2,24$  s, az eldobás sebességére pedig  $v_0 = 11,18$  m/s adódik.

(b) Az eldobott kő mindenkori sebességének komponensei

$$v_x(t) = v_0 \quad (1.20.5)$$

és

$$v_y(t) = -gt. \quad (1.20.6)$$

A  $t = 2,2$  s repülési időt behelyettesítve a sebesség vektora  $\mathbf{v} = [11,18; 22,36]$  m/s-nak adódik.

A becsapódás  $\alpha$  szöge a sebességkomponensek segítségével meghatározható a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = 2 \quad (1.20.7)$$

egyenlet segítségével, amiből  $\alpha = 63,44^\circ$  adódik.

**1.21. Feladat:** Egy  $h = 35$ m magas torony tetejéről, a vízszinteshez képest  $\alpha = 25^\circ$ -os szög alatt ferdén felfelé egy labdát hajítunk el  $v_0 = 80$  m/s kezdősebességgel.

(a) Határozzuk meg a földetérésig eltelt időt!

(b) Határozzuk meg a labda földetérési helyének távolságát a toronytól!

(c) Határozzuk meg a labda becsapódási sebességének nagyságát és irányát!

Megoldás:

(a) Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját a torony lábához. A labda  $x$  és  $y$  koordinátái az idő függvényében ekkor az

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha \quad (1.21.1)$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 + h \quad (1.21.2)$$

összefüggésekkel adhatóak meg. A repülés teljes ideje a

$$0 = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt_0^2 + h \quad (1.21.3)$$

egyenletből határozható meg. A másodfokú egyenlet fizikailag értelmes megoldása

$$t_0 = 7,67 \text{ s.} \quad (1.21.4)$$

(b) A repülési időt behelyettesítve az (1.21.1) egyenletbe megkapjuk a becsapódás távolságát, ami

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos \alpha. \quad (1.21.5)$$

Behelyettesítve az értékeket  $d \approx 556,1$  m adódik.

(c) A becsapódás pillanatában sebességvektor komponensei

$$v_x(t_0) = v_0 \cos \alpha \approx 72,5 \text{ m/s} \quad (1.21.6)$$

és

$$v_y(t_0) = v_0 \sin \alpha - gt_0 \approx -42,9 \text{ m/s.} \quad (1.21.7)$$

A sebesség nagysága pedig az egyes komponensek segítségével számolható ki a  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  összefüggéssel. Behelyettesítve a számadatokat  $v \approx 84,2$  m/s adódik. A becsapódás szöge pedig

$$\beta = \arctg \frac{v_y}{v_x} = -30,61^\circ. \quad (1.21.8)$$

**1.22. Feladat:** A talajról a vízszintessel  $\alpha = 30^\circ$ -os szöget bezáró szögben  $v_0 = 50$  m/s nagyságú kezdősebességgel kilövünk egy lövedéket. A lövedék a szemközt lévő függőleges falba csapódik. Milyen magasan van a becsapódás helye, ha a fal  $d = 80$  m távolságra van a kilövés helyétől?

**Megoldás:** A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes és függőleges komponensei a

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (1.22.1)$$

és

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (1.22.2)$$

összefüggésekkel adhatóak meg. Helyezzük koordináta-rendszer kezdőpontját a kilövés pontjába. Ekkor a lövedék koordinátái az idő függvényében

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t \quad (1.22.3)$$

és

$$y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.22.4)$$

A lövedék repülésének időtartama a

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos \alpha, \quad (1.22.5)$$

egyenlettel határozható meg. Az emelkedési magasság pedig

$$h = y(t_0) = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_0^2. \quad (1.22.6)$$

Az (1.22.5) egyenletből a

$$t = \frac{d}{v_0 \cos \alpha} \quad (1.22.7)$$

repülési időt kifejezve és behelyettesítve az (1.22.6) egyenletbe  $h \approx 29,14$  m emelkedési magasság adódik.

**1.23. Feladat:** (HN: 3C-29) A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg egy a vízszintes síkhoz képest  $\theta$  szög alatt,  $v_0$  kezdősebességgel kilőtt lövedék röppályájának egyenletét és az  $R$  lőtávolságot!

**Megoldás:** Az elhajított test gyorsulásvektora  $\mathbf{a} = (0; -g)$ , a  $t = 0$  kezdőpillanathoz tartozó sebesség vektora pedig  $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \theta; v_0 \sin \theta)$ . A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes komponense

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta, \quad (1.23.1)$$

míg a függőleges komponense

$$v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt. \quad (1.23.2)$$

A koordináta-rendszer kezdőpontját a hajítás pontjába választva, az eldobott test  $\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t))$  helyvektorának komponensei

$$x(t) = v_0 t \cos \theta, \quad (1.23.3)$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.23.4)$$

A pálya általános egyenletét megkapjuk, ha a fenti két egyenletből (melyeket a röppálya paraméteres egyenleteinek is nevezhetünk) kiküszöböljük a  $t$  paramétert. Ekkor a röppálya általános egyenlete:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.23.5)$$

Az 1.23.5 egy száraival lefelé álló parabolát ír le, amely átmegy az origón. A lőtávolságnak megfelelő  $x = R$  koordinátában az  $y$  emelkedési magasság zérus, vagyis a lőtávolságot az  $y(x = R) = 0$  egyenlet megoldásával kaphatjuk meg:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \quad (1.23.6)$$

*Megjegyzés:* Adott  $v_0$  és  $g$  esetén a lőtávolság akkor a legnagyobb, ha  $\sin 2\theta = 1$ . Ebből a  $\theta = 45^\circ$ -os szög következik.

**1.24. Feladat:** \* (HN: 3C-30) A ferde hajítás röppálya egyenletének differenciálásával mutassuk meg, hogy a maximális lőtávolságot  $\theta = 45^\circ$  kilövési szög esetén érjük el!

Megoldás: A hajítási távolság mint a  $\theta$  kilövési szög függvénye az (1.23.6) egyenlettel adott. A függvénynek szélsőértéke van, ha az elsőrendű derivált nulla, azaz

$$\frac{dR}{d\theta} = 0. \quad (1.24.1)$$

A differenciálás műveletét elvégezve:

$$0 = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta. \quad (1.24.2)$$

Az egyenletet megoldva, a hajítási szögre  $\theta = 45^\circ$  adódik. Egy függvény szélsőértéke azonban a lokális maximum mellett jelenthet lokális minimumot is. Ahhoz, hogy biztosan állíthassuk, hogy egy függvény szélsőértéke lokális maximumnak felel meg, meg kell vizsgálnunk a függvény másodrendű deriváltját is a kérdéses pontban.

$$\frac{d^2R}{d\theta^2} = -4 \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \quad (1.24.3)$$

A másodrendű derivált a  $\theta = 45^\circ$  helyettesítési értékben negatív, ezért a talált szélsőérték valóban egy lokális (esetünkben globális) maximumot találtunk.

**1.25. Feladat:** (HN: 3C-32) Határozzuk meg, hogy milyen  $\theta$  kilövési szög esetén lesz egy lövedék  $D$  lőtávolsága egyenlő a  $H$  emelkedési magassággal?

Megoldás: A lövedék  $y(x)$  röppályája az (1.23.5) egyenlettel adható meg, a hajítás távolságát

pedig az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg egy korábbi feladatban. Az emelkedés  $H$  magasságát a  $H = y(\frac{D}{2})$  összefüggés adja meg, azaz

$$H = \frac{D}{2} \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{4v_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.25.1)$$

A feladat szövegének megfelelően a  $D = H$  feltételből a

$$\cos \theta = \frac{1}{4} \sin \theta \quad (1.25.2)$$

trigonometriai egyenlet adódik. Ennek fizikailag értelmes megoldása:

$$\theta = 76^\circ. \quad (1.25.3)$$

**1.26. Feladat:** (HN: 3C-38) Egy szöcske vízszintes irányban legfeljebb  $R_{max} = 1$  m távolságra tud elugrani. Feltételezve, hogy az elugráshoz szükséges idő elhanyagolható, határozzuk meg, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel halad a szöcske, ha mindig a maximális távolságba ugrik!

**Megoldás:** A vízszintes hajítás  $R$  távolságát egy korábbi feladatban az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg. A hajítási távolság a maximális értékét (a röppálya szimmetria-tulajdonságai miatt) a  $\theta = 45^\circ$  hajítási szög mellett veszi fel:

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (1.26.1)$$

Ebből az ugrás sebessége

$$v_0 = \sqrt{R_{max} g}. \quad (1.26.2)$$

A szöcske vízszintes haladási sebességét a  $v_0$  sebesség vízszintes komponense adja meg. Mivel a hajítási szög  $\theta = 45^\circ$ , így

$$v_x = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{R_{max} g}{2}} \quad (1.26.3)$$

adódik.

**1.27. Feladat:** (HN 3C-39) Egy lövedéket  $\theta$  kilövési szöggel lövünk ki. Határozzuk meg, hogy a lövedék röppályájának tetőpontja mekkora  $\varphi$  szög alatt látszik a kilövési pontból!

**Megoldás:** A korábbi feladatok megoldásaiból tekintsük a hajítási röppálya (1.23.5 egyenletét



és az (1.23.6) egyenlettel adott hajítási távolságot. A pálya szimmetria-tulajdonságai miatt a röppálya tetőpontjának  $x$  koordinátája

$$x = \frac{D}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta. \quad (1.27.1)$$

Az ehhez tartozó  $y = H$  emelkedési magasság pedig

$$H = y \left( \frac{D}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \theta. \quad (1.27.2)$$

Az (1.27.1) és (1.27.2) egyenletek segítségével

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta \quad (1.27.3)$$

adódik a keresett szögre.

**1.28. Feladat:** \*\* A falhoz támasztott  $L$  hosszúságú létra földdel érintkező  $P$  pontját  $v_0$  állandó sebességgel mozgatjuk az  $x$  tengely mentés, pozitív irányban. Az  $xy$  sík merőleges a falra, az  $x$  koordináta pedig a faltól mért távolságot méri. A  $P$  pont a  $t = 0$  időpillanatban legyen az  $x_0$  koordinátájú helyen.

- Adjuk meg a létra felső  $A$  pontjának sebességét és
- gyorsulását az idő függvényében!

Megoldás:

(a) Az alsó pont helye az idő függvényében:  $x_P(t) = v_0 t + x_0$ . Ha az  $A$  pont nem válik el a faltól, az  $A$  pont  $y_A(t)$  koordinátája és a  $P$  pont vízszintes  $x_P(t)$  koordinátája között az alábbi összefüggés érvényes:

$$x_P^2(t) + y_A^2(t) = L^2, \quad (1.28.1)$$

ahonnan  $y_A(t) = \sqrt{L^2 - x_P^2(t)}$  adja meg a legfelső pont talajtól mért távolságát. Az  $A$  pont sebességét az (1.28.1) egyenletet idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$x_P(t)x_P'(t) + y_A(t)y_A'(t) = 0 \quad (1.28.2)$$

Az egyenletben az  $A$  pont sebessége  $v_A(t) = y_A'(t)$  a  $P$  pont sebessége pedig  $v_P(t) = x_P'(t) \equiv v_0$ . A felső pont sebessége tehát

$$v_A(t) = y_A'(t) = -\frac{x_P(t)x_P'(t)}{y_A(t)} = -\frac{(v_0 t + x_0)v_0}{\sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2}}. \quad (1.28.3)$$

*Megjegyzés:* Az  $y(t) = \sqrt{L^2 - x^2(t)}$  függvény explicit idő szerinti deriválásával hasonlóan a fenti végeredményhez juthatunk.

(b) Az A pont gyorsulását az

$$a_P(t) = \frac{d}{dt} v_y(t) = - \frac{v_0^2 \sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2} + \frac{(v_0 t + x_0)^2 v_0^2}{\sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2}}}{L^2 - (v_0 t + x_0)^2} \quad (1.28.4)$$

összefüggéssel számolhatjuk ki.

**1.29. Feladat:** \*\* Egy kétágú létra egyik szárának alsó pontját (az origóban) rögzítjük, a másik szár alsó pontját pedig állandó  $v_0$  sebességgel vízszintesen mozgatjuk az  $x$  tengely mentén, pozitív irányba. Ennek következtében a létra szétnyílik. A mozgó alsó  $P$  pont a  $t = 0$  időpillanatban legyen az  $x_0$  koordinátájú helyen. Mekkora a létra felső  $A$  pontjának  $\mathbf{v}_A$  sebessége az idő függvényében? A létra szárai  $L$  hosszúságúak.

**Megoldás:** A  $P$  pont  $x$  koordinátája az idő függvényében:  $x_P(t) = v_0 t + x_0$ . A létra szimmetriatulajdonságai miatt az  $A$  pont mozgásának  $x$  irányú vetülete  $v_0/2$  sebességű mozgással írható le:

$$x_A(t) = \frac{1}{2}(v_0 t + x_0). \quad (1.29.1)$$

Mivel a létra baloldali szára nem nyúlik meg:

$$x_A^2(t) + y_A^2(t) = L^2 \quad (1.29.2)$$

ahol  $y(t) = \sqrt{L^2 - x_f^2(t)}$  a felső pont talajtól való távolsága. Az (1.29.2) egyenletet idő szerint deriválva kapjuk a

$$x_A(t)x_A'(t) + y_A(t)y_A'(t) = 0 \quad (1.29.3)$$

egyenletet, ahol az  $A$  pont  $x$  irányú sebessége  $v_x(t) = x_A'(t) = v_0/2$ , valamint az  $y$  irányú sebessége

$$v_y(t) = y_A'(t) = - \frac{x_A(t)x_A'(t)}{y_A(t)} = - \frac{\frac{1}{4}(v_0 t + x_0)v_0}{\sqrt{L^2 - \frac{1}{4}(v_0 t + x_0)^2}}. \quad (1.29.4)$$

**1.30. Feladat:** \*\* Egy  $2l$  szélességű folyó az  $x$  tengely mentén helyezkedik el úgy, hogy az  $x$  tengely a folyó geometriai középvonala. A folyó sebességprofilja a partvonalra merőleges  $y$  koordináta függvényében

$$V(y) = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right). \quad (1.30.1)$$

Az koordiná-rendszer origójából (a folyó közepéről) a partra merőleges irányban, állandó  $u$  sebességgel kezd el úszni egy ember.

- (a) Mekkora távolsággal sodródik le az úszó a folyó mentén?  
 (b) Milyen az úszó mozgásának pályagörbéje?

### Megoldás:

- (a) Az úszó  $y$  koordinátája az idő függvényében

$$y = ut, \quad (1.30.2)$$

így az  $x$  tengely irányú sebesség az idő függvényében

$$v_x(t) = V(y(t)) = v_0 \left( 1 - \frac{u^2 t^2}{l^2} \right) \quad (1.30.3)$$

összefüggéssel adható meg. A part eléréséhez  $t_0 = l/u$  idő szükséges. Az  $x$  tengely irányú  $d$  elmozdulás az  $x$  irányú sebességkomponens integrálásával kapjuk meg:

$$x(t) = \int_0^t v_x(t') dt' = \int_0^t v_0 \left( 1 - \frac{u^2 t'^2}{l^2} \right) dt' = \left[ v_0 t - \frac{1}{3} v_0 \frac{u^2 t'^3}{l^2} \right]_0^t = v_0 t - \frac{1}{3} v_0 \frac{u^2 t^3}{l^2}. \quad (1.30.4)$$

A partra úzás alatt az úszó  $d = x(t_0)$  távolsággal sodródik le a folyó mentén. Rövid számolással

$$d = \frac{2}{3} \frac{lv_0}{u} \quad (1.30.5)$$

adódik.

- (b) Az úszó pályájának paraméteres egyenletét az (1.30.2) és (1.30.4) egyenletek adják meg. A pályagörbe általános egyenletét a  $t$  paraméter kiküszöbölésével határozhatjuk meg.

$$x(y) = v_0 \frac{y}{u} - \frac{1}{3} v_0 \frac{y^3}{ul^2} \quad (1.30.6)$$

\* *Megjegyzés:* Általános esetben egy görbe egyenlete  $f(x, y) = 0$  implicit formában adható meg.

**1.31. Feladat:** Egy kocszi vízszintes pályán  $v = 30$  m/s állandó sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A mozgó kocsiról egy lövedéket lőnek ki úgy, hogy miután a kocszi  $s = 80$  m-t megtett, a lövedék visszaesik a kocsira.

- (a) Mennyi a repülési idő?  
 (b) A kocsrhoz képest mekkora relatív sebességgel és a vízszinteshez képest mekkora szög alatt kellett a lövedéket kilőni?

Megoldás:

(a) A lövedék repülési ideje

$$t_0 = \frac{s}{v}. \quad (1.31.1)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $t_0 \approx 2,67$  s adódik.(b) A lövedéknek a kocsihoz képest csak függőleges irányú sebessége lehetett. Mivel  $t_0$  idő múltán ismét a kocsihoz esett vissza a lövedék,  $t_0$  idő elteltével a lövedék  $y$  koordinátája nulla lesz:

$$y(t_0) = 0 = v_y t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2. \quad (1.31.2)$$

Ebből a lövedék sebességének függőleges komponense:

$$v_y = \frac{1}{2} g t. \quad (1.31.3)$$

adódik. Behelyettesítve a számadatokat  $v_y = 13,3$  m/s adódik.**1.32. Feladat:** Egy lövedéket  $v = 330$  m/s vízszintes irányú kezdősebességgel egy  $h = 80$  m magas szikla tetejéről lőnek ki.

- (a) Mennyi ideig tart, amíg a lövedék a Föld felszínére érkezik?
- (b) A szikla aljától mekkora távolságban érkezik a Földre?
- (c) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódik a talajba?

Megoldás:

(a) A lövedék függőleges irányban egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A repülés ideje

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1.32.1)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $t_0 \approx 4$  s adódik.

(b) A lövedék a szikla aljától

$$x = v t_0 \quad (1.32.2)$$

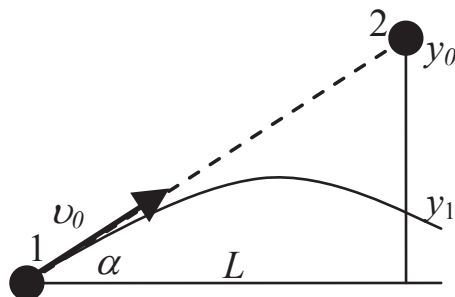
távolságban érkezik a Földre. Behelyettesítve a számadatokat  $x \approx 132$  m adódik.(c) A becsapódás pillanatában a sebességkomponensek  $v_x = 330$  m/s, valamint  $v_y = g t_0 = 40$  m/s. Így a sebesség nagysága

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 332,4 \text{ m/s}, \quad (1.32.3)$$

míg a becsapódás szöge

$$\alpha = \arctg \frac{v_y}{v_x} \approx 6,9^\circ. \quad (1.32.4)$$

**1.33. Feladat:** A 6. ábrán látható két tömegpontot egyszerre indítjuk úgy, hogy miközben a 2. tömegpontot elengedjük, az 1. tömegpontot a 2. tömegpont kezdeti helyzetének a irányába lőjük  $v_0$  kezdeti sebességgel. A két test vízszintes távolsága  $L$ . Az  $(L, \alpha, v_0)$  adatokkal:



6. ábra.

- Fejezzük ki a 2. test kezdeti  $y_0$  magasságát!
- Bizonyítsuk be, hogy ha a két test pályája metszi egymást, akkor a két test **mindig** találkozik a pályák  $(L, y_1)$  metszéspontjában!
- Fejezzük ki a találkozás  $t$  időpontját!
- Mekkora az 1. test  $y_1$  magassága a találkozás pillanatában?

Megoldás:

- (a) A 2. test  $y_0$  magassága

$$y_0 = L \tan \alpha. \quad (1.33.1)$$

- (b) Az 1. test emelkedési magassága az idő függvényében

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1.33.2)$$

míg a 2. test esési magassága

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.33.3)$$

Tekintettel arra, hogy

$$L = v_0 t \cos \alpha, \quad (1.33.4)$$

és ezt (az 1.33.2) egyenletbe helyettesítve a két emelkedési magasság egyenlősége közvetlenül látható.

- (c) A találkozásig eltelt idő

$$t = \frac{L}{v_0 \cos \alpha}. \quad (1.33.5)$$

(d) A találkozási idő behelyettesítésével a találkozási magasság

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{2}g \frac{L^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1.33.6)$$

## Tömegpontok térbeli mozgása

**1.34. Feladat:** \*\* Egy pontszerűnek tekinthető labda a térben  $\mathbf{v} = at^2\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j} + ct^2\mathbf{k}$  m/s sebességgel mozog;  $a = -2,5 \text{ m/s}^3$ ,  $b = 4 \text{ m/s}^3$ ,  $c = 1 \text{ m/s}^3$ . Mekkora utat tesz meg a labda mozgása első  $t = 5$  másodperce alatt?

Megoldás: Az út a pálya ívhossza, azaz

$$s = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt = \int_0^t \sqrt{(at^2)^2 + (bt^2)^2 + (ct^2)^2} dt =$$

$$\int_0^t \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} t^2 dt = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3} [t^3]_0^t = 200,83 \text{ m}. \quad (1.34.1)$$

## 2. Feladatok körmozgás tárgyköréből

### Kerületi sebesség

**2.1. Feladat:** (HN 11C-14) Egy kerék a vízszintes talajon csúszás nélkül  $v = 6 \text{ m/s}$  sebességgel gördül. Határozzuk meg a kerületén lévő részecske talajhoz viszonyított pillanatnyi sebességét, mikor a részecske a kerék elülső pontjában van!

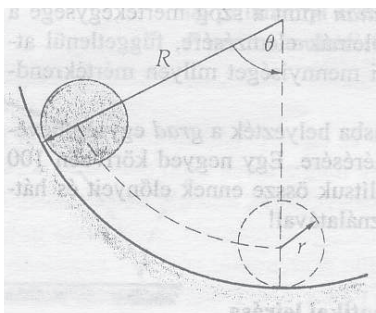
Megoldás: A haladó mozgásból eredően a kerék minden egyes pontja rendelkezik  $v_x = 6 \text{ m/s}$  vízszintes irányú haladómozgással. Ugyanakkor a kerületi pontok ugyancsak  $v_k = 6 \text{ m/s}$  sebességgel mozognak a kerék középpontja körül. Az elülső pont kerületi sebességének iránya lefelé mutat, azaz  $v_y = -6 \text{ m/s}$ . A részecske pillanatnyi sebességvektora tehát

$$\mathbf{v} = (v_x; v_y) = (6; -6) \text{ m/s}. \quad (2.1.1)$$

*Megjegyzés:* A tiszta gördülés feltétele, hogy a kerék legalsó pontja ne mozogjon a talajhoz képest. A legalsó pont kerületi sebessége épp ellentétes irányú, de azonos nagyságú, mint a

kerék haladó mozgásából származó sebessége. A két mozgás „összegének” eredménye, hogy a kerék legalsó pontjának sebessége zérus a talajhoz képest.

**2.2. Feladat:** (HN 11C-15) Egy  $r$  sugarú henger csúszás nélkül gördül egy függőleges síkban lévő  $R$  sugarú körpályáján a 7. ábra szerint. Mutassuk meg, hogy a henger saját tengelye körüli  $\delta$  elfordulási szöge és a henger tengelyének  $\theta$  szögelfordulása között fennáll, hogy  $\delta = (R-r)\theta/r!$



7. ábra.

**Megoldás:** Az  $r$  sugarú henger középponja által sűrt  $s$  ív hosszúságát kétféle módon határozhatjuk meg. Egyrészt a  $\theta$  szöget felhasználva

$$s = (R-r)\theta, \quad (2.2.1)$$

adódik, másrészt a  $\delta$  szög- segítségével

$$s = r\delta. \quad (2.2.2)$$

A két egyenletből

$$\delta = \frac{(R-r)\theta}{r}, \quad (2.2.3)$$

adódik, ami éppen a feladat állítása.

## Szöggyorsulás

**2.3. Feladat:** Egy  $R = 30$  cm sugarú kerékre szíjat csévélünk. Míg a kerék  $f = 2,0$  1/s-os fordulatszámról egyenletesen lassulva leáll,  $s = 25$  m szíj tekeredik le róla.

- A folyamat alatt hány fordulatot tesz mega kerék?
- Mekkora a kerék szöggyorsulása?

**Megoldás:** Legyen a kezdeti szögsebesség  $\omega_0 = 2\pi f \approx 12,56$  rad/s.

(a) A fordulatok  $N$  száma az

$$N = \frac{s}{2R\pi} \quad (2.3.1)$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat  $N \approx 13,26$  adódik.

(b) Az  $N$  fordulat megtétele alatt a kerék

$$\varphi_0 = 41,67 \text{ rad} \quad (2.3.2)$$

szögét fordul el. A forgásra vonatkozó kinematikai egyenletek segítségével felírhatjuk a mindenkori

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \quad (2.3.3)$$

szögsebességet és az elfordulás

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \quad (2.3.4)$$

szögét. A megállás pillanatában  $\omega(t) = 0$ , ekkor  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  rad. A

$$0 = \omega_0 + \beta t \quad (2.3.5)$$

és a

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \quad (2.3.6)$$

egyenletrendszert megoldva a  $\beta$  és  $t$  ismeretlenekre, megkaphatjuk a szöggyorsulás értékét:

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\varphi} \approx -1,89 \text{ rad/s}^2. \quad (2.3.7)$$

**2.4. Feladat:** Egy autó egyenletesen gyorsulva álló helyzetből 15 m/s-os sebességre tesz szert 20 s alatt.

(a) Mekkora a kerék szöggyorsulása, ha egy kerekének sugara 1/3 m és tisztán gördül a gyorsulás alatt?

(b) Hány fordulatot tett meg a kerék a folyamat alatt?

**Megoldás:**

(a) Az autó gyorsulása

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0,75 \text{ m/s}^2. \quad (2.4.1)$$

Mivel  $a = R\beta$  (a kerék tisztán gördül), a szöggyorsulás értéke

$$\beta = 2,25 \text{ rad/s}^2. \quad (2.4.2)$$



(b) A szögelfordulás nagysága pedig

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2 = 450 \text{ rad}, \quad (2.4.3)$$

amelyből a megett fordulatok száma

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = 71,6. \quad (2.4.4)$$

## Centripetális és tangenciális gyorsulások

**2.5. Feladat:** (HN: 4C-25) Egy versenyautó  $v_0 = 210 \text{ km/h}$  sebességgel mozog a  $s = 2 \text{ km}$  kerületű körpályán, majd egy teljes kört megtéve egyenletesen lassítva megáll.

- Mekkora az autó tangenciális gyorsulása?
- Mekkora a centripetális gyorsulás  $d = 1 \text{ km}$ -rel a megállás előtt?
- Mekkora ebben a pillanatban az eredő gyorsulás?

### Megoldás:

(a) Az egyenletes kerületi ( $a_t$  tangenciális) gyorsulás hatására a versenyautó

$$t_0 = \frac{v_0}{|a_t|} \quad (2.5.1)$$

idő alatt áll meg. Ez alatt az idő alatt a versenyautó

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2}|a_t|t_0^2 = \frac{v_0^2}{2|a_t|}, \quad (2.5.2)$$

utat tesz meg. A mozgás során az autó gyorsulása ezért:

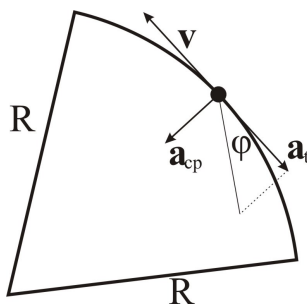
$$|a_t| = \frac{v_0^2}{2s} \approx 0,85 \text{ m/s}^2. \quad (2.5.3)$$

Mivel az autó sebessége 0-ra csökken a mozgás során, a megszokott konvenciókkal  $a_t \approx -0,85 \text{ m/s}^2$ .

(b) Abban a pillanatban, amikor az autónak még  $d$  távolságot kell megtennie a megállásig, a hátralévő út megtételéhez még további

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d}{|a_t|}}, \quad (2.5.4)$$

idő szükséges. A megálláshoz szükséges időt úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbb módon, ha a lassulás folyamatát időben visszafelé tekintjük. Ekkor egy álló helyzetből,  $-a_t$  gyorsulással



8. ábra.

mozgó autó mozgását követjük nyomon. A  $d$  távolság megtételéig éppen  $t_0$  idő szükséges. A versenyautó sebességét is hasonló gondolatmenettel számolhatjuk ki ebben a pillanatban:

$$v = |a_t|t_0 \approx 41,3 \text{ m/s.} \quad (2.5.5)$$

Ebben a pillanatban a centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{2\pi v^2}{d} \approx 5,36 \text{ m/s}^2. \quad (2.5.6)$$

(c) Az eredő gyorsulás pedig

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} \approx 5,43 \text{ m/s}^2. \quad (2.5.7)$$

**2.6. Feladat:** (HN: 4C-26) Egy  $R = 300$  m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó  $a_t = -1,2$   $\text{m/s}^2$  gyorsulással fékezni kezd. Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége  $v = 15$   $\text{m/s}$ . Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére!

Megoldás: A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \approx 0,75 \text{ m/s}^2. \quad (2.6.1)$$

Az autó  $a_t$  gyorsulása a tangenciális gyorsulás, iránya pedig a  $v$  sebességgel ellentétes. A tangenciális és centripetális gyorsulás egymásra merőlegesek. Az eredő gyorsulás érintő irányával bezárt  $\varphi$  szögére érvényes (lásd a 8. ábrát), hogy

$$\text{tg } \varphi = \left| \frac{a_{cp}}{a_t} \right| = 0,625. \quad (2.6.2)$$

Így az eredő gyorsulás  $\varphi = 32^0$  szöget zár be az érintővel, nagysága pedig  $|a| = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} \approx 1,4 \text{ m/s}^2$ .

**2.7. Feladat:** (HN: 4C-27) A fonálra kötött labdát  $R = 0,3$  m sugarú, a talaj felett  $h = 1,2$  m magasban levő, vízszintes síkú körpályán állandó sebességgel pörgetünk. A fonal hirtelen elszakad és a labda attól a ponttól  $s = 2$  m távolságban ér talajt, amelyet úgy kapunk, hogy az elszakadás pillanatában elfoglalt helyzetét függőlegesen a talajra vetítjük. Mekkora volt a labda centripetális gyorsulása, amíg körmozgást végzett?

**Megoldás:** A köté elszakadásának pillanatában a labda vízszintes irányú sebessége  $v = R\omega$ , ahol  $\omega$  a körmozgás körfrekvenciája. A fonál elszakadása után a labda  $s$  m utat tesz meg

$$t_0 = \frac{s}{R\omega} \quad (2.7.1)$$

idő alatt. Másrészt a labda függőleges irányban  $h$  m magasságból szabadon esik, ezért

$$h = \frac{1}{2}gt_0^2 = \frac{gs^2}{2\omega^2R^2}. \quad (2.7.2)$$

A fonál elszakadásáig körmozgás körfrekvenciája tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{gs^2}{2hR^2}} \quad (2.7.3)$$

volt. Ebből a centripetális gyorsulás könnyen meghatározható:

$$a_{cp} = R\omega^2 = \frac{gs^2}{2hR} \approx 55,6 \text{ m/s}^2. \quad (2.7.4)$$

**2.8. Feladat:** (HN 4C-28) Egy lövedéket a vízszintes síkhoz képest  $\theta$  szög alatt  $v_0$  sebességgel lövünk ki. Fejezzük ki a röppálya tetőpontjához tartozó  $R$  görbületi sugarat a  $v_0$ ,  $\theta$  és  $g$  függvényében!

**Megoldás:** A pálya tetőpontján a pályát érintő sebességkomponens  $v_x = v_0 \cos \theta$ . A lövedék centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = \frac{v_x^2}{R}. \quad (2.8.1)$$

A centripetális gyorsulást a nehézségi gyorsulás biztosítja, ezért  $a_{cp} = g$ . A két összefüggésből a görbületi sugár kifejezhető:

$$R = \frac{v_x^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g}. \quad (2.8.2)$$

### 3. Feladatok a dinamika tárgyköréből

#### Newton három törvénye

**3.1. Feladat:** Három azonos  $m$  tömegű gyöngyszemet fonálra fűzünk, egymástól kis távolságokban a fonálhoz rögzítünk, és az elhanyagolható tömegű fonál végét ujjunkkal fogva függőlegesen lógatunk a  $g$  homogén nehézségi erőterben. Majd a  $t_0$  időpillanattól kezdve  $a$  gyorsulással emeljük a fonál végét. Mekkora erő ébred az egyes fonalszakaszokban?

**Megoldás:** Számozzuk meg a gyöngyszemeket. A legalsó legyen az 1-es, a középső a 2-es, a felső a 3-as. A koordinátarendszer  $y$  tengelye mutasson felfele. Mindhárom gyöngyszem  $a$  gyorsulással mozog felfele, így a koordinátarendszerben pozitív értékű. A nehézségi gyorsulás lefele mutat, így negatív:  $-g$ .

Az 1-es testre a  $K_1$  kötél erő (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) hat felfele; a 2-es testre hat a  $-K_1$  kötél erő lefele (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) és a  $K_2$  kötél erő felfele (a 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon); a 3-as testre hat a  $-K_2$  kötél erő lefele (az 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon) és az  $F$  kötél erő felfele (ezt mi fejtjük ki).

A mozgásegyenletek rendre (1-2-3 testre):

$$ma = K_1 - mg, \quad (3.1.1)$$

$$ma = K_2 - K_1 - mg, \quad (3.1.2)$$

$$ma = F - K_2 - mg. \quad (3.1.3)$$

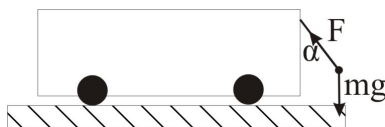
Az egyenletrendszerből a keresett kötélerők:

$$K_1 = m(a + g), \quad (3.1.4)$$

$$K_2 = ma + K_1 + mg = 2m(a + g), \quad (3.1.5)$$

$$F = ma + K_2 + mg = 3m(a + g). \quad (3.1.6)$$

Megjegyzés: Gyakorlásként általánosítsa a feladatot különböző számú és tömegű gyöngyszemekre!



9. ábra.

**3.2. Feladat:** Egy mozgó kocsin rögzített fonál végén egy  $m = 2$  kg tömegű test lóg. A fonál szakítási szilárdsága  $F_{max} = 30$  N. Mekkora egyenletes gyorsulással mozoghat a kocsi, hogy a fonal még éppen el ne szakadjon?

**Megoldás:** Jelölje  $\alpha$  azt a szöveget, amelyet a gyorsítás alatt a kötél bezár a függőlegessel (lásd a 9. ábrát). Ekkor az  $F$  kötélrő vízszintes komponense gyorsítja a testet

$$ma = F \sin \alpha, \quad (3.2.1)$$

míg a függőleges komponens a súlyerővel tart egyensúlyt

$$mg = F \cos \alpha. \quad (3.2.2)$$

A két egyenletből a gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = \sqrt{\frac{F_{max}^2}{m^2} - g^2}. \quad (3.2.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $a_{max} \approx 11,18$  m/s<sup>2</sup> adódik.

**3.3. Feladat:** (HN 5B-19) Nyugalomból induló test súrlódásmentesen csúszik le a vízszintessel  $\alpha = 30^\circ$ -os szöveget bezáró lejtőn.

- (a) Határozzuk meg azt a  $t_0$  időpillanatot amikor a test eléri a  $v_0 = 50$  m/s-os sebességet?  
 (b) Mekkora  $s$  távolságba jut el ezalatt a test?

**Megoldás:**

(a) Az  $m$  tömegű test mozgásegyenlete

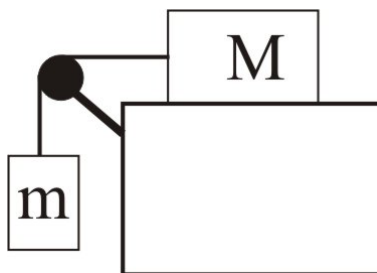
$$ma = mg \sin \alpha, \quad (3.3.1)$$

amiből a test gyorsulása

$$a = g \sin \alpha. \quad (3.3.2)$$

A test sebessége az idő függvényében

$$v(t) = g \sin \alpha t. \quad (3.3.3)$$



10. ábra.

A  $t_0$  időpillanatban a test eléri a  $v_0$  sebességet, azaz  $v(t_0) = v_0$ . A sebesség eléréséhez szükséges idő pedig  $t_0 = v_0/(g \sin \alpha)$ . Behelyettesítve a számadatokat  $t_0 = 10$  s adódik.

(b) A  $t_0$  idő alatt megtett út

$$s = \frac{1}{2}gt_0^2 \sin \alpha. \quad (3.3.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $s = 250$  m adódik.

**3.4. Feladat:** (HN: 5B-33) Az  $m$  és  $M = 8$  kg tömegű hasábokat az 10. ábrán látható elrendezésben fonállal kötünk össze. A csiga tengelysúrlódása és az érintkező felületek közötti súrlódás elhanyagolható.

(a) Mekkora az alsó test  $m$  tömege, ha a testek gyorsulása  $a = 2$  m/s<sup>2</sup>?

(b) Mekkora  $K$  erő feszíti a fonalat?

Megoldás:

(a) Mivel a hasábokat összekötő kötélnem nyúlik meg, mindkét hasáb gyorsulása ugyanakkora (lásd a 11. ábrát.) Az egyes hasábok mozgásegyenletei

$$ma = mg - K \quad (3.4.1)$$

és

$$Ma = K. \quad (3.4.2)$$

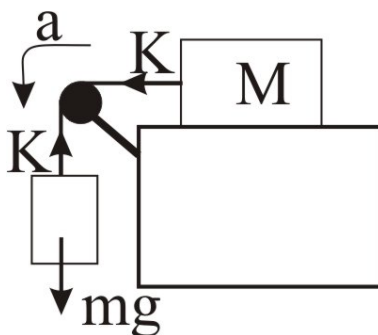
E két egyenletből

$$m = \frac{Ma}{g - a} = 2 \text{ kg} \quad (3.4.3)$$

adódik.

(b) A kötelet feszítő erő pedig

$$K = \frac{mM}{m + M}g = 16 \text{ N}. \quad (3.4.4)$$



11. ábra.

## Centripetális erő

**3.5. Feladat:** Egy  $m = 70$  kg tömegű pilóta repülőgéppel  $R = 1$  km sugarú függőleges síkú pályán  $v = 1080$  km/h egyenletes sebességgel köröz. A repülőnek állandóan a teteje néz a körpálya középpontja felé. Mekkora erővel nyomja a pilóta az ülést a körpálya legfelső pontján?

**Megoldás:** A körpálya legfelső pontjában a pilóta körmozgását az  $mg$  súlyerő és a kör közepe felé mutató  $N$  támaszerő biztosítja:

$$m \frac{v^2}{R} = mg + N \quad (3.5.1)$$

Ebből az egyenletből az  $N$  támaszerő könnyen kifejezhető:

$$N = m \frac{v^2}{R} - mg = 5600 \text{ N}. \quad (3.5.2)$$

A pilóta az ülést ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú erővel nyomja. (A nyomóerő a pilóta súlyának nyolcszorosa.)

**3.6. Feladat:** (HN 5B-20) Egy gépkocsi  $R = 18$  m sugarú, függőleges síkú, kör alakú domboldalon mozog felfelé. A domb tetején a vezető azt tapasztalja, hogy éppen csak érinti az ülést. Mekkora sebességgel haladt a gépkocsi?

**Megoldás:** A domb tetején két erő hat a vezetőre, melyek biztosítják a vezető körpályán történő mozgását. A kör közepe felé mutató  $mg$  súlyerő, valamint az ülés által kifejtett, ellentétes irányú  $N$  támaszerő határozzák meg a vezető gyorsulását, mely (feltéve, hogy az autó nem válik el az úttesttől) a centripetális gyorsulással egyenlő:

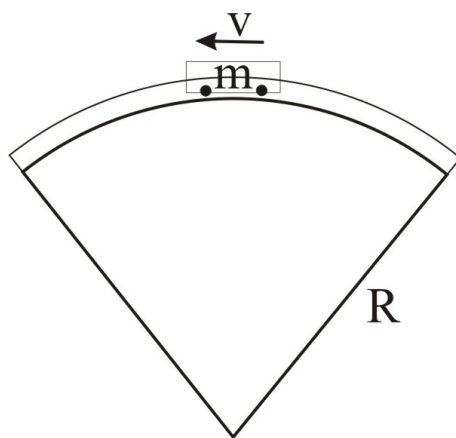
$$m \frac{v^2}{R} = mg - N. \quad (3.6.1)$$

Határesetben, amikor a vezető éppen csak érinti az ülést,  $N \rightarrow 0$ . A határesethez tartozó sebesség:

$$v = \sqrt{Rg} \approx 13,41 \text{ m/s.} \quad (3.6.2)$$

**3.7. Feladat:** (HN 5B-21) A hullámvasút kocsija állandó  $v = 6 \text{ m/s}$ -os sebességgel halad át a pálya  $R = 6 \text{ m}$  sugarú, függőleges síkú részének tetőpontján a 12. ábrán látható módon. A kocsi és az utasok együttes tömege  $m = 1350 \text{ kg}$ .

- Mekkora és milyen irányú a kocsi gyorsulása a tetőponton?
- Mekkora eredő erő hat ebben a pillanatban a kocsira és az utasokra összesen?
- Mekkora erővel nyomja a pálya a kocsit a tetőponton?



12. ábra.

Megoldás:

(a) A kocsi gyorsulása a kör közepe felé (azaz lefelé) mutató centripetális gyorsulással egyenlő, melynek nagysága

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 6 \text{ m/s}^2. \quad (3.7.1)$$

(b) A kocsira ható erők eredőjét a kocsi gyorsulása határozza meg:

$$F = ma_{cp} = 8100 \text{ N.} \quad (3.7.2)$$

(c) A kocsira ható erők eredője a hullámvasút  $N$  támaszerejének és a kocsira ható súlyerőnek a különbsége:

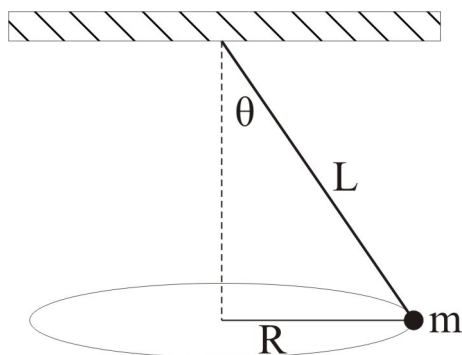
$$F = mg - N. \quad (3.7.3)$$



Felhasználva a centripetális gyorsulás a (3.7.1) kifejezését, valamint a (3.7.2) egyenletet:

$$N = mg - ma_{cp} = 5400 \text{ N.} \quad (3.7.4)$$

**3.8. Feladat:** (HN 5B-31) Egy  $L$  hosszúságú fonállal a mennyezethez erősített testet a 13. ábrán látható módon úgy hozunk mozgásba, hogy a test vízszintes síkú,  $R$  sugarú körpályán mozog, miközben a fonál a függőlegessel  $\theta$  szöget zár be. Fejezzük ki egy fordulat idejét az  $L$  és  $\theta$  paraméterek függvényében!

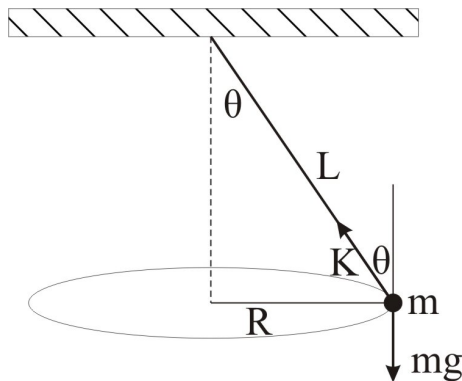


13. ábra.

**Megoldás:** Jelölje  $K$  az  $m$  tömegű testre ható kötél erő nagyságát (lásd a 14. ábrát). Mivel a tömegpont nem mozdul el függőlegesen, a súlyerő egyensúlyt tart a kötél erő függőleges komponensével:

$$K \cos \theta = mg, \quad (3.8.1)$$

míg a vízszintes komponens a körpályán történő mozgáshoz biztosítja a szükséges centripetális



14. ábra.

gyorsulást:

$$K \sin \theta = m \frac{v^2}{R}. \quad (3.8.2)$$

A két egyenletből a tömegpont sebessége (felhasználva, hogy  $R = L \sin \theta$ )

$$v = \sqrt{gL \sin \theta \operatorname{tg} \theta}. \quad (3.8.3)$$

Egy fordulat ideje

$$T = \frac{2R\pi}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}. \quad (3.8.4)$$

**3.9. Feladat:** (HN: 5B-32) Egy  $L = 1,4$  m hosszú fonálinga függőleges síkban mozog. Amikor az ingatest sebessége  $v = 2,2$  m/s, akkor a fonál  $\alpha = 20^\circ$ -os szöget zár be a függőlegessel. Határozzuk meg ebben a pillanatban

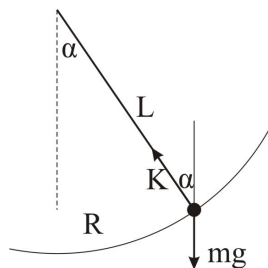
- az ingatest  $a_{cp}$  centripetális gyorsulását,
- az ingatest  $a_t$  tangenciális gyorsulását,
- a fonalat feszítő  $K$  erőt, ha az ingatest tömege  $m = 600$  g!

Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás nagysága:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{L} \approx 3,45 \text{ m/s}^2. \quad (3.9.1)$$

(b) A tangenciális gyorsulást a súlyerő tangenciális komponense határozza meg (a kötél erő merőleges a körpálya érintőjére, ahogy azt a 15. ábra mutatja):



15. ábra.

$$a_t = g \sin \alpha \approx 3,40 \text{ m/s}^2. \quad (3.9.2)$$

A körmozgást a  $K$  kötél erő és a súlyerő fonálirányú komponense —  $mg \cos \alpha$  — különbsége biztosítja. A mozgásegyenlet a radiális komponensekre

$$m \frac{v^2}{L} = K - mg \cos \alpha. \quad (3.9.3)$$

Az egyenletből kifejezhető a  $K$  kötél erő:

$$K = m \frac{v^2}{L} + mg \cos \alpha \approx 7,7 \text{ N}. \quad (3.9.4)$$

## Súrlódási erő

**3.10. Feladat:** Vízszintes asztallapon két téglá fekszik egymáson. Minimálisan mekkora  $F$  erővel kell hatni az alsó téglára, hogy az kicsússzon a felső alól? A tapadási tényező az asztallap és a téglá, valamint a két téglá között  $\mu = 0,4$ , a két téglá össztömege pedig  $m = 5$  kg.

**Megoldás:** Jelölje a felső test tömegét  $m_1$ , az alsó test tömegét pedig  $m_2$ . Ekkor  $m = m_1 + m_2 = 5$  kg. Legyen ezen felül  $a_1$  a felső test,  $a_2$  pedig az alsó test gyorsulása. A felső téglára  $F_{s1} = \mu m_1 g$  tapadási erő hat, mellyel a téglá mozgásegyenlete:

$$m_1 a_1 = F_{s1} = \mu m_1 g \quad (3.10.1)$$

Az alsó téglára a felső téglá által kifejtett  $F_{s1}$  tapadási erő mellett, az alsó téglá és asztallap között fellépő  $F_{s2} = \mu(m_1 + m_2)g$  tapadási erő is hat, melyek fékezni próbálják az alsó téglá mozgását. Az alsó téglá mozgásegyenlete:

$$m_2 a_2 = F - \mu m_1 g - \mu(m_1 + m_2)g = F - \mu m_1 g - \mu m g. \quad (3.10.2)$$

Az első egyenletből kifejezve az  $a_1$  gyorsulást

$$a_1 = \mu g \quad (3.10.3)$$

adódik, amely az  $m_1$  test maximális gyorsulását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a minimális  $F$  erő esetén még nem válnak el, és  $a = a_1 = a_2$  írható. Ezzel a második mozgásegyenletbe a  $\mu m_1 g$  helyére  $m_1 a$ -t helyettesítve

$$m_2 a = F - m_1 a - \mu(m_1 + m_2)g. \quad (3.10.4)$$

Ezt az  $F$  erőre átrendezve a minimális erő

$$F = (m_1 + m_2)a + \mu(m_1 + m_2)g = ma + \mu m g = 40 \text{ N}. \quad (3.10.5)$$

**Megjegyzés:** A feladatmegoldásból látszik, hogy a kérdés megválaszolásához csak az össztömegekre volt szükség. Kisebb vagy nagyobb erő alkalmazásakor az egyenletekből levont következtetések módosulhatnak! Ezeknek diszkussziója gyakorló feladat.

**3.11. Feladat:** Egy autó az országúton nagy sebességgel halad. Az autógumi és az úttest felülete között a tapadási súrlódási együttható  $\mu = 0,9$ . Az  $R = 100$  m sugarú, vízszinten kanyarban mekkora lehet a jármű maximális sebessége, hogy ne sodródjon ki?

**Megoldás:** A kanyarban az  $F$  tapadási súrlódási erő biztosítja az autónak a körmozgáshoz szükséges centripetális gyorsulást:

$$m \frac{v^2}{R} = F. \quad (3.11.1)$$

A maximális tapadási erő  $F_{max} = \mu mg$  felső határt szab az autó maximális sebességének is, mely az alábbi egyenlőtlenséggel fejezhető ki:

$$m \frac{v^2}{R} \leq F_{max} = \mu mg. \quad (3.11.2)$$

Maximális sebesség esetén egyenlőség áll fenn az egyenlet két oldala között, ezért a maximális sebesség nagysága:

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R}. \quad (3.11.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $v_{max} = 30$  m/s adódik.

**3.12. Feladat:** (HN 5B-43) Egy gyerek a parttól  $s = 12$  m-re áll a befagyott tavacska jegén. Csizmája és a jég közötti tapadási súrlódási együttható  $\mu = 0,05$ . Határozzuk meg azt a minimális időt, amely alatt kisétálhat a partra, ha megcsúszás nélkül lépked?

**Megoldás:** A gyerek  $F = \mu mg$  erővel nyomja a jeget, ezért csúszás nélkül legfeljebb  $a = \mu g$  gyorsulásra képes. Az  $s$  út megtételéhez ezért legkevesebb

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{\mu g}} = 6,93 \text{ s} \quad (3.12.1)$$

idő szükséges.

**3.13. Feladat:** (HN 5B-44) Egy rakodórámpán láda nyugszik. Ha a rámpa szöge  $\alpha_1 = 30^\circ$ -os, akkor a láda megcsúszik. Amennyiben a csúszó láda alatt a lejtő hajlásszöge  $\alpha_2 = 20^\circ$ -ra csökken, akkor a láda mozgása egyenletessé válik. Határozzuk meg a lejtő és a láda közötti csúszási és tapadási súrlódási együttható értékét!

**Megoldás:** A feladatban jelölje  $\mu_t$  a tapadási és  $\mu_{cs}$  a csúszási súrlódási együtthatót. Nyugalmi helyzetben a tapadási súrlódási erő egyensúlyt tart a súlyerő lejtővel párhuzamos komponensével, ezért

$$ma = 0 = mg \sin \alpha_1 - \mu_t g \cos \alpha_1. \quad (3.13.1)$$

Az egyenletből

$$\mu_t = \operatorname{tg} \alpha_1 \approx 0,577 \quad (3.13.2)$$

tapadási súrlódási együttható adódik. Egyenletes gyorsulás esetén a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense a csúszási súrlódási együtthatóval tart egyensúlyt:

$$ma = 0 = mg \sin \alpha_2 - \mu_{cs} g \cos \alpha_2. \quad (3.13.3)$$

Az egyenletből

$$\mu_{cs} = \operatorname{tg} \alpha_2 \approx 0,364. \quad (3.13.4)$$

csúszási súrlódási együttható adódik.

**3.14. Feladat:** (HN 5B-46) Az  $m = 5$  kg-os tömegű test lecsúszik a vízszintessel  $\alpha = 41^\circ$  szöget bezáró lejtőn. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható  $\mu = 0,3$ .

- Határozzuk meg a súrlódási erő nagyságát!
- Mekkora gyorsulással csúszik le a test?

**Megoldás:**

(a) A lejtőn lecsúszó testre ható  $N$  támaszerő (kényszererő) egyensúlyt tart a súlyerő lejtőre merőleges komponensével, ezért  $N = mg \cos \alpha$ . A csúszási súrlódási erő pedig

$$F_s = \mu N = \mu mg \cos \alpha \approx 11,32 \text{ N}. \quad (3.14.1)$$

(b) A test lejtővel párhuzamos mozgását a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense és a súrlódási erő határozzák meg:

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (3.14.2)$$

ahonnan a test gyorsulása

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \approx 4,3 \text{ m/s}^2. \quad (3.14.3)$$

**3.15. Feladat:** (HN 5B-47) A vízszintessel  $\alpha = 60^\circ$ -os szöget bezáró lejtőn egy test  $a = g/2$  gyorsulással csúszik le. Mekkora a csúszó súrlódási együttható?

**Megoldás:** A lejtővel párhuzamos mozgást leíró dinamikai egyenlet:

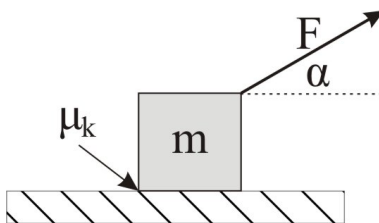
$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha. \quad (3.15.1)$$

Behelyettesítve a gyorsulás értékét a súrlódási együttható az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\mu = \frac{\sin \alpha - \frac{1}{2}}{\cos \alpha}. \quad (3.15.2)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $\mu \approx 0,732$  adódik a súrlódási együttható értékére.

**3.16. Feladat:** (HN 5B-52) Egy  $m = 4$  kg tömegű testet a 16. ábrának megfelelően  $F = 20$  N erővel húzunk ( $\alpha = 30^\circ$ ). Mekkora a test gyorsulása, ha a test és talaj közötti csúszási súrlódási együttható  $\mu_k = 0,2$ ?



16. ábra.

**Megoldás:** Mivel a test nem emelkedik fel a talajról a függőleges gyorsulása zérus. Ezért

$$0 = N + F \sin \alpha - mg, \quad (3.16.1)$$

ahol  $N$  a testre ható támaszerő. Írjuk fel a mozgás vízszintes vetületére vonatkozó mozgásegyenletet!

$$ma = F \cos \alpha - F_s, \quad (3.16.2)$$

ahol  $F_s$  a testre ható súrlódási erő, melyet az  $N$  támaszerő segítségével határozhatunk meg:

$$F_s = \mu_k N. \quad (3.16.3)$$

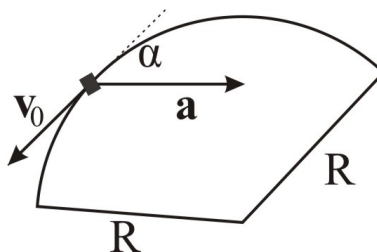
Az egyenletrendszer megoldásából a test gyorsulása meghatározható:

$$a = \frac{F(\cos \alpha + \mu_k \sin \alpha)}{m} - \mu_k g. \quad (3.16.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $a \approx 2,83$  m/s<sup>2</sup> adódik.

**3.17. Feladat:** (HN 5B-58) Egy gépkocsi  $R = 80$  m sugarú vízszintes körpályán mozog. A 17. ábra azt a pillanatot mutatja, amikor az autó sebessége éppen  $v_0 = 10$  m/s és a gyorsulása  $\mathbf{a}$ , mely a körpálya érintőjével  $\alpha = 35^\circ$ -os szöget zár be.

- (a) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása?  
 (b) Mekkora a tangenciális gyorsulás?  
 (c) Mekkora utat tesz meg a gépkocsi a megállásig, ha az érintő menti gyorsulása állandó?  
 (d) Az úttest vízszintes, azaz a kanyarban nem túlemelt pálya. Mekkora minimális nyugalmi súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy az ábrán mutatott pillantban a gépkocsi ne csússzon meg?



17. ábra.

### Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás az autó sebességének és a kanyar görbületi sugarának segítségével határozható meg:

$$a_{cp} = \frac{v_0^2}{R}. \quad (3.17.1)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $a_{cp} = 1,25$  m/s<sup>2</sup> adódik.

(b) Az ábra segítségével meghatározhatjuk az  $\mathbf{a}$  gyorsulásvektor nagyságát is. Felhasználva, hogy az  $\mathbf{a}$  vektor sugár irányú vetülete éppen a centripetális gyorsulás, az eredő gyorsulás nagysága

$$a = |\mathbf{a}| = \frac{a_{cp}}{\sin \alpha}. \quad (3.17.2)$$

A tangenciális gyorsulás pedig az

$$a_t = a \cos \alpha = \frac{a_{cp}}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (3.17.3)$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat  $a_t \approx 1,79$  m/s<sup>2</sup> adódik.

(c) Amennyiben a kocsi lassul, de a tangenciális gyorsulása állandó, a kocsi megállásáig megtett út meghatározható az alábbi összefüggésből:

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2} a_t t_0^2, \quad (3.17.4)$$

ahol  $t_0 = v_0/a_t$  a megállásig eltelt idő. Behelyettesítve a számadatokat  $s \approx 27,9$  m adódik a megállásig megtett út hosszára.

(d) A dinamika alapegyenlete szerint

$$ma = F_s = \mu mg, \quad (3.17.5)$$

amelyből a minimális súrlódási együttható, mely mellett a kocsى még épp nem csúszik meg,  $\mu \approx 0,218$ .

**3.18. Feladat:** \* A vízszintes asztalon  $m$  tömegű test nyugszik. A test és az asztallap közötti súrlódási együttható  $\mu$ . (A tapadási és csúszási súrlódási együttható legyen azonos.) A testre a  $t = 0$  időpillanattól kezdve  $F(t) = f_0 t$  erővel hatunk.

- Mi az  $f_0$  együttható mértékegysége?
- Mikor indul el a test?
- Mekkora lesz a test sebessége a  $t$  időpillanatban?

Megoldás:

(a) Az  $f_0$  együttható mértékegysége N/s, mivel idő dimenziójú mennyiséggel megszorozva erő dimenziójú mennyiséget kell, hogy kapjunk.

(b) A test abban a  $t_0$  pillanatban indul el, amikor a rá ható erő eléri a tapadási erő maximumát, azaz  $F(t_0) = f_0 t_0 = \mu mg$ , ahonnan

$$t_0 = \frac{\mu mg}{f_0}. \quad (3.18.1)$$

(c) A test mozgásegyenlete a megmozdulás pillanatát követő  $t \geq t_0$  időintervallumban:

$$ma = f_0 t - \mu mg \quad (3.18.2)$$

Az egyenletből kifejezhetjük a gyorsulást az idő függvényében:

$$a(t) = \frac{f_0}{m} t - \mu g. \quad (3.18.3)$$

A sebességet a gyorsulás idő szerinti integrálásával határozhatjuk meg:

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t') dt' = \int_{t_0}^t \left( \frac{f_0}{m} t' - \mu g \right) dt' = \frac{1}{2} \frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 m g^2}{f_0}. \quad (3.18.4)$$

Tehát a test sebessége:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha: } t \leq t_0 \\ \frac{1}{2} \frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 m g^2}{f_0} & \text{ha: } t > t_0 \end{cases}. \quad (3.18.5)$$



**3.19. Feladat:** Egy függőleges tengelyű korong  $\omega_0$  szögsebességgel forog. A korong közepétől  $R$  távolságban  $m$  tömegű test helyezkedik el. A korong és a test között  $\mu$  tapadási súrlódási együttható van. A korong egyenletes lassulásba kezd. Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, hogy a test ne csússzon meg?

Megoldás: A korong szögsebessége az

$$\omega(t) = \omega_0 - \beta t \quad (3.19.1)$$

függvény szerint változik. Ezért a korongon lévő test centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = R\omega(t)^2 = R(\omega_0 - \beta t)^2. \quad (3.19.2)$$

A test tangenciális gyorsulása pedig

$$a_t = R\beta. \quad (3.19.3)$$

A test eredő gyorsulása

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}, \quad (3.19.4)$$

melyet a tapadási erő biztosít a test számára. A tapadás feltétele, hogy

$$\mu mg \geq ma = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}. \quad (3.19.5)$$

A tapadási súrlódási együttható ezért:

$$\mu \geq \frac{\sqrt{R^2(\omega_0 - \beta t)^4 + (R\beta)^2}}{g}. \quad (3.19.6)$$

A legnagyobb tapadás a lassulás kezdeti pillanatában szükséges, ezért a minimális tapadási együttható

$$\mu_{min} = R \frac{\sqrt{\omega_0^4 + \beta^2}}{g}. \quad (3.19.7)$$

**3.20. Feladat:** Egy  $\omega_0 = 6$  1/s szögsebességű,  $R = 0,2$  m sugarú függőleges tengelyű korong peremén van egy  $m$  tömegű test. A korong  $\beta = 2$  1/s<sup>2</sup> szöggyorsulással lassul, majd megáll.

- Mennyi idő alatt állt meg?
- Mennyi volt a korong szögelfordulása?
- Mennyi utat tett meg az  $m$  tömegű test?
- Legalább mekkora  $\mu$  súrlódási együttható kell, hogy legyen a korong és az  $m$  tömegű test között, hogy a test ne csússzon le a korongról?

Megoldás:

(a) Az

$$\omega_0 = \beta t \quad (3.20.1)$$

összefüggésből következik, hogy a megállás ideje  $t = 3$  s.(b) Ezalatt a  $\varphi$  szögelfordulás

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2} \beta t^2 = 9 \text{ rad.} \quad (3.20.2)$$

(c) A megtett út

$$s = R\varphi = 1,8 \text{ m.} \quad (3.20.3)$$

(d) A test gyorsulása az  $a_t = R\beta$  tangenciális és az  $a_{cp} = R\omega^2$  centripetális gyorsulásból áll. Ez utóbbi a kezdeti idopontban a legnagyobb, így a maximális súrlódási együttható kiszámolásánál ezzel az értékkel kell számolni. Az eredő gyorsulás nagysága:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{R^2\beta^2 + R^2\omega^4}. \quad (3.20.4)$$

A testet a súrlódási erő mozgatja, így

$$ma = \mu mg, \quad (3.20.5)$$

amelybe behelyettesítve kapjuk:

$$\mu = \frac{1}{g} \sqrt{R^2\beta^2 + R^2\omega^4} = 0,72. \quad (3.20.6)$$

**3.21. Feladat:** Tuskót helyezünk állóhelyzetből felgyorsuló vízszintes forgóasztalra tengelyétől 10 cm távolságban. A forgóasztal  $2/3$  s alatt éri el a 2 rad/s szögsebességet és ekkor a tuskó csúszni kezd. Mekkora a tapadási súrlódási erő a tuskó és az asztal között?

Megoldás: A tuskó szöggyorsulása

$$\beta = \frac{\omega}{t} = 3 \text{ rad/s}^2, \quad (3.21.1)$$

a kerületi sebessége

$$v = R\omega = 0,2 \text{ m/s.} \quad (3.21.2)$$

A test eredő gyorsulása a centripetális és tangenciális gyorsulásokból tevődik össze:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2}. \quad (3.21.3)$$

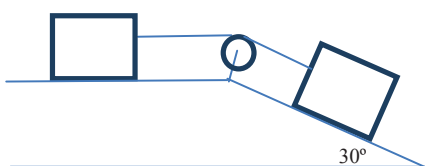
Ezt a gyorsulást a  $\mu mg$  tapadási súrlódási erő biztosítja:

$$\mu mg = ma = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = m\sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2}. \quad (3.21.4)$$

Innen a tapadási súrlódási együttható:

$$\mu = \frac{1}{g}\sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2} = 0,05. \quad (3.21.5)$$

**3.22. Feladat:** A 18. ábrán két, egyenként  $m = 40$  kg tömegű test van összekapcsolva. A súrlódási együttható mindkét testre  $\mu = 0,15$ . Határozzuk meg a testek gyorsulását és a fonálban ébredő  $K$  kötélterőt!



18. ábra.

**Megoldás:** Jelölje  $a$  a testek gyorsulását. (Mivel a kötel nem nyúlik meg, mindkét test azonos gyorsulással mozog) A baloldali test mozgásegyenlete

$$ma = K - \mu mg, \quad (3.22.1)$$

míg a lejtőn fekvő test mozgásegyenlete

$$ma = mg \sin \alpha - K - \mu mg \cos \alpha \quad (3.22.2)$$

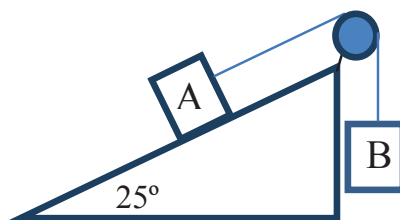
A két egyenletből meghatározható a testek gyorsulása:

$$a = \frac{1}{2}(g \sin \alpha - \mu g - \mu g \cos \alpha). \quad (3.22.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $a \approx 1,1$  m/s<sup>2</sup> adódik. A kötélterőt a (3.22.1) egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$K = ma + \mu mg = \frac{\sin \alpha + \mu - \mu \cos \alpha}{2} mg. \quad (3.22.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $K \approx 104$  N adódik.



19. ábra.

**3.23. Feladat:** A vízszintessel  $\alpha = 25^\circ$ -os szöget bezáró lejtőn nyugalmi helyzetből indulva  $m_A = 30$  kg tömegű testet a 19. ábrán látható módon  $m_B = 20$  kg tömegű test húz felfelé. A súrlódási együttható  $\mu = 0,2$ .

- (a) Számoljuk ki a testek gyorsulását!  
 (b) Számoljuk ki a testek által  $t_0 = 2$  s alatt megtett utat!

Megoldás:

(a) Jelölje  $K$  a kötélet feszítő erőt és  $a$  a testek gyorsulását. A testek mozgásegyenlete:

$$m_A a = K - m_A g \sin \alpha - \mu m_A g \cos \alpha \quad (3.23.1)$$

és

$$m_B a = m_B g - K. \quad (3.23.2)$$

E két egyenletből a gyorsulás kifejezhető:

$$a = \frac{m_B - m_A \sin \alpha - \mu m_A \cos \alpha}{m_A + m_B} g. \quad (3.23.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $a \approx 0,0376$  m/s<sup>2</sup> adódik.

(b) A testek által megtett út  $t_0$  idő alatt, amennyiben a testek nyugalmi helyzetből indulnak:

$$s = \frac{1}{2} a t_0^2. \quad (3.23.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $s \approx 7,5$  cm adódik.

**3.24. Feladat:** Az  $\alpha$  hajlásszögű lejtőn  $a$  gyorsulással lefele csúszik a  $k$  direkciónerejű rugóval összekötött  $m_1$  és  $m_2$  tömegű testekből álló rendszer, mégpedig úgy, hogy az  $m_1$  megy elől. A lejtő és a testek közötti súrlódási tényező rendre  $\mu_1$  és  $\mu_2$ .

- (a) Fejezzük ki a rendszer gyorsulását.  
 (b) Mekkora a rugó megnyúlása?

**Megoldás:** Jelölje  $F_r$  az ebredő rugóerőt. Legyen a koordinátarendszer  $x$  tengelye lejtőirányú.

(a) E koordinátarendszer irányítás mellett két test mozgásegyenlete sorban

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha - F_r \quad (3.24.1)$$

és

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha + F_r. \quad (3.24.2)$$

A két egyenletből a

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \alpha - (\mu_1 m_1 g \cos \alpha + \mu_2 m_2 g \cos \alpha)}{m_1 + m_2}. \quad (3.24.3)$$

gyorsulás adódik.

(b) A gyorsulás visszahelyettesítésével a kapott rugóerő

$$F_r = (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \alpha. \quad (3.24.4)$$

Ezzel a rugó megnyúlása

$$\Delta l = \frac{F_r}{k} = \frac{1}{k} (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \alpha. \quad (3.24.5)$$

Látható, hogy ha  $\mu_2 > \mu_1$ , akkor a rugó megnyúlik, mert  $\Delta l > 0$ ; ellenkező esetben összenyomódik. Ha a kettő egyenlő egymással, akkor a megnyúlás zérus.

## Közegellenállási erők

**3.25. Feladat:** Az  $R$  sugarú vasgolyó vízben süllyed. Ismeretes, hogy hosszabb idő elteltével közegben a testek állandó sebességgel esnek. Sebességgel arányos közegellenállást feltételezve mekkora lesz a vasgolyó  $v$  végsebessége? Az arányossági tényező legyen:  $c = 6\pi\eta R$  (Stokes-féle ellenállás; kis sebességek eseteire), ahol  $\eta$  a közeg viszkozitása,  $R$  a közegben mozgó golyó sugara.

**Megoldás:** Jelölje  $\rho_{Fe}$  a vas, míg  $\rho_{H_2O}$  a víz sűrűségét. A koordinátatengely mutasson lefele! (Ez a pozitív irány.) A testre három erő hat. Az

$$mg = \rho_{Fe} \frac{4R^3 \pi}{3} g$$

nehézségi erő, amely most pozitív; a pillanatnyi sebességgel ellentétes közegellenállás, amely – mivel a test süllyed, tehát  $v$  pozitív –, azért a közegellenállási erő negatív:

$$-cv = -6\pi\eta Rv;$$

valamint a felhajtó erő, amely felfele mutat

$$-\rho_{H_2O} \frac{4R^3\pi}{3} g,$$

így most negatív. Mivel azt az esetet vizsgáljuk, amikor a test már állandó sebességgel süllyed, így tudjuk, hogy a testre ható erők eredője zérus. Felírhatjuk tehát a következő egyenletet

$$0 = \rho_{Fe} \frac{4R^3\pi}{3} g - 6\pi\eta Rv - \rho_{H_2O} \frac{4R^3\pi}{3} g, \quad (3.25.1)$$

amelyből a kért  $v$  sebesség

$$v = (\rho_{Fe} - \rho_{H_2O}) \frac{2R^2}{9\eta} g. \quad (3.25.2)$$

Megjegyzés: Ez a számolás az alapja annak a módszernek, amellyel a folyadékok viszkozitását meg lehet határozni.

**3.26. Feladat:** Az  $m$  tömegű golyó levegőben esik a homogén nehézségi erőterben. A golyóra a sebesség négyzetével arányos közegellenállás hat. (Az arányossági tényezőt jelöljük  $c'$ -vel.) Mekkora a golyó végsebessége? (A felhajtóerőtől tekintsünk el.)

**Megoldás:** Amikor a test eléri végsebességét, akkor a ráható erők eredője zérus, így — lefele mutató koordinátatengely irányítást véve — a

$$0 = mg - c'v^2 \quad (3.26.1)$$

összefüggés írható fel. Ebből a végsebesség

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c'}}. \quad (3.26.2)$$

**3.27. Feladat:** \*\* Az  $m$  tömegű testet a koordinátarendszer origójából  $v_0$  sebességgel a vízszinteshez képest  $\alpha$  szöggel elhajítunk a homogén nehézségi erőterben. A testre az  $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$  sebességgel arányos közegellenállás is hat, ahol  $c$  konstans arányossági tényező.)

- Írjuk fel a mozgásegyenletet!
- Határozzuk meg a sebességkomponensek időbeli változását!
- Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!
- Határozzuk meg a pálya alakját!

**Megoldás:** Amennyiben az  $y$  tengely pozitív irányba felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás vektora

a  $\mathbf{g} = (0, -g)$  alakban adható meg. A gyorsulás és sebesség vektorok pedig rendre  $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$  és  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  alakúak. A  $t_0 = 0$  időpillanatban a kezdeti sebességkomponensek  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$  valamint  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ . Mivel a koordináta-rendszer origóját a hajítás helyére tesszük, a kezdeti pozíció koordinátáit jelöljük  $x_0 = 0$  és  $y_0 = 0$ .

(a) Az elhajított testre két erő hat, az  $m\mathbf{g}$  súlyerő valamint a  $-c\mathbf{v}$  közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - c\mathbf{v}. \quad (3.27.1)$$

Írjuk fel az  $\mathbf{a}$  vektor  $x$  és  $y$  komponenseire vonatkozó skaláregyenleteket. Felhasználva, hogy  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$  és  $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ , az

$$ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = -cv_x \quad (3.27.2)$$

és

$$ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = -mg - cv_y \quad (3.27.3)$$

egyenleteket kapjuk.

(b) A (3.27.2) és (3.27.3) egyenletek egymástól függetlenek (azaz nem csatolt differenciálegyenlet-rendszert írnak le), aminek köszönhetően szeparált egyenleteket kapunk a mozgás  $x$  és  $y$  vetületére. A (3.27.2) egyenletben szeparálva a változókat és idő szerint integrálva az egyenletet:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{c}{m} \int_{t_0=0}^t dt'. \quad (3.27.4)$$

Az integrálás elvégzése után

$$\ln \frac{v_x(t)}{v_{0x}} = -\frac{c}{m} t \quad (3.27.5)$$

adódik, ahonnan a sebesség  $x$  komponense

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\frac{c}{m} t}. \quad (3.27.6)$$

Hasonló módon a (3.27.3) egyenletben is szeparáljuk az integrálási változókat:

$$m \int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{dv_y}{mg + cv_y} = - \int_{t_0=0}^t dt'. \quad (3.27.7)$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c} \ln \frac{mg + cv_y(t)}{mg + cv_{0y}} = -t, \quad (3.27.8)$$

összefüggéshez jutunk, melyből az  $y$  irányú sebességkomponens

$$v_y(t) = \frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m} t} - \frac{mg}{c}. \quad (3.27.9)$$

*Megjegyzés:* Belátható, hogy a  $c \rightarrow 0$  határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes  $v_x(t) = v_{0x}$  illetve  $v_y(t) = v_{0y} - gt$  megoldásokba tartanak. Ennek igazolását az olvasóra bízuk.

(c) A test helykoordinátáit a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$x(t) = \int_{t_0=0}^t v_{0x} e^{-\frac{c}{m}t'} dt' = \left[ -\frac{m}{c} v_{0x} e^{-\frac{c}{m}t'} \right]_{t_0=0}^t = \frac{m}{c} v_{0x} (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) \quad (3.27.10)$$

és

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0=0}^t \left( \frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} \right) dt' = \left[ -\frac{m}{c} \frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} t \right]_{t_0=0}^t \\ &= \frac{m}{c} \frac{mg + cv_{0y}}{c} \left( 1 - e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c} t \right). \end{aligned} \quad (3.27.11)$$

*Megjegyzés:* Belátható, hogy a  $c \rightarrow 0$  határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes  $x(t) = v_{0x}t$  illetve  $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$  megoldásokhoz tartanak. Ezeknek igazolását az olvasóra bízuk.

(d) A pályagörbe alakját megkapjuk, ha a (3.27.10) egyenletből kiküszöböljük a  $t$  időváltozót:

$$t = -\frac{m}{c} \ln \left( 1 - \frac{cx}{mv_{0x}} \right). \quad (3.27.12)$$

Ezt behelyettesítve a (3.27.11) egyenletbe

$$y(x) = \frac{mg + cv_{0y}}{cv_{0x}} x + \frac{m^2 g}{c^2} \ln \left( 1 - \frac{cx}{mv_{0x}} \right) \quad (3.27.13)$$

adódik. Ezt a pályáját ballisztikus pályának nevezik. *Megjegyzés:* Belátható, hogy a  $c \rightarrow 0$  határesetben a megoldás egy parabola pálya. Másfelől a logaritmus függvény argumentumát megvizsgálva látható, hogy a

$$1 > \frac{cx}{mv_{0x}} \quad (3.27.14)$$

relációnak fenn kell állnia. Innen következik, hogy

$$x < \frac{mv_{0x}}{c}, \quad (3.27.15)$$

azaz ennél az  $x$  távolságnál soha nem megy messzebb a test.

**3.28. Feladat:** \*\* Az  $m$  tömegű testet  $h$  magasságban elejtjük. A testre az  $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$  sebességgel arányos közegellenállás is hat. (A  $c$  konstans arányossági tényező.)

(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!

(b) Határozzuk meg a sebességének időbeli változását!



(c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!

**Megoldás:** Amennyiben a függőleges tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás a negatív irányba gyorsítja az elejtett testet, melyre két erő hat, az  $mg$  súlyerő valamint a  $-cv$  közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$ma = -mg - cv. \quad (3.28.1)$$

Felhasználva, hogy  $a = \frac{dv}{dt}$ , az

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -mg - cv \quad (3.28.2)$$

egyenletet kapjuk.

(a) Szeparáljuk a (3.28.2) egyenletben az integrálási változókat, majd végezzük el az integrálás műveletét:

$$m \int_0^v \frac{dv}{mg + cv} = - \int_{t_0=0}^t dt'. \quad (3.28.3)$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c} \ln \frac{mg + cv(t)}{mg} = -t, \quad (3.28.4)$$

összefüggéshez jutunk, melyből a sebesség kifejezhető:

$$v(t) = \frac{mg}{c} e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \quad (3.28.5)$$

(b) A test helykoordinátáját a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{t_0=0}^t \left( \frac{mg}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} \right) dt' = \left[ -\frac{m}{c} \frac{mg}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} t \right]_{t_0=0}^t \\ &= \frac{m}{c} \frac{mg}{c} (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) - \frac{mg}{c} t. \end{aligned} \quad (3.28.6)$$

## 4. Feladatok munkavégzés és konzervatív erők tárgyköréből. Munkatétel

### Munkavégzés, teljesítmény

**4.1. Feladat:** (HN 6B-8) Egy rúgót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

**Megoldás:** Két megnyúlás van. Az első  $\Delta l = l_1 - l_0 = 10$  cm, amelyre felírható, hogy

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \quad (4.1.1)$$

Innen a  $k$  rugóállandó értéke kifejezhető

$$k = \frac{2W}{(\Delta l)^2} = 800 \text{ N/m}. \quad (4.1.2)$$

A további  $l_2 = 10$  cm nyújtáshoz szükséges munkavégzés

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(l_2 + \Delta l)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 12 \text{ J}. \quad (4.1.3)$$

**4.2. Feladat:** \* (HN 6B-10) Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az  $F = -kx^3$  törvény szerint változik, ahol  $k = 200 \text{ N/m}^3$ . Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

**Megoldás:** A rugó végét  $F'(x) = kx^3$  erővel kell húznunk, így a munka definíciója alapján az általunk végzett munka:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = \int_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} kx^3 dx = \left[ \frac{1}{4}kx^4 \right]_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} = 0,4 \text{ J} \quad (4.2.1)$$

integrállal számolható ki.

**4.3. Feladat:** \* (HN 6B-27) A 200 N súlyú gyerek nyugalmi helyzetben lévő, 3 m-es kötelű hintán ül. A gyerek barátja húzza oldalra, hogy a hinta kötele  $36^\circ$ -os szöget alkosson a függőlegessel. Határozzuk meg mekkora munkára volt ehhez szükség! A feladatot a munka definíciójának felhasználásával oldja meg!

**Megoldás:** Jelölje  $K$  a kötélert,  $\alpha$  a kötel függőlegessel bezárt szögét,  $m$  a gyerek tömegét. Első lépésként azt a szögfüggő erőt kell meghatározni, amellyel a barátja  $F$  erővel vízszintes irányban húzza. Mivel egyensúlyi állapotokon keresztüli mozgásról van szó az erők felírhatjuk, hogy a függőleges komponensekre

$$K \cos \alpha = mg, \quad (4.3.1)$$

a vízszintes komponensekre

$$K \sin \alpha = F. \quad (4.3.2)$$

Innen az  $F$  erő:

$$F = mg \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.3.3)$$

A vízszintes irányú elmozdulás két szöghöz  $\alpha + d\alpha$  és az  $\alpha$  szögekhez tartozó tartozó  $x$  koordináták különbsége, azaz

$$dx = l \sin(\alpha + d\alpha) - l \sin \alpha = l \cos \alpha \cdot d\alpha, \quad (4.3.4)$$

ahol felhasználtuk, hogy kis szögekre érvényesek a

$$\cos(d\alpha) = 1, \quad (4.3.5)$$

$$\sin(d\alpha) = d\alpha \quad (4.3.6)$$

közelítések. Az elemi munka kifejezése

$$dW = mg \operatorname{tg} \alpha \cdot l \cos \alpha \cdot d\alpha = mgl \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (4.3.7)$$

amellyel a teljes végzett munka:

$$W = \int_0^\alpha mgl \sin \alpha \cdot d\alpha = mgl(1 - \cos \alpha). \quad (4.3.8)$$

**4.4. Feladat:** (HN 6B-39) Egy 48 km/h sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

Megoldás: A teljesítmény

$$P = \frac{dW}{dt}, \quad (4.4.1)$$

ahol a  $dW$  elemi munka

$$dW = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (4.4.2)$$

Ezt behelyettesítve a teljesítmény

$$P = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{v} = 12000 \text{ W}. \quad (4.4.3)$$

**4.5. Feladat:** (HN 6C-57) Egy testet a koordinátarendszer origójából egyenes vonalban állandó  $\mathbf{F} = f_1 \hat{\mathbf{x}} + f_2 \hat{\mathbf{y}}$  ( $f_1 = 2\text{N}$ ;  $f_2 = 4\text{N}$ ) erővel az  $\mathbf{r} = s_1 \hat{\mathbf{x}} + s_2 \hat{\mathbf{y}}$  ( $s_1 = 1\text{m}$ ;  $s_2 = 5\text{m}$ ) helyre viszünk. (Az egyenesvonalú egyenletes mozgás fenntartásához természetesen egyéb kényszererők is fellépnek.) Határozzuk meg az  $\mathbf{F}$  erő munkáját

(a) közvetlenül az  $\mathbf{F} \Delta \mathbf{r}$  skaláris szorzattal,

(b) az  $|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$  szorzattal!

### Megoldás:

(a) A munkát a skaláris szorzattal számolva

$$W = f_1s_1 + f_2s_2 = 22\text{ J} \quad (4.5.1)$$

adódik.

(b) Az erő nagysága  $|\mathbf{F}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{20}$  N, míg az elmozdulás nagysága  $|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{26}$  m. A két vektor által bezárt szög

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}}{|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|} = \frac{22}{\sqrt{20}\sqrt{26}}. \quad (4.5.2)$$

A kiszámolt értékeket összeszorozva  $W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta = 22$  J.

**4.6. Feladat:** \* (HN 6C-58) Egy fiú a  $m_0 = 3$  kg tömegű,  $l_0 = 2$  m hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy a másik vége éppen a leér a földre.

(a) Határozzuk meg, hogy miként változik a gyerek által kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel  $s$  távolsággal lejjebb eresztzi!

(b) A  $W = \sum_i \mathbf{F}_i \Delta\mathbf{s}_i$  összegzés vagy a  $W = \int \mathbf{F}d\mathbf{s}$  integrál felhasználásával számítsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez, míg a teljes láncot a földre eresztzi!

### Megoldás:

(a) Jelölje  $\lambda = \frac{m_0}{l_0}$  a hosszegységenkénti tömeget. Az  $s$  távolsággal lejjebb eresztett lánc azon részének tömege, amelyet még tartani kell:

$$m(s) = m_0 - \lambda s = m_0 - \frac{m_0}{l_0}s. \quad (4.6.1)$$

Az ehhez szükséges erő:

$$F(s) = \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0}s\right)g, \quad (4.6.2)$$

amely felfele mutat.

(b) ( $\alpha$ ) A gyerek által végzett munka a görbe alatti terület kiszámolásával. Mivel az  $F(s)$  erő az  $s$  távolság lineáris függvénye, így az  $F(s)$  egyenes, valamint az  $x$  és az  $y$  tengely által határolt derékszögű háromszög területét kell kiszámolni. A háromszög alapja  $l_0$ , a magassága  $F(s=0) = m_0g$ , így a terület  $\frac{1}{2}m_0gl_0$ . Figyelembe véve, hogy az elmozdulás a ható erővel ellentétes előjelű a végzett munka:

$$W = -\frac{1}{2}m_0gl_0. \quad (4.6.3)$$

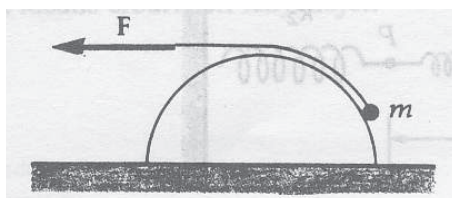
( $\beta$ ) A gyerek által végzett munka integrállal:

$$W = - \int_0^{l_0} F(s) ds = - \int_0^{l_0} \left( m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g ds = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \quad (4.6.4)$$

**4.7. Feladat:** \* (HN 6C-59) A 20. ábrán látható súrlódásmentes félhenger aljáról a tetejére húzunk fel egy  $m$  tömegű testet a henger tetején átvett kötél segítségével.

(a) Határozzuk meg a kötél erőit a hely függvényében!

(b) Az  $\int \mathbf{F} ds$  integrál segítségével határozzuk meg azt a munkát, ami a testnek a henger aljáról a tetejéig való egyenletes sebességű felhúzásához szükséges! A henger sugara  $R$ .



20. ábra.

### Megoldás:

(a) Jelölje  $\varphi$  a tömegponthoz húzott sugár és az  $x$  tengely által bezárt szöget. Az  $mg$  súlyerő mindig  $y$  irányú, az ébredő  $N$  támaszerő kifelé mutató radiális irányú, a  $K$  kötél erő érintő irányú. Így  $v$  sebességű mozgás esetén a radiális komponensekre az

$$ma_{cp} = m \frac{v^2}{R} = mg \sin \varphi - N, \quad (4.7.1)$$

míg az érintő irányú komponensekre az

$$ma_t = K - mg \cos \varphi \quad (4.7.2)$$

összefüggések állnak fenn.

( $\alpha$ ) Amennyiben a  $v$  sebesség állandó, azaz az  $a_t$  tangenciális gyorsulás zérus, így az utóbbi egyenletből a kötél erő:

$$K(\varphi) = mg \cos \varphi. \quad (4.7.3)$$

( $\beta$ ) Ha a tangenciális gyorsulás nem zérus  $a = \frac{dv}{dt} \neq 0$ , úgy a kötél erő

$$K(\varphi) = mg \cos \varphi + ma_t = mg \cos \varphi + m \frac{dv}{dt} \quad (4.7.4)$$

(b) Az elmozdulás a henger felületén (a keresztmetszetet tekintve a kör kerületén) lehetséges, amely kis  $d\varphi$  szög esetén

$$ds = R d\varphi. \quad (4.7.5)$$

A végzett munkát a  $W = \int F_s ds$  definíció alapján számoljuk.

( $\alpha$ ) Abban az esetben amikor egyenletes mozgást feltételünk a

$$W = \int_0^{90^\circ} K(\varphi) R d\varphi = \int_0^{90^\circ} mgR \cos \varphi d\varphi = mgR, \quad (4.7.6)$$

integrál adja. Ez az eredmény várható volt, hiszen ez a helyzeti energia megváltozását adja.

( $\beta$ ) Ha figyelembe vesszük, hogy a sebesség nem feltétlenül állandó, akkor a végzett munka a (4.7.4) második tagjának integráltjával

$$W' = \int m \frac{dv}{dt} ds \quad (4.7.7)$$

több. Mivel  $ds = v dt$ , így

$$W' = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dv}{dt} v dt = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2, \quad (4.7.8)$$

ahol  $t_1$  a kezdeti,  $t_2$  a végső időpont, míg  $v_1$  a kezdő-,  $v_2$  a végsebesség. Így az összes végzett munka a nem egyenletes sebességű esetben

$$W = mgR + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (4.7.9)$$

**4.8. Feladat:** \* (HN 6C-73) A 4 kg tömegű, nyugalomban lévő testet a rá ható változó erő az  $x = 2t - 3t^2 + t^3$  függvény szerint mozgat. (Az  $x$ -et méterben, a  $t$ -t másodpercben mérjük.) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez ez az erő a mozgás első három másodpercében!

Megoldás: A test sebessége, mint az idő függvénye:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2 - 6t + 3t^2. \quad (4.8.1)$$

A 3. másodpercben a sebesség  $v(3s) = 11$  m/s. A végzett munka – figyelembe véve, hogy a test nyugalomból indult –

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = 242 \text{ J}. \quad (4.8.2)$$

**4.9. Feladat:** (HN 6C-75) Az  $m$  tömegű test a nehézségi erő hatására szabadon esik. Mutassuk meg, hogy  $h$  távolság megtétele alatt a nehézségi erő átlagos teljesítménye:  $P_{\text{átl}} = m\sqrt{g^3h/2}$ !

**Megoldás:** Az eső test sebessége  $v = gt$ , kinetikus energiája

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2. \quad (4.9.1)$$

A  $h$  magasságból történő eséshez tartozó idő  $t = \sqrt{2h/g}$ . A teljesítmény – a behelyettesítések elvégzése után –

$$P = \frac{E}{t} = m\sqrt{\frac{g^3h}{2}}. \quad (4.9.2)$$

Ez igazolja a feladat állítását.

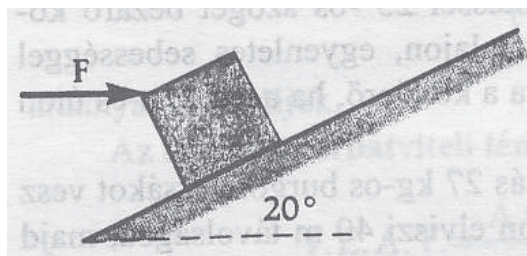
## Munkatétel

**4.10. Feladat:** (HN 6B-23) A 21. ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes 27 N nagyságú erővel tolnak fel egy  $20^\circ$ -os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180.

(a) Mekkora a test gyorsulása?

(b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé!

(c) Válaszoljunk a (b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!



21. ábra.

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 2$  kg;  $F = 27$  N;  $\alpha = 20^\circ$  és  $\mu = 0,180$ .

(a) A mozgásegyenletek felírásához bontsuk fel az  $F$  erőt lejtőirányú, felfele mutató ( $F \cos \alpha$ ) és lejtőre merőlegesen lefele mutató ( $F \sin \alpha$ ) komponensekre. A felfele mozgást pozitív előjelűnek tekintve a lejtő irányú mozgásegyenlet

$$ma = F \cos \alpha - mg \sin \alpha - \mu N. \quad (4.10.1)$$

A  $N$  támaszerő a

$$0 = N - mg \cos \alpha - F \sin \alpha \quad (4.10.2)$$

egyenletből fejezhető ki. A két egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{m} - g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha = 6,74 \text{ m/s}^2. \quad (4.10.3)$$

(b) Az  $s$  út megtétele utáni sebesség

$$v = \sqrt{2sa} = 6,36 \text{ m/s}. \quad (4.10.4)$$

(c) A testre ható lejtőirányú (feléle mutató) eredő erő

$$F' = F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (4.10.5)$$

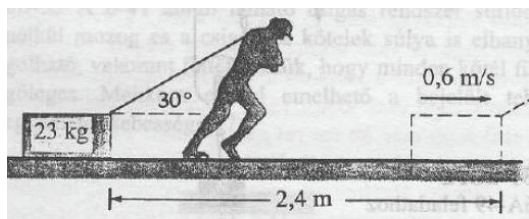
amelynek munkája változtatja meg a test mozgási energiáját

$$\frac{1}{2}mv^2 = F's = (F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha)s. \quad (4.10.6)$$

Innen a  $v$  sebesség

$$v = 6,36 \text{ m/s}. \quad (4.10.7)$$

**4.11. Feladat:** (HN 6B-28) A 22. ábrán látható ember nyugalmi helyzetből indulva 2,4 m távolságra húz el egy 23 kg-os ládát az érdes ( $\mu = 0,5$ ) padlón. A láda végsebessége 0,6 m/s. A munkatétel alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt fejtett ki az ember?



22. ábra.

**Megoldás:** A testre ható erő – ez végzi a gyorsítást – vízszintes komponense:

$$F \cos \alpha - \mu N, \quad (4.11.1)$$



ahol  $N$  az asztaltól a testre ható támaszerő:

$$N = mg - F \sin \alpha. \quad (4.11.2)$$

A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W, \quad (4.11.3)$$

ahol  $W$  a testen végzett munka,  $v_1$  a kezdeti,  $v_2$  végsebesség. A munka kifejezése most

$$W = (F \cos \alpha - \mu N)s, \quad (4.11.4)$$

ahol az  $s = 2,4$  m a megtett út. Figyelembe véve, hogy  $v_1 = 0$ , a fenti kifejezésekből a hatóerőre

$$F = \frac{\mu mgs + \frac{1}{2}mv_2^2}{s(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = 104,6\text{N} \quad (4.11.5)$$

adódik.

**4.12. Feladat:** (HN 8B-29) Egy 5 g tömegű 700 m/s sebességű golyó behatol egy rögzített fakockába és megáll benne. Tegyük fel, hogy a fakocka  $8 \cdot 10^3$  N nagyságú állandó erőt fejt ki a golyóra, míg az meg nem áll. Határozzuk meg

- mennyi idő alatt áll meg a golyó?
- milyen mélyen hatol be a fába?
- mennyi munkát végez a fakocka, amíg a golyó meg nem áll?
- mennyivel változik meg a golyó mozgási energiája?

**Megoldás:** A koordinátarendszer tengelye mutasson balról jobbra. Jelöljük az adatokat:  $m = 5$  g;  $v_0 = 700$  m/s (tételezzük fel, hogy a golyó balról jobbra halad) és így  $F = -8 \cdot 10^3$  N.

(a) Először a golyó gyorsulását számoljuk, amely

$$a = \frac{F}{m} = -1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}^2. \quad (4.12.1)$$

A megállásig eltelt idő a  $v(t) = 0 = at + v_0$  összefüggésből

$$t = \frac{v_0}{-a} = 4,375 \cdot 10^{-4} \text{ s}. \quad (4.12.2)$$

(b) A kiszámolt adatok felhasználásával a megtett út

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0,153 \text{ m}. \quad (4.12.3)$$

(c) A fakocka által végzett munka

$$W = F \cdot s = -1225 \text{ J.} \quad (4.12.4)$$

(d) A golyó kinetikus energiájának megváltozása

$$\Delta E_k = W = -1225 \text{ J.} \quad (4.12.5)$$

**4.13. Feladat:** A  $d$  vastagságú deszkába  $m$  tömegű  $v_0$  sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék  $v$  sebessége, ha

(a) a deszkában állandó a ható  $F$  erő,

(b) a deszkában a behatolási mélységtől függő  $F(x) = cx^2$  erő fékezi? (A  $c$  konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W, \quad (4.13.1)$$

ahol  $W$  a testen végzett munka. Ami az a, esetben:

$$W = -Fd, \quad (4.13.2)$$

és a b, esetben:

$$W = -\int_0^d cx^2 dx = -\frac{1}{3}cd^3. \quad (4.13.3)$$

Ezekkel a sebességek: a,

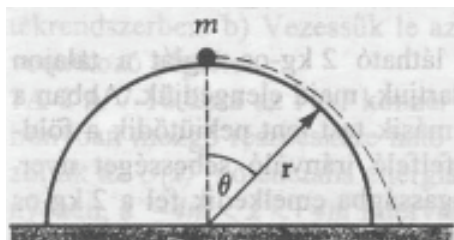
$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{1}{2}mv_0^2 - Fd \right)}, \quad (4.13.4)$$

és b,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{3}cd^3 \right)}. \quad (4.13.5)$$

## Munkavégzés konzervatív erőterben. Potenciális energia

**4.14. Feladat:** (HN 7B-18) Egy kicsiny,  $m$  tömegű test a sima,  $r$  sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetéből kissé kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. Mekkora a függőlegessel bezárt szög, amikor a test elhagyja a gömb felszínét?



23. ábra.

**Megoldás:** A potenciális energia zérus szintje legyen a félgömb alján. Így a helyzeti energia mozgás kezdetén  $E_{p_1} = mgr$ , a kinetikus energia  $E_{k_1} = 0$  mivel a test áll. A felülettől történő elválás pillanatában:  $E_{p_2} = mgr \cos \theta$ , a mozgási energia  $E_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2$ . A mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, így a mechanikai energia megmaradó mennyiség, azaz írhatjuk:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \quad (4.14.1)$$

Behelyettesítés után:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgr \cos \theta. \quad (4.14.2)$$

A körmozgás feltétele:

$$\frac{mv^2}{r} = mg \cos \theta - N, \quad (4.14.3)$$

ahol a jobboldal első tagja a súlyerő radiális komponense, az  $N$  a támaszerő. Az elválás pillanatában:

$$N = 0. \quad (4.14.4)$$

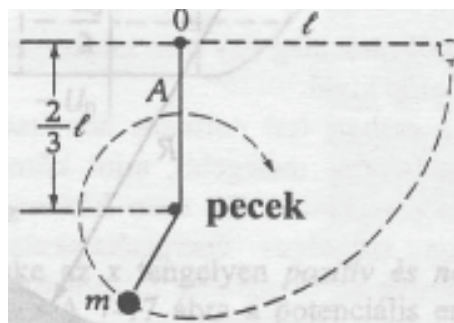
Az egyenletek megoldása:

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \rightarrow \theta = 48^\circ. \quad (4.14.5)$$

**4.15. Feladat:** (HN 7B-21) Egy  $m$  tömegű testet  $l$  hosszúságú kötélre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. Az  $O$  felfüggesztési ponttól  $2/3l$  távolságban kicsiny pöcköt helyeztünk el, melybe a kötéllengése során beakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy  $1/3l$  sugarú függőleges körpályára tér át. Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az  $A$  pontban, ami a pöckök elérése utáni legmagasabb helye a testnek!

**Megoldás:** A potenciális energia zérus szintje legyen az  $A$  pont magasságában. Így a mechanikai energia megmaradás tétele miatt egyszerűen

$$mg \frac{1}{3}l = \frac{1}{2}mv^2. \quad (4.15.1)$$



24. ábra.

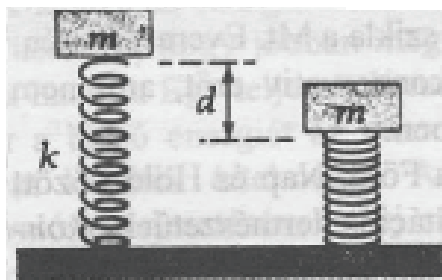
Másrészt a pecek körüli körmozgásra az  $A$  pontban az

$$m \frac{v^2}{\frac{1}{3}l} = K + mg \quad (4.15.2)$$

összefüggés írható, ahol  $K$  a kötél erő. A két egyenletből

$$K = mg. \quad (4.15.3)$$

**4.16. Feladat:** (HN 7A-10) Egy  $m$  tömegű téglát úgy van felerősítve, hogy a  $k$  rugóállandójú rugót éppen csak érinti. A téglát ekkor elengedjük nyugalmi helyzetéből. Határozzuk meg, hogy



25. ábra.

milyen  $d$  távolságra jut el a téglát az elengedés után!

**Megoldás:** Mivel a mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, a mechanikai energia megmarad. Azaz a kezdeti kinetikus energia  $E_{k_1}$  és potenciális energia  $E_{p_1}$  összege egyenlő a tekintett mozgás végi kinetikus  $E_{k_2}$  és potenciális energia  $E_{p_2}$  összegével:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \quad (4.16.1)$$

Mivel a test kezdetben és az alsó helyzetben is áll, így  $E_{k_1} = 0$  és  $E_{k_2} = 0$ . A helyzeti energia zérus pontját a talajra helyezve  $E_{p_1} = mgh$ , ahol  $h$  a téglát talajtól való távolsága. Az  $E_{p_2}$  a téglát alsó

helyzethez tartozó helyzeti energiájából és a rugalmas energiából áll, azaz  $E_{p_2} = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2$ .

A fenti egyenletbe helyettesítve:

$$mgh = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2. \quad (4.16.2)$$

Ebből a  $d$  összenyomódás mértéke:

$$d = \frac{2mg}{k}. \quad (4.16.3)$$

(Megjegyzés: Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha pl. a felső helyzetet választjuk a potenciális energia zérus pontjának.)

**4.17. Feladat:** A völgy fölött  $h$  magasságban átvezető viaduktról gumiköteleken ugrálnak alá (bungee jumping). Milyen  $L$  hosszúságúnak válassza az  $m$  tömegű ugró a  $k$  irányú erejű gumikötetet, hogy a talajt éppen érintse? (Az ugró kiterjedése legyen pontszerű.)

**Megoldás:** Az ugró a mozgás elején és a talaj érintése pillanatában áll, így mozgási energiája mindkét esetben zérus. Így a kezdeti  $mgh$  helyzeti energia – a völgy alját zérus szintnek véve – a gumikötélben tárolódó rugalmas energiává alakul, azaz:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-L)^2. \quad (4.17.1)$$

Itt a  $h-L$  a gumikötél megnyúlása. Az egyenlet megoldása:

$$L = h \pm \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \quad (4.17.2)$$

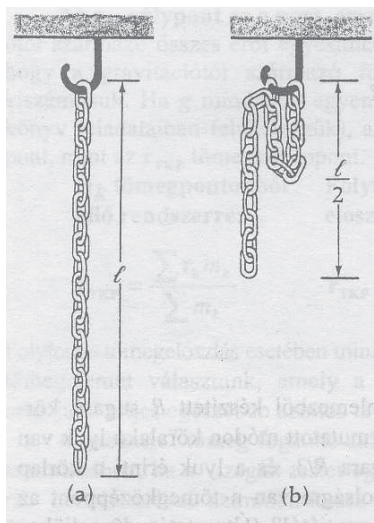
Innen a fizikailag értelmes megoldás, így a kezdeti (beállítandó) hossz:

$$L = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \quad (4.17.3)$$

**4.18. Feladat:** (HN 10B-11) Az  $m$  tömegű,  $l$  hosszúságú lánc kampón lóg a 26. ábra szerint. Számítsuk ki azt a munkát, amely a lánc középső láncszemének a kampóra történő felakasztásához szükséges!

**Megoldás:** Legyen a potenciális energia zérus pontja a teljesen leengedett lánc legalsó pontja (26a ábra). Ennek megfelelően az  $m$  tömegű lánc tömegközéppontja  $\frac{1}{2}l$  magasságban van, így  $E_1$  helyzeti energiája

$$E_1 = mg\frac{1}{2}l. \quad (4.18.1)$$



26. ábra.

A felakasztott lánc egyes darabjainak energiái összege a 26.b ábrán balról jobbra haladva

$$E_2 = \frac{1}{2}mg\frac{3}{4}l + \frac{1}{4}mg\frac{7}{8}l + \frac{1}{4}mg\frac{7}{8}l = \frac{13}{16}mgl. \quad (4.18.2)$$

A szükséges munka a két potenciális energia különbsége

$$W = E_2 - E_1 = \frac{5}{16}mgl. \quad (4.18.3)$$

**4.19. Feladat:** \* Az  $m_0$  tömegű  $l_0$  hosszúságú lánc a földön hever. A végét elkezdjük állandó  $v_0$  sebességgel emelni. a, Mekkora erőt kell ehhez kifejteni? b, Mekkora a végzett összes munka, amikor a kötéel vége éppen elhagyja a talajt?

**Megoldás:** a, Tekintsük a közbenső  $t$  időpontot, amikor már  $v_0t$  hossz felemelkedett és  $v_0$  sebességű. E pillanatban az  $m$  tömegű darabnak a helyzeti energiája:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}mgh = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_0}{l_0}v_0t}_m g \underbrace{v_0t}_h \quad (4.19.1)$$

tömegű darabra. Másrészt ennek az  $m$  tömegű darabnak a kinetikus energiája:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 v_0^2. \quad (4.19.2)$$

A teljes energia:

$$E(t) = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t^2 g + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^3 t, \quad (4.19.3)$$

amelyből a  $P(t)$  teljesítmény:

$$P(t) = \frac{dE}{dt} = \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t g + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^3. \quad (4.19.4)$$

A  $P(t) = F v$  összefüggésből a láncra

$$F(t) = \frac{P(t)}{v_0} = \frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 \quad (4.19.5)$$

erővel kell hatni. b, A végzett munka egyszerűen kiszámolható úgy, hogy a lánc tömegközéppontja  $\frac{l_0}{2}$  magasságra emelkedett, másrészt a lánc sebessége  $v_0$ . A helyzeti energiája  $\frac{m_0 g l_0}{2}$ , a mozgási energiája  $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$ , azaz

$$W = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \quad (4.19.6)$$

*Megjegyzés:* E munka a következőképpen is kiszámolható. A felemeléshez szükséges idő:  $t_f = \frac{l_0}{v_0}$ . A munka  $W = \int F dx = \int F v dt$  alapján:

$$W = \int_0^{\frac{l_0}{v_0}} \left( \frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 \right) v_0 dt = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \quad (4.19.7)$$

## Energiatétel

**4.20. Feladat:** Egy 60 kg-os láda 4 m magasról lecsúszik egy a vízszintessel  $30^\circ$ -os szöget bezáró lejtőn. Mekkora a súrlódási erő munkája ezalatt, ha a láda 5 m/s sebességet ér el?

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 60$  kg,  $h = 4$  m,  $\alpha = 30^\circ$  és  $v = 5$  m/s. A mechanikai energia megmaradást "elrontó" disszipatív erő munkáját a következőképpen tudjuk figyelembe venni:

$$U_{p_2} + E_{k_2} = U_{p_1} + E_{k_1} + W, \quad (4.20.1)$$

ahol végső potenciális és kinetikus energiát összegét (mechanikai energia) úgy kapjuk, hogy a kezdeti potenciális és kinetikus energiához hozzáadjuk a súrlódási végzett munkát. Mivel a kezdeti mechanikai energia nagyobb mint a végső, biztosak lehetünk benne, hogy  $W$  negatív. A potenciális energia zérus szintjét a lejtő aljára a jelen esetre a következő egyenlet írható:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h + W. \quad (4.20.2)$$

Az adatok behelyettesítése után

$$W = -1650 \text{ J}. \quad (4.20.3)$$

**4.21. Feladat:** Az  $\alpha$  hajlásszögű,  $\mu$  súrlódási együtthatójú lejtő alján felfelé lökünk  $v_0$  sebességgel egy  $m$  tömegű testet. A test a mozgás tetőpontját elérve visszacsúszik. Mekkora lesz a sebessége a lejtő alján? A feladatot oldjuk meg a

- (a) dinamikai egyenletek megoldásával és
- (b) az energiatétel felhasználásával!

Megoldás:

(a) A felfele mozgásnál legyen a koordinátatengely irányítása pozitív a felfele irányban. Ekkor a test lejtőirányú mozgásegyenlete

$$ma_{fel} = -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (4.21.1)$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{fel} = -g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha. \quad (4.21.2)$$

A felfele mozgás ideje a  $0 = v_0 + a_{fel}t$  egyenletből

$$t_{fel} = \frac{v_0}{-a_{fel}}, \quad (4.21.3)$$

amellyel a idő alatt a megtett út

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (4.21.4)$$

A lefele csúszásnál fordítsuk meg a koordinátatengelyt, a pozitív irányítás mutasson lefele. Ekkor a mozgásegyenlet

$$ma_{le} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (4.21.5)$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{le} = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha. \quad (4.21.6)$$

A lefele mozgás ideje a  $v = a_{le}t$  egyenletből

$$t_{le} = \frac{v}{a_{le}}, \quad (4.21.7)$$

amely idő alatt a megtett  $s$  út

$$s = \frac{1}{2}a_{le}t^2 = \frac{v^2}{2a_{le}}. \quad (4.21.8)$$

E két egyenletből a sebesség a lejtő alján

$$v = \sqrt{2sa_{le}}. \quad (4.21.9)$$



Az  $s$  és  $a_{le}$  korábban kapott kifejezéseit behelyettesítve a sebességre a

$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} \quad (4.21.10)$$

eredmény adódik.

(b) Az energiátétel azt állítja, hogy a végső kinetikus és potenciális energia összege egyenlő a kezdeti kinetikus és potenciális energia összegével plusz a testen végzett munkával, azaz

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W. \quad (4.21.11)$$

A felfele mozgásnál  $U_{p1} = 0$ ;  $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2$ ;  $U_{p2} = mgs \sin \alpha$ ;  $E_{k2} = 0$  és  $W = -\mu mgs \cos \alpha$ . Egy egyenletbe összeírva

$$mgs \sin \alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgs \cos \alpha. \quad (4.21.12)$$

Ebből az  $s$  út

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (4.21.13)$$

A lefele csúszásnál

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W, \quad (4.21.14)$$

ahol  $U_{p1} = mgs \sin \alpha$ ;  $E_{k1} = 0$ ;  $U_{p2} = 0$ ;  $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$  és  $W = -\mu mgs \cos \alpha$ . Egy egyenletbe írva

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs \sin \alpha - \mu mgs \cos \alpha. \quad (4.21.15)$$

Az  $s$  utat a (4.21.13) egyenletből behelyettesítve a sebességre a fentiekkel egyező

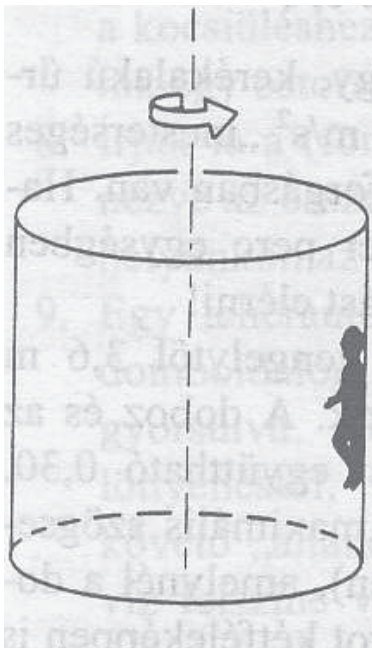
$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} \quad (4.21.16)$$

eredményt kapjuk.

## 5. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből

### Centrifugális erő

**5.1. Feladat:** (HN 13B-20) Egy népszerű vidámparki mutatványnál a látogatók egy függőleges tengely körül forgó henger belső falának támaszkodnak a 27. ábrának megfelelően. Ezután a padlót lesüllyeszti, és hagyják, hogy a látogatók a centrifugális erőből a falhoz "odaszögezve" és a súrlódási erő következtében a lecsúszástól védve a falon maradjanak. A henger  $R$  sugarának, az  $\omega$  szögsebességnek és a  $g$  nehézségi gyorsulásának függvényében határozzuk meg azt



27. ábra.

a legkisebb  $\mu$  nyugalmi súrlódási együtthatót, amely a lecsúszást megakadályozza. A feladatot forgó vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!

**Megoldás:** A forgó vonatkoztatási rendszerben a falhoz "odaszögezett" látogatóra négy erő hat. A centrifugális erő (tehetetlenségi erő), amely radiálisan kifelé mutat és nagysága  $F_{cf} = mR\omega^2$ . A falon radiálisan befelé mutat az  $N$  támaszerő, amelynek nagysága pontosan  $mR\omega^2$ . Függőlegesen lefelé hat az  $mg$  súlyerő, ezzel ellentétesen az  $F_s$  súrlódási erő, és a kettő egymással egyenlő. Az fentieket matematikailag összefoglalva:

$$mg = F_s = \mu N = \mu mR\omega^2, \quad (5.1.1)$$

ahonnan

$$\mu = \frac{g}{R\omega^2}. \quad (5.1.2)$$

**5.2. Feladat:** Egy  $M = 1,499 \cdot 10^{25}$  kg tömegű,  $R = 10000$  km sugarú bolygó északi sarkán  $k = 100$  N/m direkciós erejű rugóra  $m = 1$  kg tömegű testet lógatunk. A bolygó  $\omega = 10^{-4}$  1/s szögsebességgel forog.

(a) Mekkora a rugó megnyúlása?

(b) Ezt követően a mérést az egyenlítőn megismételjük. Mennyi ekkor a rugó megnyúlása?

**Megoldás:**

(a) A bolygó északi sarkán végzett mérés során

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = k\Delta x, \quad (5.2.1)$$

ahol  $\Delta x$  a rugó megnyúlása, amely

$$\Delta x = \gamma \frac{mM}{kR^2} = 0,1 \text{ m} = 100 \text{ mm}. \quad (5.2.2)$$

(b) Az egyenlítőn figyelembe kell vennünk a centrifugális erőt, amellyel az egyenlet úgy módosul, hogy

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - mR\omega^2 = k\Delta x'. \quad (5.2.3)$$

Innen a  $\Delta x'$  megnyúlás

$$\Delta x' = \gamma \frac{mM}{kR^2} - \frac{mR\omega^2}{k} = 0,099 \text{ m} = 99 \text{ mm}, \quad (5.2.4)$$

azaz a rugó megnyúlása 1 mm-rel kevesebb.

**5.3. Feladat:** (HN 14C-39) Az  $\omega$  szögsebességgel forgó ringlispíl középpontjától  $r$  távolságra lévő helyen  $h$  magasságból egy tárgyat ejtenek a padlóra. A mozgást a ringlispíl vonatkoztatási rendszeréből vizsgálva mutassuk meg, hogy az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság jó közelítéssel  $\omega^2 rh/g$ . Milyen feltételezésekkel kell élni a feladat megoldása során?

Megoldás: A tárgy

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5.3.1)$$

idő alatt esik. A forgó vonatkoztatási rendszerben az

$$a_{cf} = r\omega^2 \quad (5.3.2)$$

centrifugális gyorsulása lesz, amely kifelé mutató radiális irányú. E gyorsulással az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_{cf} (\Delta t)^2 = \frac{\omega^2 rh}{g}. \quad (5.3.3)$$

A forgás közbeni szögelfordulás

$$\Delta \varphi = \omega \Delta t. \quad (5.3.4)$$

Ha azt tekintjük, hogy a test az álló rendszerből nézve érintő irányban  $r\omega$  sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az elejtés után, akkor az ehhez tartozó elmozdulás

$$\Delta x = r\omega\Delta t. \quad (5.3.5)$$

Az ehhez az elmozduláshoz tartozó  $\alpha$  központi szög

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{r} = \omega\Delta t. \quad (5.3.6)$$

Ahhoz, hogy  $\varphi$  és  $\alpha$  közelítőleg megegyezzenek egymással, az  $\omega\Delta t \ll 1$  feltétel teljesülése szükséges.

## Coriolis-erő

**5.4. Feladat:** (HN 14C-30) Írjuk le, hogyan tudna egy személy a forgásban lévő ringlispíl lapján járni úgy, hogy a rá ható Coriolis-erő és a centrifugális erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú legyen! (A ringlispíl forogjon az óra járásával ellentétesen.)

**Megoldás:** Az  $\omega$  szögsebességgel forgó ringlispíl origótól való  $R$  távolságú pontjában a személyre radiális kifelé mutató  $F_{cf} = mR\omega^2$  centrifugális erő hat. Ahhoz, hogy a Coriolis-erő radiális befelé mutató legyen, ahhoz az óra járásával egyezően, az  $R$  sugarú kör érintője irányában kell  $v$  sebességgel haladnia. A Coriolis erő nagysága  $F_{Co} = 2m\omega v$ . A kettő

$$F_{cf} = mR\omega^2 = 2m\omega v = F_{Co} \quad (5.4.1)$$

egyenlőségéből a sebességre a

$$v = \frac{R\omega}{2} \quad (5.4.2)$$

adódik.

**5.5. Feladat:** Egy forgótárcsa szélén álló ember eldob egy testet vízszintesen a függőleges forgástengely irányába 10 m/s kezdősebességgel. A tárcsa percnként 600-at fordul. Mekkora a tárcsa vonatkoztatási rendszerében a test pályájának kezdeti görbületi sugara?

**Megoldás:** Jelölések:  $v = 10$  m/s és  $f = 600$  1/perc = 10 1/s. A tárcsa szögsebessége  $\omega = 2\pi f = 62,8$  rad/s. A forgó rendszerben a testet a Coriolis-erő téríti el, amelyhez tartozó gyorsulás nagysága

$$a_{Co} = 2\omega v. \quad (5.5.1)$$

Az indulás pillanatában körpályán mozog a test, amely esetén gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (5.5.2)$$

A kettő egyenlőségéből a görbületi sugár

$$R = \frac{v}{2\omega} = 0,159 \text{ m}. \quad (5.5.3)$$

**5.6. Feladat:** (HN 14C-33) A mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső a vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége 1,5 rad/s abban a pillanatban, amikor az 5 g tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből.

- (a) A forgó rendszerben mekkora Coriolis-erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában?  
 (b) Milyen irányú ez az erő?

**Megoldás:** Jelölések:  $\omega = 1,5 \text{ rad/s}$ ;  $m = 5 \text{ g}$  és  $v = 500 \text{ m/s}$ .

(a) A puska csőve az óra járásának megfelelően fordul el, így az  $\omega$  szögsebességvektor függőlegesen lefele mutat. A Coriolis-erő a  $\omega$  szögsebességvektor és a  $\mathbf{v}$  sebességvektorokkal

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (5.6.1)$$

amelynek nagysága – figyelembe véve, hogy  $\omega$  és  $\mathbf{v}$  egymásra merőlegesek

$$F = 2m\omega v = 7,5 \text{ N}. \quad (5.6.2)$$

(b) Az erő iránya jobbról balra mutat.

**5.7. Feladat:** (HN 14C-38) A percnként tízet forgó ringlispál szélén álló kislány 10 m/s vízszintes kezdősebességgel labdát dob a forgástengely felé. Úgy látja, hogy a pályagörbe jobbra kanyarodik.

- (a) Számítsuk ki a pályagörbe kezdeti vízszintes görbületi sugarát!  
 (b) Amikor a labdát dobó kislány a ringlispál közepe felé néz, jobbra vagy balra látja elmozdulni a távoli tájat?

**Megoldás:** Jelölések: A fordulatszám  $f = 10 \text{ 1/perc} = 1/6 \text{ 1/s}$ , amellyel a szögsebesség  $\omega = 2\pi f = 1,047 \text{ rad/s}$ ;  $v = 10 \text{ m/s}$ .

(a) A labda Coriolis-gyorsulása

$$a_{Co} = 2\omega v, \quad (5.7.1)$$

amely éppen az elkanyarodás

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (5.7.2)$$

gyorsulása. Itt  $r$  a pályagörbe görbületi sugara. A két gyorsulás egyenlőségéből

$$r = \frac{v}{2\omega} = 9,55 \text{ m.} \quad (5.7.3)$$

(b) Mivel a pályagörbe jobbra kanyarodik, így a ringlispól az óra járásával ellentétes irányban forog. Az ilyen irányban forgó rendszerből nézve a táj balról jobbra látszik mozogni.

**5.8. Feladat:** A Föld napi forgása következtében az eső testek kelet felé elhajlanak.

(a) Mekkora az Egyenlítőre szabadon eső test keleti irányú gyorsulása?

(b) Számítsuk ki, hogy a becsapódás pillanatában mekkora a keleti irányú sebessége annak a testnek, amely  $h = 100$  m magasból esik szabadon az Egyenlítőre!

Megoldás:

(a) Az Egyenlítőn szabadon eső testnek a Coriolis-erő következményeként – figyelembe véve, hogy a Föld  $\omega$  szögsebessége és a leeső test  $v$  sebessége egymásra merőleges –

$$a(t) = 2\omega v = 2\omega gt \quad (5.8.1)$$

keleti irányú gyorsulása van.

(b) A  $t$  időtartamú esés során az  $a(t) = 2\omega gt$  egyenes alatti terület éppen a keleti irányú sebesség:

$$v(t) = \omega gt^2. \quad (5.8.2)$$

Más úton:

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t 2\omega gt dt = \omega gt^2. \quad (5.8.3)$$

Az esés ideje  $4,47$  s,  $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5}$  rad/s,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> adatokkal számolva:

$$v_{kelet} = 1.45 \cdot 10^{-2} \text{ m/s.} \quad (5.8.4)$$

## 6. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből

### Impulzustétel, impulzusmegmaradás törvénye

**6.1. Feladat:** Egy  $m = 4$  kg tömegű kalapács  $v_0 = 6$  m/s sebességgel érkezik a szög fejéhez és  $\Delta t = 0,002$  s alatt fékeződik le, miközben a szög behatol a fába. (A szög tömege elhanyagolható a kalapács tömegéhez viszonyítva.)

- Számítsuk ki az átlagos fékező erőt!
- Számítsuk ki a szög útját a fában!
- Mekkora munkát végzett a fa a szögön?

Megoldás:

- A szögre ható átlagos fékező erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -12000 \text{ N}, \quad (6.1.1)$$

ahol a negatív előjel a fékező hatást fejezi ki.

- A szög átlagos gyorsulása a sebességváltozásával számolható ki. Amennyiben a szög nem deformálódott az ütés alatt, a kezdeti sebessége meg kell hogy egyezzen a kalapács sebességével. Ezért a sebesség megváltozása  $\Delta v = -v_0$ . A szög gyorsulása ezért

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -3000 \text{ m/s}^2, \quad (6.1.2)$$

amit felhasználhatunk a szög által megtett út meghatározásához.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0,006 \text{ m} = 6 \text{ mm}. \quad (6.1.3)$$

- A fa által végzett munka a szögön:

$$W = F s = -72 \text{ J}. \quad (6.1.4)$$

**6.2. Feladat:** (HN 8B-27) A kezdetben nyugalomban lévő 5 kg tömegű testre 5 másodpercig 6 N állandó erő hat, majd az erő 3 s alatt egyenletesen zérusra csökken. Mekkora sebességet ér el a test?

Megoldás: Jelölések:  $m = 5$  kg;  $t_1 = 5$  s;  $F = 6$  N és  $t_2 = 8$  s a második időintervallum vége.

A test impulzusváltozását kell kiszámoljuk. A  $0 \leq t \leq t_1 = 5$  s időintervallumban az impulzusváltozás

$$\Delta I_1 = F t_1 = 30 \text{ kgm/s}. \quad (6.2.1)$$

A második szakaszon az erő időbeli függése

$$F(t) = \frac{F}{t_2 - t_1} (t_2 - t). \quad (6.2.2)$$

A második időintervallumon történő impulzusváltozás az egyenes alatti területtel egyszerűen számolható, amely

$$\Delta I_2 = \frac{F}{2}(t_2 - t_1) = 9 \text{ kgm/s.} \quad (6.2.3)$$

A teljes impulzusváltozás

$$\Delta I = \Delta I_1 + \Delta I_2 = 39 \text{ kgm/s,} \quad (6.2.4)$$

amelyet a tömeggel osztva a végsebességet kapjuk:

$$v = \frac{\Delta I}{m} = 7,8 \text{ m/s.} \quad (6.2.5)$$

**6.3. Feladat:** (HN 8C-42) \* Egy 8 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva  $F = At - Bt^2$  erő hatására gyorsul, ahol  $A = 24 \text{ N/s}$  és  $B = 1,2 \text{ N/s}^2$ .

- (a) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet ér el a tömeg mielőtt újra megállna!  
 (b) Mennyi idő múlva következik ez be?

Megoldás:

(a) A test impulzusváltozása

$$\Delta I = \int_0^t F(t) dt = \int_0^t (At - Bt^2) dt = \frac{1}{2} At^2 - \frac{1}{3} Bt^3. \quad (6.3.1)$$

Innen a sebesség

$$v(t) = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{2} At^2 - \frac{1}{3} Bt^3 \right). \quad (6.3.2)$$

A sebesség maximuma akkor van, ha a gyorsulás zérus, azaz most

$$t = \frac{A}{B}. \quad (6.3.3)$$

A behelyettesítések után a maximális sebesség

$$v_{max} = \frac{1}{6m} \frac{A^3}{B^2} = 6,94 \text{ m/s.} \quad (6.3.4)$$

- (b) A maximális sebesség elérése  $t = 20 \text{ s}$  idő múlva következik ez be.

**6.4. Feladat:** (HN 8C-43) \* A 2,5 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva  $F = At^2$  erő hatására gyorsul, ahol  $A = 0,75 \text{ N/s}^2$ .

- (a) Határozzuk meg a test sebességét 15 másodperccel az erő alkalmazása után!



(b) Mekkora állandó erővel lehetne elérni ezt a sebességet?

Megoldás:

(a) A test gyorsulása

$$a = \frac{1}{m}At^2, \quad (6.4.1)$$

amellyel a sebesség

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t \frac{1}{m}At^2 dt = \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{3}At^3 \right]_0^{15} = 337,5 \text{ m/s}. \quad (6.4.2)$$

(b) Ha az erő állandó, akkor

$$v = at = \frac{F}{m}t, \quad (6.4.3)$$

ahonnan az erő

$$F = \frac{mv}{t} = 56,25 \text{ N} \quad (6.4.4)$$

kell legyen ekkora sebesség eléréséhez.

**6.5. Feladat:** Egy  $M = 80 \text{ kg}$  tömegű ember jégen egy helyben állva eldob vízszintes irányban egy  $m = 20 \text{ kg}$  tömegű golyót. A golyó az embertől mérve  $v_0 = 20 \text{ m/s}$  sebességgel távolodik. Mekkora az ember  $v_M$  sebessége a jéghez viszonyítva? (A jég és az ember közötti súrlódási erő elhanyagolhatóan kicsi.)

Megoldás: Jelölje  $v_m$  a golyó jéghez viszonyított sebességét. Az impulzus megmaradás miatt

$$Mv_M = mv_m. \quad (6.5.1)$$

A golyó és az ember relatív sebessége pedig

$$v_0 = v_m + v_M \quad (6.5.2)$$

A két egyenletből

$$v_M = \frac{m}{m+M} v_0 \quad (6.5.3)$$

Behelyettesítve a számértékeket  $v_M = 4 \text{ m/s}$  adódik.

## Rugalmatlan ütközések

**6.6. Feladat:** Az  $m$  tömegű  $v_0$  sebességű test tökéletesen rugalmatlanul ütközik az  $M$  tömegű álló testtel. Mekkora lesz az ütközés utáni együttes sebességük? Mekkora átlagos erőhatás lép fel köztük, ha az ütközés ideje (a becsapódástól számítva az összeragadásig)  $t$ .

Megoldás: Az impulzus megmaradás miatt:

$$mv_0 = (m+M)v, \quad (6.6.1)$$

ahol  $v$  az összeragadt testek együttes sebessége. Az ütközés utáni együttes sebesség ezért

$$v = \frac{m}{m+M}v_0. \quad (6.6.2)$$

Az ütközés közben fellépő átlagos erőhatás pedig:  $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ , ahol  $\Delta P$  az  $m$  tömegű test impulzusváltozása:

$$\Delta P = mv - mv_0 = \frac{m^2}{m+M}v_0 - mv_0 = -\frac{mM}{m+M}v_0. \quad (6.6.3)$$

A negatív előjel arra utal, hogy a  $m$  tömegű test impulzusa csökken. Az  $F$  erő nagysága így

$$F = -\frac{mM}{m+M} \frac{v_0}{t}. \quad (6.6.4)$$

Hasonló megfontolásokból az  $M$  tömegű testre

$$F = \frac{mM}{m+M} \frac{v_0}{t} \quad (6.6.5)$$

erő hat, amely eredmény pont azt mutatja, hogy a kölcsönható erők párosával lépnek fel: azonos nagyságúak és ellentétes irányúak.

**6.7. Feladat:** Két azonos  $m$  tömegű test azonos nagyságú  $v_0$  sebességgel halad, az egyik az  $y$  tengelyen, a másik az  $x$  tengelyen, mindkét esetben a pozitív irányban. Az origóban a testek tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz az együttes sebességvektoruk és annak nagysága?

Megoldás: Az  $y$  tengelyen mozgó test impulzusvektora

$$\mathbf{p}_y = m(0; v_0), \quad (6.7.1)$$

az  $x$  tengelyen mozgó test impulzusvektora pedig

$$\mathbf{p}_x = m(v_0; 0). \quad (6.7.2)$$

Az ütközés utáni  $2m$  tömegű együttes test impulzusa e két impulzusvektor összege, azaz

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_y + \mathbf{p}_x = m(v_0; v_0). \quad (6.7.3)$$

Az összeragadt test sebességvektora pedig

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{2m} = \left( \frac{v_0}{2}; \frac{v_0}{2} \right). \quad (6.7.4)$$

a sebesség nagysága:

$$V = |\mathbf{V}| = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0. \quad (6.7.5)$$

**6.8. Feladat:** (HN 8A-4) Egy  $m$  tömegű  $v_0$  sebességgel mozgó test vele egyenlő tömegű, eredetileg nyugalomban lévő testbe ütközik és összeragad vele. Határozzuk meg a kinetikus energia  $(K - K_0)/K_0$  relatív megváltozását!

**Megoldás:** Az ütközés tökéletes rugalmatlan, így az impulzus megmarad, a kinetikus energia viszont nem. Az impusumegmaradás az

$$mv_0 = 2mv \quad (6.8.1)$$

egyenlettel fejezhető ki, amelyben  $v$  az összeragadt testek végső együttes sebessége. Innen

$$v = \frac{v_0}{2}. \quad (6.8.2)$$

A kezdeti  $K_0$  kinetikus energia

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (6.8.3)$$

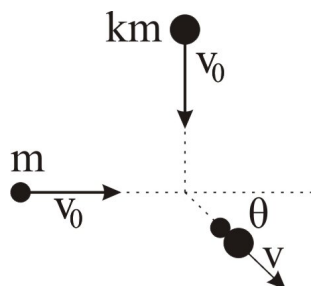
A végső kinetikus energia pedig:

$$K = \frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{4}mv_0^2. \quad (6.8.4)$$

A kinetikus energia  $(K - K_0)/K_0$  relatív megváltozása:

$$\frac{K - K_0}{K_0} = -\frac{1}{2}. \quad (6.8.5)$$

A negatív előjel arra utal, hogy az ütközés mechanikai energiavesztéssel jár.



28. ábra.

**6.9. Feladat:** (HN 8B-11) Két,  $m$  illetve  $km$  ( $k$  állandó) tömegű test egyenlő  $v_0$  sebességgel halad merőleges irányból a 28. ábrán látható módon közeledik egymáshoz, összeütközik, és összeragadva mozognak együtt tovább. Fejezzük ki a végsebességük irányát meghatározó  $\theta$  szöget a  $k$  segítségével!

**Megoldás:** Az ütközés közben megmarad a testek lendülete az  $x$  és  $y$  irányban egyránt. Az összeragadt testek össz lendülete

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} mv_0 \\ kmv_0 \end{pmatrix}. \quad (6.9.1)$$

Az összeragadt testek össz lendületéből meghatározható azok sebességvektora is:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{m(1+k)} = \frac{v_0}{1+k} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}. \quad (6.9.2)$$

A 28. ábrán jelölt  $\theta$  szög meghatározható a  $\mathbf{V}$  sebességvektor komponenseivel:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_y}{V_x} = k. \quad (6.9.3)$$

**6.10. Feladat:** (HN 8B-14) Két,  $m$  illetve  $km$  ( $k$  állandó) tömegű test egyenlő  $v_0$  sebességgel halad a  $+x$  és  $-x$  irányban. Ütközésük után összeragadva haladnak tovább.

(a) Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében, hogy mekkora az összeragadt testek  $v$  sebességének nagysága és iránya?

(b) Mekkora a  $v/v_0$  arány, ha  $k = 2$ ?

**Megoldás:**

(a) Az ütközés folyamatára érvényes a lendületmegmaradás törvénye:

$$mv_0 - kmv_0 = (1+k)mv. \quad (6.10.1)$$

Az egyenlet bal oldala a részrendszerek ütközés előtti lendületeinek összegét írja le, míg a jobb oldal az összeragadt testek összlendületét jelöli. Az egyenletből meghatározható az összeragadt testek együttes sebessége:

$$v = \frac{1+k}{1-k}v_0. \quad (6.10.2)$$

Az eredményből látható, hogy  $k > 1$  esetben az összeragadt testek  $-x$  irányba haladnak, míg  $k < 1$  esetben az ellenkező irányba.

(b)  $k = 2$  esetben a sebességek aránya

$$\frac{v}{v_0} = -3. \quad (6.10.3)$$

**6.11. Feladat:** (HN 9B-7) Fából készült  $M = 800$  g tömegű ballisztikus ingatestbe vízszintes irányból  $m = 20$  g tömegű ólomsörétet lőttünk. A lengésbe jövő ingatest  $h = 10$  cm magasba emelkedik.

(a) Mekkora  $v$  közös sebességgel indul az ingatest-sörét rendszer?

(b) Mekkora  $v_0$  sebességgel csapódik az ingába a golyó? A sörét  $K$  kinetikus energiájának hányadrésze veszett el, azaz fordítódott a fa deformálására, ill. felmelegítésére?

### Megoldás:

(a) Az összeragadt inga-sörét rendszer össz mozgási energiája teljes egészében átalakul helyzeti energiává miközben  $h$  magasságba emelkedik:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh, \quad (6.11.1)$$

mely egyenletből az együttes sebesség

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (6.11.2)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $v \approx 1,414$  m/s adódik.

(b) A golyó becsapódására az impulzus megmaradás tételét alkalmazhatjuk a sörétszemek sebességének meghatározására:

$$mv_0 = (m+M)v. \quad (6.11.3)$$

Az egyenlet segítségével meghatározhatjuk a sörétszemek sebességét:

$$v_0 = \frac{m+M}{m}v. \quad (6.11.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $v_0 \approx 57,98$  m/s adódik. A kezdeti kinetikus energia

$$K = E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 \approx 33,62\text{J}, \quad (6.11.5)$$

míg az ütközés után

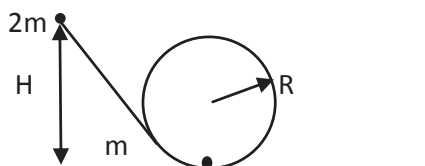
$$E_2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 \approx 0,82\text{J}. \quad (6.11.6)$$

A mechanikai energiának az ütközés során a

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \approx 97,6\%. \quad (6.11.7)$$

része veszett el, illetve alakult át hőenergiává.

**6.12. Feladat:** Egy  $2m$  tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedő lejtőn a 29. ábrának megfelelően. Mekkora  $H$  magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmatlan ütközés után a pálya alján lévő  $m$  tömegű test végighaladjon a hurkon?



29. ábra.

**Megoldás:** A test mozgását három szakaszra oszthatjuk:

(a) A  $2m$  tömegű test lecsúszik a hurok aljára az ütközés előtti pillanatig. A  $2m$  tömegű test  $H$  magasságból való lecsúszására a

$$2mgH = \frac{1}{2}2mv_0^2 \quad (6.12.1)$$

mechanikai energia-megmaradást kifejező egyenlet írható fel, amelyből az ütközés előtti sebesség

$$v_0 = \sqrt{2gH}. \quad (6.12.2)$$

(b) Ezután a  $2m$  tömegű test rugalmatlanul ütközik az  $m$  tömegű testtel, majd összetapadva mozognak tovább. Az  $m$  tömegű testtel való tökéletesen rugalmatlan ütközésre az impulzus megmaradásának tételét alkalmazzuk

$$2mv_0 = 3mv_1, \quad (6.12.3)$$

ahonnan az ütközés utáni  $v_1$  sebesség

$$v_1 = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2gH}. \quad (6.12.4)$$

(c) Végül az összetapadt  $3m$  tömegű test feljut a hurok tetejére és éppen áthalad a tetőponton. A  $2R$  magas hurok tetején az összeragadt  $3m$  tömegű test  $v_2$  sebessége az

$$\frac{1}{2}3mv_1^2 = \frac{1}{2}3mv_2^2 + 3mg \cdot 2R \quad (6.12.5)$$

egyenletből határozható meg. Innen a  $v_2$  tetőponti sebesség

$$v_2 = \sqrt{\frac{8}{9}gH - 2gR}. \quad (6.12.6)$$

A tetőponton való áthaladáshoz szükséges minimális sebességet a test és a hurok között fellépő nyomási erő eltűnése határozza meg. Ekkor a testet csak a súlyerő tartja körpályán, azaz

$$3m \frac{v_2^2}{R} = 3mg. \quad (6.12.7)$$

Behelyettesítés után a minimális indítási magasság

$$H = \frac{27}{8}R. \quad (6.12.8)$$

## Rugalmas ütközések

**6.13. Feladat:** Mutassa meg, hogy a kemény asztallapon pattogó  $m$  tömegű golyó hosszú idő átlagában  $mg$  erővel nyomja az asztallapot!

**Megoldás:** Ha a golyót  $h$  magasságból leejtjük, az  $v = \sqrt{2gh}$  sebességgel csapódik be az asztallapba. Tökéletesen rugalmas ütközéskor a sebesség nagysága nem, csupán az iránya változik meg az ellenkezőjére. Ennek megfelelően a golyó impulzusváltozása

$$\Delta P = mv - (-mv) = 2mv = 2m\sqrt{2gh}. \quad (6.13.1)$$

Két ütközés között eltelt  $\Delta t$  idő (mely a mozgás során fellépő átlagos erőhatás kiszámolásához szükséges) kétszerese a szabadon eső test  $h$  magasságból történő esési idejének, azaz

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6.13.2)$$

Így az átlagos erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2\sqrt{\frac{2h}{g}}} = mg, \quad (6.13.3)$$

ami a feladat állításával megegyezik.

**6.14. Feladat:** Egy  $L$  oldalélű hasámban az oldallal párhuzamosan,  $v_0$  sebességgel mozog egy  $m$  tömegű részecske.

- Mekkora átlagos erővel nyomja a részecske a szembenlévő falakat?
- Mekkora az átlagos nyomás, ha a mozgásra merőleges lapok felülete  $A$ ?
- Hogyan változik a megoldás, ha  $N$  részecske teszi ezt?

Megoldás:

(a) A részecske impulzusváltozása a fallal való ütközés során  $\Delta P = 2mv_0$ . Két egymást követő ütközés között eltelt idő pedig  $\Delta t = \frac{2L}{v_0}$ . Az ütközések során fellépő átlagos erő tehát

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\frac{2L}{v_0}} = \frac{mv_0^2}{L}. \quad (6.14.1)$$

(b) A falakon ébredő átlagos nyomás:

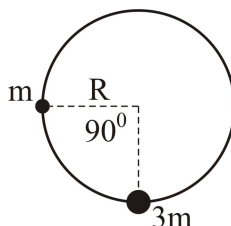
$$p = \frac{F}{A} = \frac{mv_0^2}{LA}. \quad (6.14.2)$$

(c)  $N$  részecske esetén a falakat nyomó  $F_N$  erő, illetve  $p_N$  nyomás megsokszorozódnak:

$$F_N = N \frac{mv_0^2}{L}, \quad p_N = N \frac{mv_0^2}{LA}. \quad (6.14.3)$$

(Megjegyzés: Utóbbi eredmények szolgálnak a kinetikus gázelmélet alapjául!)

**6.15. Feladat:** (HN 9C-32) Függőleges síkú,  $R$  sugarú körre hajlított, merev huzalon a rá fűzött  $m$  tömegű gyöngy a 30. ábrán látható módon lecsúszik. A körpálya oldalsó pontjából nyugalomban lévő  $3m$  tömegű másik gyönggyel.



30. ábra.

ban lévő gyöngy pusztán a gravitáció hatására lecsúszik és rugalmasan ütközik a kör legmélyebb pontjában nyugalomban lévő  $3m$  tömegű másik gyönggyel.

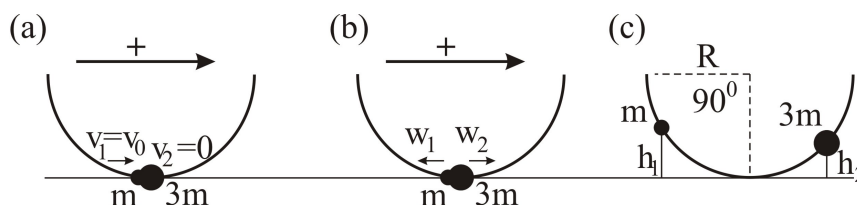


(a) Az  $R$  sugárral kifejezve határozzuk meg, hogy milyen magasra emelkednek a gyöngyök az ütközés után!

(b) Az ütközés után a gyöngyök súrlódámentesen folyamatosan tovább mozognak és újra rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg, hogy mennyi a gyöngyök sebessége közvetlenül a második ütközés után!

### Megoldás:

(a) A 31.(a) ábra az  $R$  magasságból lecsúszó  $v_0$  sebességű és  $m$  tömegű gyöngy a  $3m$  tömegű



31. ábra.

gyönggyel való ütközésének pillanatát mutatja. Az ütközés pillanatáig az  $R$  magasságból lecsúszó gyöngy potenciális energiája átalakul mozgási energiává:

$$mgR = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (6.15.1)$$

Ezért az  $m$  tömegű gyöngy sebessége  $v_0 = \sqrt{2gR}$ . A rugalmas ütközés folyamatára az impulzus megmaradás mellett fennáll a mechanikai energia-megmaradása is. A 31.(a) és 31.(b) ábrákon bejelölt pozitív irányok alapján felírhatjuk az ütközés előtti és utáni lendületek mérlegét.

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1w_1 + m_2w_2. \quad (6.15.2)$$

A mechanikai energia-megmaradása pedig a

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2 \quad (6.15.3)$$

egyenlettel fejezhető ki. A (6.15.2) és (6.15.3) egyenletek egy általános, egyenes menti rugalmas ütközést írnak le. Esetünkben  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 3m$ ,  $v_1 = v_0$ ,  $v_2 = 0$  és  $w_1$ , valamint  $w_2$  ismeretlen paraméterek. Átalakítva a (6.15.2) és (6.15.3) egyenleteket:

$$m_1(v_1 + w_1) = m_2(w_2 + v_2), \quad (6.15.4)$$

és

$$m_1(v_1^2 - w_1^2) = m_2(w_2^2 - v_2^2) \quad (6.15.5)$$

adódnak. Elosztva egymással a két egyenletet és felhasználva az  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  azonosságot

$$v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \quad (6.15.6)$$

adódik. A (6.15.6) és (6.15.2) egyenletekből kiküszöbölve a  $w_2$  sebességet,

$$w_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_1. \quad (6.15.7)$$

adódik. Analóg módon

$$w_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_2. \quad (6.15.8)$$

Esetünkben az ütközés utáni sebességek (lásd a 31.(b) ábrát)  $w_1 = w_2 = \frac{v_0}{2}$ -nek adódnak. Mivel a gyöngyök sebessége az ütközés után azonos, a gyöngyök tömegüktől függetlenül ugyanolyan  $h_1 = h_2 = h$  magasba emelkednek (lásd a 31.(c) ábrát). Az emelkedési magasságot a mechanikai energia-megmaradás segítségével számolhatjuk ki. Az  $m$  tömegű gyöngy esetében

$$mgh = \frac{1}{2}mw_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mv_0^2 = \frac{1}{4}mgR. \quad (6.15.9)$$

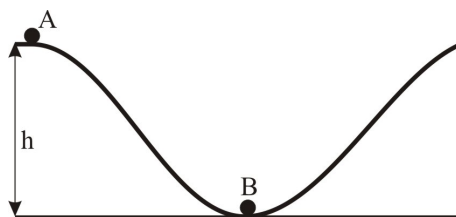
Az emelkedési magasság tehát  $h = R/4$ .

(b) A (6.15.7) és (6.15.8) egyenleteket felhasználhatjuk a második ütközés utáni sebességek meghatározásához is. Ebben az esetben a „beérkező” sebességek nagysága megegyezik az első ütközés utáni sebességek nagyságával. Behelyettesítve az értékeket, a második ütközés után  $w_1 = v_0$  és  $w_2 = 0$  adódik rendre az  $m$  és  $3m$  tömegű gyöngyök sebességére. A sebességek nagysága pont akkora, mint amekkora sebességgel közvetlenül az első ütközés előtt találkoztak a gyöngyök. Ez az eredmény nem meglepő, hiszen a (6.15.2) és (6.15.3) egyenleteknek két független megoldása van, melyek mindegyike kielégíti a lendület és energia-megmaradás törvényit.

**6.16. Feladat:** A 32. ábrán látható súrlódásmentes pálya A pontjából elengedünk egy testet. Végigcsúszva a B pontban ütközik egy másik testtel.

(a) Mekkora  $v$  sebességgel ér az A pontból indított test a B pontban lévő testhez?

(b) Milyen magasra emelkedik a másik test, ha az ütközés tökéletesen rugalmas ( $m_A = m_B/2$ ,  $h = 1.8$  m)?



32. ábra.

Megoldás:

- (a) A  $h$  m magasból kezdő sebesség nélkül induló, súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége felhasználva az energia-megmaradás elvét  $v = \sqrt{2gh} = 6$  m/s.
- (b) A tökéletesen rugalmas ütközés esetében az

$$m_A v = m_A v_A + m_B v_B \quad (6.16.1)$$

impulzus-megmaradás mellett érvényes a mechanikai energia megmaradása is:

$$\frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2. \quad (6.16.2)$$

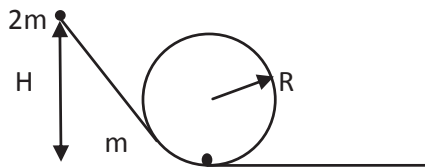
Az egyenletekben  $v_A$  és  $v_B$  az  $A$  illetve  $B$  testek ütközés utáni sebességét jelöli. Figyelembe véve, hogy  $m_A = m_B/2$ , e két egyenlettel a  $B$  test ütközés utáni sebessége:

$$v_B = \frac{2}{3} v = \frac{2}{3} \sqrt{2gh} = 4 \text{ m/s}. \quad (6.16.3)$$

A  $B$  test emelkedési magassága pedig

$$h_B = \frac{v_B^2}{2g} = 0,8 \text{ m}. \quad (6.16.4)$$

**6.17. Feladat:** Egy  $2m$  tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedő lejtőn a 33. ábrának megfelelően. Mekkora  $H$  magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmas ütközés után a pálya alján lévő  $m$  tömegű test végighaladjon a hurkon? Megoldás:



33. ábra.

## Általános ütközések

**6.18. Feladat:**  $h_1 = 1,25$  m magasból  $m = 1$  kg tömegű golyó a  $\Delta t = 0,05$  s időtartamú kölcsönhatás után  $h_2 = 80$  cm magasra pattan vissza. Mekkora átlagos erőt fejtett ki a talaj a golyóra ezen ütközés alatt?

**Megoldás:** A  $h_1$  magasságból eső test

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \quad (6.18.1)$$

sebességgel csapódik be, míg a  $h_2$  magasságba feljutó test a talajról

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} \quad (6.18.2)$$

sebességgel pattan vissza. Az ütközés alatt a teljes impulzusváltozás

$$\Delta P = mv_1 - (-mv_2). \quad (6.18.3)$$

A talaj és a golyó közt ébredő erő ezért

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2})}{\Delta t}. \quad (6.18.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat  $F = 180 \text{ N}$  adódik.

## Folytonos közegek impulzusváltozása

**6.19. Feladat:** (HN 8A-33) A 600 l/perc hozamú és 20 m/s sebességű vízszintes irányú vízszög függőleges falba ütközik, s számottevő freccsenés nélkül szétterül rajta. Mekkora erőt fejt ki a vízszög a falra? (A víz sűrűsége  $1000 \text{ kg/m}^3$ .)

**Megoldás:** Jelölések:  $\eta = 600 \text{ l/perc} = 10 \text{ l/s} = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $v = 20 \text{ m/s}$  és  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . A falra  $\Delta t$  idő alatt

$$\Delta m = \eta \rho \Delta t \quad (6.19.1)$$

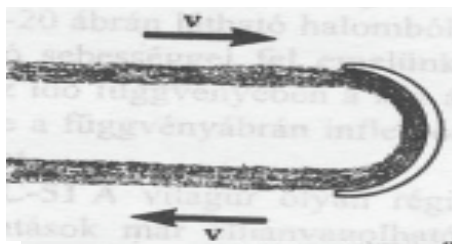
tömeg esik és áll meg. A beérkező víz teljes impulzusváltozása

$$\Delta P = v \Delta m = v \eta \rho \Delta t. \quad (6.19.2)$$

A falon ébredő erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = v \eta \rho = 200 \text{ N}. \quad (6.19.3)$$

**6.20. Feladat:** (HN 8A-34) Egy nyugvó turbinalapátba vízszög ütközik. A lapát a vízszög irányát az 34. ábrán látható módon megfordítja. A víz sebessége mind az ütközés előtt, mind az ütközés után  $v$ . Határozzuk meg a lapátra ható erőt, ha az időegységént becsapódó víz tömege  $\mu$ !



34. ábra.

**Megoldás:** Az időegységként becsapódó víz tömege

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (6.20.1)$$

A beérkező víz impulzusa  $I_{\rightarrow} = mv$ , a távozóé  $I_{\leftarrow} = -mv$ . Az impulzusváltozás:

$$\Delta I = 2mv, \quad (6.20.2)$$

amellyel az ébredő erő:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta 2mv}{\Delta t} = 2v \frac{\Delta m}{\Delta t} = 2\mu v. \quad (6.20.3)$$

**6.21. Feladat:** (HN 8A-40) Egy 3000 kg tömegű rakéta meghajtású űrhajó egy helyben lebeg a Hold felszíne felett, ahol a  $g = 1,63 \text{ m/s}^2$ . Mekkora sebességgel bocsátja ki a rakéta a hajtóanyagot, ha 2 kg/s sebességgel fogyasztja a fűtőanyagot?

**Megoldás:** A kezdeti lépésben tételezzük fel, hogy a  $t$  időpillanatban az  $m$  rakéta  $v$  sebességgel halad felfelé. Ekkor az impulzusa:

$$I_1 = mv \quad (6.21.1)$$

A  $t + \Delta t$  időpillanatban a  $\Delta m$  kiáramlott gázzal kevesebb – azaz  $m - \Delta m$  –, sebessége  $\Delta v$ -vel nő – azaz  $v + \Delta v$ . Ha kiáramló gáz sebessége a rakétához képest  $u$  – lefele irányban –, akkor a  $\Delta m$  kiáramlott gáz sebessége az álló megfigyelőhöz képest:  $v - u$ . A  $t + \Delta t$  időpillanathoz tartozó impulzus:

$$I_2 = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - u). \quad (6.21.2)$$

A  $\Delta t$  alatti impulzusváltozás:

$$\Delta I = I_2 - I_1 = m\Delta v - u\Delta m. \quad (6.21.3)$$

Az  $m$  tömegű rakétára ható erő:  $F = -mg$ . Így az impulzus tétel értelmében:

$$F = -mg = \frac{\Delta I}{\Delta t} = I_2 - I_1 = m \frac{\Delta v}{\Delta t} - u \frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (6.21.4)$$

Felhasználva a feladat szövegét, hogy a rakéta áll, azaz  $\frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$ ,  $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ , valamint a rakéta tömegének időbeli változását  $m(t) = m_0 - \mu t$  ( $m_0$  a kezdeti tömeg), felírható:

$$(m_0 - \mu t)g = \mu u(t), \quad (6.21.5)$$

amelyből

$$u(t) = \frac{m_0 - \mu t}{\mu} g = 1,63 \frac{3000 - 2t}{2}. \quad (6.21.6)$$

Világos, hogy egyre kisebb kiáramlási sebességre van szükség a csökkenő tömeg miatt. A  $t = 0$  időpillanatban  $u = 2445$  m/s.

**6.22. Feladat:** (HN 8B-41) A 130000 kg tömegű rakéta függőlegesen helyezkedik el a kilövőálláson.

(a) Mekkora kell lennie a hajtóművek tolóerejének ahhoz, hogy a rakéta  $17 \text{ m/s}^2$  gyorsulással induljon felfelé?

(b) Hány kg/s a hajtóanyag fogyasztás akkor, ha a hajtógáz rakétához viszonyított sebessége 2100 m/s?

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 130000$  kg;  $a = 17 \text{ m/s}^2$  és  $u = 2100$  m/s.

(a) Az indulás pillanatában

$$ma = F - mg \quad (6.22.1)$$

a rakéta mozgásegyenlete. Innen a tolóerő

$$F = m(a + g) = 3,51 \cdot 10^6 \text{ N}. \quad (6.22.2)$$

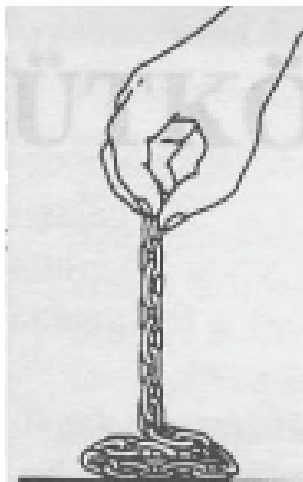
(b) Ez a tolóerő az  $u$  sebességgel kiáramló gáz következménye, azaz

$$F \Delta t = (\Delta m)u, \quad (6.22.3)$$

amelyből a hajtóanyag fogyasztás

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{F}{u} = 1671 \text{ kg/s}. \quad (6.22.4)$$

**6.23. Feladat:** (HN 8C-48) Egy függőlegesen lógó,  $m$  tömegű hajlékony  $l$  hosszúságú láncot állandó  $v$  sebességgel engedünk le az asztalra az 35. ábrán látható módon. Adjuk meg az idő függvényében, hogy mekkora erőt fejt ki a lánc az asztalra!



35. ábra.

**Megoldás:** A hosszegységenkénti tömeget jelölje  $\lambda = \frac{m}{l}$ ; a  $t$  idő alatti süllyedés hossza  $x = vt$ . Így ennyi idő alatt  $m(t) = \lambda x = \frac{m}{l}vt$  tömeg van az asztalon, amely

$$N_1 = \frac{m}{l}vtg \quad (6.23.1)$$

erővel nyomja az asztalt. Ez az ébredő erő egyik része. A másik rész ahhoz kötődik, hogy a  $v$  sebességű  $dx$  hossz megáll. Ennek a hosszának az impulzusváltozása:

$$\Delta I = \lambda dx v = \frac{m}{l}v \Delta t v = \frac{mv^2}{l} \Delta t. \quad (6.23.2)$$

A megállításból eredő másik rész

$$N_2 = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l}. \quad (6.23.3)$$

Az összes erő tehát

$$N = \frac{m}{l}vtg + \frac{mv^2}{l}. \quad (6.23.4)$$

**6.24. Feladat:** (HN 9C-47) A Földhöz viszonyítva  $v$  sebességű és időegységenként  $\mu$  tömeget szállító vízáram csapódik a turbinalapátra. Az ütközés hatására a turbinalapát egyenesvonalú mozgásba kezd, míg a vízáram  $v/4$  sebességgel visszafelé halad a Földhöz képest.

(a) Mekkora sebességgel mozog a turbinalapát?

(b) Határozzuk meg  $v$  és  $\mu$  függvényében, hogy mekkora erő hat a mozgó lapátra?

**Megoldás:**

(a) Az  $u$  sebességgel mozgó turbinalapáton fordul meg a vízáram. Figyelembe véve a relatív sebességeket fennáll, hogy

$$v - u = u + \frac{1}{4}v. \quad (6.24.1)$$

Innen a turbinalapát sebessége

$$u = \frac{3}{8}v. \quad (6.24.2)$$

(b) Ha  $m$  tömegű víz fordul meg, akkor annak impulzusváltozása

$$\Delta I = 2m(v-u) = \frac{5}{4}mv. \quad (6.24.3)$$

A  $\Delta t$  idő alatt a turbinalapátra beérkező tömeg

$$m = \mu \Delta t \frac{v-u}{v}, \quad (6.24.4)$$

amellyel az impulzusváltozás

$$\Delta I = \frac{25}{32} \mu v \Delta t. \quad (6.24.5)$$

Az ébredő erő

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{25}{32} \mu v. \quad (6.24.6)$$

## 7. Feladatok a gravitációs erő tárgyköréből. Kepler törvényei

### Centrális erőtér. Potenciális energia

**7.1. Feladat:** (HN 16B-16) A "szinkron" műhold akkora sebességgel kering körpályán, hogy a földi megfigyelő számára nyugalomban lévőnek látszik.

- Magyarázzuk meg, miért csak az egyenlítő síkjában lévő pályán lehetséges az ilyen mozgás!
- Határozzuk meg a pálya sugarát a Föld középpontjától mérve!
- Határozzuk meg azt a legtávolabbi szélességi fokot, ahonnan ez a műhold a Földről még látható!

**Megoldás:** Jelölések:  $m$  a műhold tömege;  $M$  a Föld tömege;  $T$  a Föld forgásának periódus ideje;  $R$  a műhold távolsága a Föld középpontjától;  $R_F$  a Föld sugara.

(a) A körmozgás a Föld forgástengelye körül kell történjen, amelyhez kizárólag e tengelyre merőleges erő szükséges. A Föld a centruma felé vonzza a testeket. Az első feltétel csak akkor teljesül, ha a test az Egyenlítőn van.

(b) A műhold ún. geostacionárius pályán kering, azaz szögsebessége megegyezik a Föld forgáshoz tartozó  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  szögsebességgel. A keringő műhold mozgásegyenlete

$$mR\omega^2 = \gamma \frac{mM}{R^2}. \quad (7.1.1)$$



A szögsebesség behelyettesítése és az egyenlet átrendezése után az  $R$  sugár

$$R = \sqrt[3]{\frac{\gamma MT^2}{4\pi^2}} = 42170 \text{ km.} \quad (7.1.2)$$

(c) Az szélesség kör, ahonnan a műhold még látható

$$\cos \theta = \frac{R_F}{R} = 0,1511 \rightarrow \theta = 81,3^\circ. \quad (7.1.3)$$

**7.2. Feladat:** (HN 16B-31) Egy nem forgó gömb alakú bolygó tömege  $M$ , sugara  $R$ . A bolygó felszínéről radiális irányban egy részecskét lőnek ki  $\sqrt{\gamma M/(2R)}$  sebességgel. Számítsuk ki mekkora távolságra jut el a részecske a bolygó középpontjától?

**Megoldás:** A mechanikai energia megmaradás tételét kell alkalmazni – figyelembe véve, hogy az "eljutás" zérus pillanatnyi sebességet jelent –

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} = -\gamma \frac{mM}{R'}, \quad (7.2.1)$$

ahol  $R'$  a kérdéses távolság. A sebesség behelyettesítése után

$$R' = \frac{4}{3}R. \quad (7.2.2)$$

**7.3. Feladat:** (HN 16B-34) Jelölje  $M$  illetve  $R$  a Föld tömegét illetve sugarát.

(a) Mekkora az a minimális  $v_0$  sebesség, amellyel az egyenlítőn függőlegesen kilőtt test a Föld felszínétől éppen két földugárnyi magasságig emelkedik? A Föld forgását és a légköri súrlódást ne vegyük figyelembe.

(b) A Föld forgását is számításba véve, növekszik, csökken vagy változatlan marad-e az a, kérdésre adott válasz számértéke?

**Megoldás:**

(a) A mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva

$$-\gamma \frac{mM}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma \frac{mM}{3R} \quad (7.3.1)$$

egyenlet írható fel, amelyből a kért sebesség:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma M}{R}} = 9152 \text{ m/s.} \quad (7.3.2)$$

(b) A Föld forgása csökkenti ezt az értéket, mert a kinetikus energiában a sebesség négyzete van. A forgáshoz tartozó  $v_f$  sebesség érintő irányú (a kilövésre merőleges), amivel a kezdő sebesség négyzete:  $v_0^2 + v_f^2$  mindig nagyobb mint  $v_0^2$ .

**7.4. Feladat:** (HN 16B-36) A Föld felszínén egy testet emelünk.

(a) Határozzuk meg annak a munkának a nagyságát, amivel egy 100 kg tömegű hasznos terhet 1000 km-rel a Föld felszíne felé lehet juttatni!

(b) Határozzuk meg azt a többletmunkát, ami ezen a szinten a hasznos teher körpályára állításához szükséges!

**Megoldás:** Adatok:  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ;  $m = 100 \text{ kg}$ ;  $h = 1000 \text{ km}$ . A Föld tömege:  $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ; sugara:  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

(a) Az általunk végzett munka

$$W = \int_R^{R+h} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \left[ \gamma \frac{mM}{r} \right]_R^{R+h} = \gamma \frac{mM}{R} - \gamma \frac{mM}{R+h} = 1,42 \cdot 10^8 \text{ J.} \quad (7.4.1)$$

(b) Az  $R+h$  sugárnyi távolságban keringés feltétele, hogy az

$$\gamma \frac{mM}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{R+h} \quad (7.4.2)$$

fennálljon. E keringéshez tartozó többlet energia

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R+h} = 2,7 \cdot 10^9 \text{ J.}^* \quad (7.4.3)$$

\* *Megjegyzés:* Tekintettel arra, hogy a Föld forog, és így a rakéta nem álló helyzetből indul, ennél kisebb energiára van szükség. Nem véletlen, hogy a kilövő állomásokat az Egyenlítőhöz közel igyekeznek telepíteni.

**7.5. Feladat:** (HN 16B-37) Mutassuk ki, hogy egy állandó sűrűségű bolygó felületéről a szökési sebesség a bolygó sugarával arányos!

**Megoldás:** A gömb alakú bolygó térfogata:

$$V = \frac{4R^3\pi}{3}, \quad (7.5.1)$$

tömege:

$$M = \rho \frac{4R^3 \pi}{3}. \quad (7.5.2)$$

A szökéshez minimálisan szükséges kinetikus energia

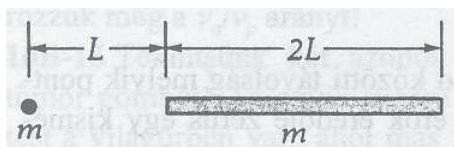
$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma \frac{mM}{R} = \gamma \frac{m\rho \frac{4R^3 \pi}{3}}{R} = \gamma m\rho \frac{4R^2 \pi}{3}. \quad (7.5.3)$$

Egyszerűsítések után:

$$v = \sqrt{\frac{8}{3}\gamma\rho\pi R}, \quad (7.5.4)$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

**7.6. Feladat:** (HN 16C-47) \* A 36. ábrán látható kicsiny test és vékony rúd mindegyikének tömege  $m$ . A pontszerű test a rúd vonalában fekszik. A test  $L$  távolságban van a  $2L$  hosszúságú rúd végétől. Mekkora a kicsiny  $m$  tömegű testre ható gravitációs erő?



36. ábra.

**Megoldás:** A rúd hosszegységnyi tömege  $\lambda = \frac{m}{2L}$ , így a  $dx$  hosszhoz tartozó  $dm$  tömeg

$$dm = \lambda dx. \quad (7.6.1)$$

Legyen a  $dm$  tömeg  $x$  távolságra az  $m$  tömegű testtől. A két test között ható erő nagysága

$$dF = \gamma \frac{m dm}{x^2}. \quad (7.6.2)$$

A teljes erő

$$F = \int_L^{3L} \gamma \frac{m \lambda dx}{x^2} = \gamma \frac{m^2}{2L} \left[ -\frac{1}{x} \right]_L^{3L} = \gamma \frac{m^2}{3L^2}. \quad (7.6.3)$$

**7.7. Feladat:** (HN 16C-58) Egy ember a Föld felszínén guggoló helyzetből tömegközéppontját  $h$  magassággal tudja emelni. Számítsuk ki annak a legnagyobb (a Föld átlagsűrűségével azonos sűrűségű) kisbolygónak a sugarát, amelyről ez az ember ugyanilyen sebességgel felugorva elszökhetne, azaz elhagyhatná annak vonzáskörzetét.

**Megoldás:** A  $h$  magasságba ugró ember kezdősebessége

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (7.7.1)$$

A kisbolygó  $M$  tömege a  $\rho$  sűrűséggel és az  $R$  sugárral kifejezve

$$M = \rho \frac{4R^3\pi}{3}. \quad (7.7.2)$$

A kisbolygón  $v$  sebességgel felugró emberre a mechanikai energia megmaradás tételét alkalmazzuk azzal az ismerettel, hogy a távolban a sebessége – így a kinetikus energiája – zérus, másrészt a távoli pontban zérus a potenciális energia. Felírhatjuk tehát, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0, \quad (7.7.3)$$

amelybe a fenti tömeget behelyettesítve és az egyenletet a sugárra átrendezve kapjuk:

$$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi\gamma\rho}}. \quad (7.7.4)$$

**7.8. Feladat:** \* Az  $M$  tömegű  $R$  sugarú bolygó egyenletes  $\rho$  tömegsűrűségű.

- (a) Hogyan változik az  $m$  tömegű kicsiny testre ható erő a bolygó belsejébe való haladás során?  
 (b) Hogyan változik a potenciális energia a bolygón belül?

**Megoldás:**

(a) Ha az  $m$  test a bolygó belsejében, annak középpontjától  $r$  távolságra van, akkor a gravitációs erőhatásba a bolygónak csak az  $r$  sugaron belüli része ad járulékot. Ezért először ezt a tömeget kell kiszámolni. A bolygó sűrűsége

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}, \quad (7.8.1)$$

amelyből az  $r$  sugárhoz tartozó  $M(r)$  tömeg

$$M(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi} \frac{4}{3}r^3\pi = M \frac{r^3}{R^3}. \quad (7.8.2)$$

Mostmár alkalmazni tudjuk a gravitációs erőtvényt

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM(r)\mathbf{r}}{r^2} = -\gamma \frac{mM \frac{r^3}{R^3}\mathbf{r}}{r^2} = -\gamma mM \frac{r}{R^3} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (7.8.3)$$

azaz a középponttól való távolsággal lineárisan változik. (Az  $\mathbf{r}/r$  vektor a radiális egységvektor.)

(b) A bolygó felszínén a potenciális energia végtelen távoli ponthoz képest

$$U_p(R) = -\gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.8.4)$$

Ehhez az értékhez képest az  $r$  sugárnyi távolságnál

$$U_p(r) - U_p(R) = \int_R^r \gamma mM \frac{r}{R^3} dr = \left[ \frac{1}{2} \gamma mM \frac{r^2}{R^3} \right]_R^r = \frac{1}{2} \gamma mM \frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2} \gamma mM \frac{1}{R}. \quad (7.8.5)$$

Így az a gravitációs potenciál az  $r$  pontban a végtelenhez képest

$$U_p(r) = -\gamma \frac{mM}{R} + \frac{1}{2} \gamma mM \frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.8.6)$$

*Megjegyzés:* Látható, hogy – talán nem meglepő módon – a bolygó közepén is véges a potenciális energia értéke

$$U_p(0) = -\frac{3}{2} \gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.8.7)$$

**7.9. Feladat:** A *VIFIZ* nevű,  $R = 40020$  km sugarú és  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg tömegű bolygó felszínétől  $R$  távolságban  $v_0$  sebességgel keringő űrhajó pályájáról letér és a bolygó felszínébe csapódik. Mekkora a becsapódás sebessége? ( $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>)

Megoldás: Az űrhajó  $2R$  sugarú keringésére érvényes, hogy

$$m \frac{v_0^2}{2R} = \gamma \frac{mM}{4R^2}, \quad (7.9.1)$$

ahonnan

$$v_0^2 = \gamma \frac{M}{2R}. \quad (7.9.2)$$

Másrészt érvényes a mechanikai energia megmaradás tétele, az a kezdeti kinetikai és potenciális energiák összege egyenlő a végső kinetikai és potenciális energiák összegével, azaz

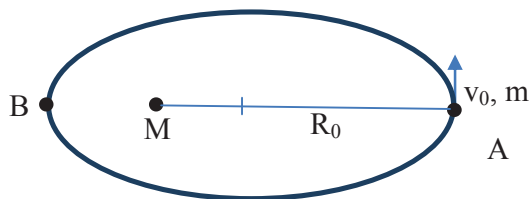
$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{mM}{2R} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.9.3)$$

Ebből és a  $v_0$  sebesség belyettesítével a becsapódási sebesség

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{5}{4} \gamma \frac{M}{R}} = 3535 \text{ m/s}. \quad (7.9.4)$$

## Kepler törvényei

**7.10. Feladat:**  $M$  tömegű csillag körül  $m$  tömegű bolygó kering ellipszis pályán (– a csillag rögzítettnek tekinthető) a 37. ábra szerint. Az ellipszis fél nagytengelyét jelöljük " $a$ "-val. A bolygó az  $R_0 = R_A$  naptávolban (A)  $v_0$  sebességgel halad.



37. ábra.

- (a) Mekkora a napközeli (B) távolság?  
 (b) Mekkora a bolygó sebessége?  
 (c) Mekkora munkát végzett a gravitációs erőter?  
 (d) Ábrázolja grafikonon a potenciális energia értékeket (A, B)!

**Megoldás:**

- (a) Az ellipszisre nagytenelyére fennálló összefüggés

$$R_B + R_A = 2a, \quad (7.10.1)$$

ahol  $R_B$  a napközeli távolságot jelöli. Innen ez a távolság

$$R_B = 2a - R_A. \quad (7.10.2)$$

- (b) Centrális erőterről lévén szó, fennáll az impulzusmomentum megmaradás tétele, vagyis

$$mR_A v_0 = mR_B v_B, \quad (7.10.3)$$

ahol  $v_B$  a B pontbeli (napközeli) sebességet jelöli. Innen

$$v_B = \frac{R_A v_0}{R_B} = \frac{R_A v_0}{2a - R_A}. \quad (7.10.4)$$

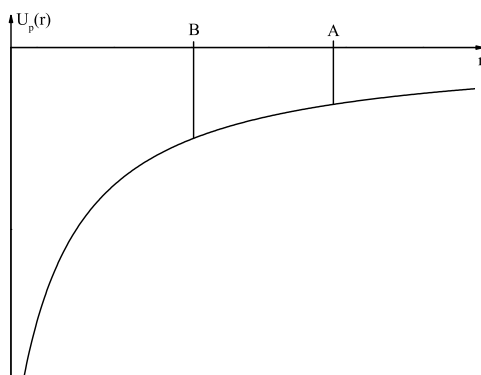
- (c) Az erőter által végzett munka

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left( \frac{R_A^2}{(2a - R_A)^2} - 1 \right) > 0. \quad (7.10.5)$$

- (d) Az A és B pontokbeli potenciális energia értékeket a 38. ábra mutatja.

## 8. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

### Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel



38. ábra.

**8.1. Feladat:** (HN 10B-4) Egy  $\mathbf{F} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$  ( $f_x = 2$  N;  $f_y = 3$  N;  $f_z = 0$  N) erő hat egy testre. A test a  $z$  koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az  $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$  ( $x = 4$  m;  $y = 5$  m;  $z = 0$  m) pontban támad. Határozzuk meg a forgatónyomaték nagyságát és irányát!

**Megoldás:** A forgatónyomaték definíciója  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  szerint a

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (yf_z - zf_y)\mathbf{i} + (zf_x - xf_z)\mathbf{j} + (xf_y - yf_x)\mathbf{k} \quad (8.1.1)$$

determináns kiszámolását kell elvégezzük. A számszerű adatok behelyettesítésével forgatónyomaték vektor

$$\mathbf{M} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad (8.1.2)$$

azaz a vektor nagysága 2 Nm, iránya a  $z$  tengely irányításával megegyezik.

**8.2. Feladat:** Egy "L" hosszúságú kötélen végén 0,2 kg tömegű test függőleges síkban körmozgást végez. A pálya csúcán a kör középpontjára vett perdület fele akkora, mint a pálya alján, ahol a tömeg kinetikus energiája 4 J. Mekkora az "L"?

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 0,2$  kg,  $E = 4$  J, valamint  $v_a$  az alsó,  $v_f$  a felső pontbeli sebességek. Mivel a pálya alsó pontján ismerjük a kinetikus energiát, így az

$$E = \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (8.2.1)$$

összefüggésből az alsóponti sebesség

$$v_a = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{40} \text{ m/s} = 6,32 \text{ m/s}. \quad (8.2.2)$$

Az impulzusmomentum  $N = (L =)mvL$  definíciójából következik, hogy a felső pontban úgy lehet a fele az alsó impulzusmomentumnak, ha a felsőponti sebesség

$$v_f = \frac{v_a}{2} = \sqrt{10} \text{ m/s} = 3,16 \text{ m/s.} \quad (8.2.3)$$

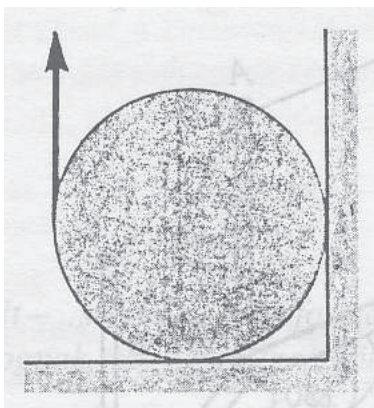
A két sebesség valamint az alsó és felső pontok magassága közötti kapcsolatot a mechanikai energia megmaradását kifejező összefüggéssel teremthetjük meg:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \cdot 2L. \quad (8.2.4)$$

Az alsó és felső pontok közötti távolság  $2L$ . A behelyettesítések után a kötéll hossza

$$L = 0,75 \text{ m.} \quad (8.2.5)$$

**8.3. Feladat:** (HN 10C-48) A 39. ábra egy  $G$  súlyú homogén hengerre függőleges irányban ható  $F$  erőt mutat. A henger és a felületek közötti nyugalmi súrlódási együttható  $\mu = 0,5$ . Fejezzük ki a  $G$  függvényében azt a legnagyobb  $F$  erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását!



39. ábra.

**Megoldás:** Jelölje  $N_1$  a alsó érintkezési ponton felfele mutató támaszerőt,  $F_{s1}$  a balról jobbra mutató súrlódási erőt ugyanitt. Legyen  $N_2$  a falnál jobbról balra mutató támaszerő, míg az itt ható felfele mutató súrlódási erő  $F_{s2}$ . E mennyiségek közötti kapcsolat

$$F_{s1} = \mu N_1 \quad (8.3.1)$$

és

$$F_{s2} = \mu N_2. \quad (8.3.2)$$



A henger akkor van egyensúlyban, ha a ható erők eredője és forgatónyomatéka zérus. Azaz előjel helyesen — pozitív az az erő, amely balról jobbra, illetve alulról felfele mutat — a függőleges irányban

$$0 = F - G + N_1 + F_{s2}, \quad (8.3.3)$$

a vízszintes irányban

$$0 = F_{s1} - N_2. \quad (8.3.4)$$

A forgatónyomatékra

$$0 = F_{s2}R + F_{s2}R - FR \quad (8.3.5)$$

A fenti öt egyenletből kell az  $F$  erőt kifejezni. A (8.3.1) és (8.3.2) súrlódási erők behelyettesítésével illetve az (8.3.5) egyenletben az  $R$ -rel való egyszerűsítés után kapjuk:

$$0 = F - G + N_1 + \mu N_2, \quad (8.3.6)$$

a vízszintes irányban

$$0 = \mu N_1 - N_2. \quad (8.3.7)$$

A forgatónyomatékra

$$0 = \mu N_2 + \mu N_1 - F \quad (8.3.8)$$

A (8.3.7) egyenletből  $N_2$ -öt kifejezve és a (8.3.6) valamint a (8.3.8) egyenletekbe helyettesítve

$$0 = F - G + (1 + \mu^2)N_1 \quad (8.3.9)$$

és

$$0 = \mu(\mu + 1)N_1 - F \quad (8.3.10)$$

adódik. Az  $N_1$  eliminálásával az  $F$  erő

$$F = \frac{\mu(\mu + 1)}{2\mu^2 + \mu + 1}G. \quad (8.3.11)$$

A  $\mu = 0,5$  behelyettesítési értékkel az  $F$  erő maximális értéke

$$F = 0,375G. \quad (8.3.12)$$

**8.4. Feladat:** (HN 13B-7) Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le az  $\alpha$  szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke  $\operatorname{tg}\alpha/3$  kell, hogy legyen! (A henger tehetetlenségi nyomatéka  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ .)

**Megoldás:** A hengerre az  $mg$  súlyerő, az  $N = mg \cos \alpha$  támaszerő és az  $F_s$  tapadási súrlódási erő hat. A mozgásegyenletek a haladó mozgásra

$$ma = mg \sin \alpha - F_s, \quad (8.4.1)$$

és a forgómozgásra

$$\theta \beta = F_s R. \quad (8.4.2)$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \quad (8.4.3)$$

összefüggéssel fogalmazható meg. A három egyenletből az  $F_s$  erő alakja

$$F_s = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mR^2}{\theta}}. \quad (8.4.4)$$

Figyelembe véve, hogy a tapadási erő maximális, ha

$$F_s = \mu mg \cos \alpha, \quad (8.4.5)$$

így ezt behelyettesítve a minimális  $\mu$  tapadási együttható értékére — felhasználva a tehetetlenségi nyomaték kifejezését —

$$\mu = \frac{mg \sin \alpha}{(1 + \frac{mR^2}{\theta})mg \cos \alpha} = \frac{\text{tg} \theta}{1 + \frac{mR^2}{\theta}} = \frac{\text{tg} \theta}{3}. \quad (8.4.6)$$

adódik. Q.E.D.

**8.5. Feladat:** Egy tömör hengert és egy vékony falú csövet egyszerre engedünk el egy adott hajlásszögű lejtő tetejéről. Mindkét tárgy tisztán gördül.

- Határozza meg a henger tömegközéppontjának gyorsulását!
- Határozza meg a cső tömegközéppontjának gyorsulását!
- Milyen messze gurul el a cső, míg a henger  $s_h$  utat tesz meg?

**Megoldás:** Jelölje  $\alpha$  a lejtő hajlásszögét,  $\theta_h$  a henger és  $\theta_{cs}$  a cső tehetetlenségi nyomatékát,  $F_s$  a tapadási súrlódási erőt. Az  $m$  és  $R$  a gördülő test tömege és sugara. ( $\theta_h = \frac{1}{2}mR^2$ ;  $\theta_{cs} = mR^2$ )  
A lejtőn legördülő test mozgásegyenlete a haladómozgásra

$$ma = mg \sin \alpha - F_s, \quad (8.5.1)$$

és a forgómozgásra —  $\theta$  a gördülő test tehetetlenségi nyomatéka —

$$\theta \beta = F_s R. \quad (8.5.2)$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \quad (8.5.3)$$

összefüggéssel fogalmazható meg. E három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{m}{m + \frac{\theta}{R^2}} g \sin \alpha. \quad (8.5.4)$$

(a) A henger gyorsulása

$$a_h = \frac{m}{m + \frac{\theta_h}{R^2}} g \sin \alpha = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \quad (8.5.5)$$

(b) A cső gyorsulása

$$a_{cs} = \frac{m}{m + \frac{\theta_{cs}}{R^2}} g \sin \alpha = \frac{1}{2} g \sin \alpha. \quad (8.5.6)$$

(c) A henger az  $s_h$  utat

$$t = \sqrt{\frac{2s_h}{a_h}} \quad (8.5.7)$$

idő alatt teszi meg. Ezalatt a cső

$$s_{cs} = \frac{1}{2} a_{cs} t^2 = \frac{1}{2} a_{cs} \frac{2s_h}{a_h} = \frac{3}{4} s_h \quad (8.5.8)$$

utat tesz meg.

**8.6. Feladat:** Egy jójő külső  $R$  sugara tízszerese belső  $r$  sugarának. A jójő orsója körüli tehetlenségi nyomatéka jó közelítéssel  $\theta = \frac{1}{2} m R^2$ , ahol  $m$  a jójő teljes tömege. A fonál vége nem mozog.

(a) Számítsa ki a jójő tömegközéppontjának gyorsulását!

(b) Határozza meg a fonálban ébredő erőt!

**Megoldás:** Jelölés: a kötél erő  $K$  és  $r = R/10$ .

(a) A jójő tömegközéppontja körüli forgásra vonatkozó mozgásegyenlet

$$\theta\beta = Kr, \quad (8.6.1)$$

azaz a kötél erő hozza létre a  $\beta$  szöggyorsulását forgást. A haladó mozgásra felírható, hogy

$$ma = mg - K. \quad (8.6.2)$$

A haladó és forgómozgás közötti kapcsolat (tisztá gördülés)

$$a = r\beta. \quad (8.6.3)$$

A három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{g}{\frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} + 1} = \frac{1}{51} g. \quad (8.6.4)$$

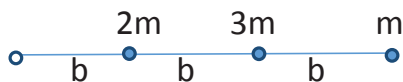
(b) A kötél erő

$$K = \frac{50}{51} mg. \quad (8.6.5)$$

**8.7. Feladat:** Egy elhanyagolható tömegű merev rúdra három pontszerű testet erősítettek. Az egyik végén csapágyazott rúd függőleges síkban lenghet.

(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomaték a csapágyra nézve?

(b) Mekkora lesz az alsó test sebessége a rúd függőleges helyzetben való áthaladásakor, ha a 40. ábrán látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük?



40. ábra.

Megoldás:

(a) A felfüggesztési pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\theta = \sum_i m_i r_i^2 = 2mb^2 + 3m(2b)^2 + m(3b)^2 = 23mb^2. \quad (8.7.1)$$

(b) A testek helyzeti energiájának összes megváltozása:

$$\Delta E_h = 2mgb + 3mg \cdot 2b + mg \cdot 3b = 11mgb. \quad (8.7.2)$$

E helyzeti energiaváltozás alakul forgási energiává:

$$\Delta E_h = \frac{1}{2} \theta \omega^2, \quad (8.7.3)$$

amelyből behelyettesítés után a szögsebességre kapjuk:

$$\omega = \sqrt{\frac{22g}{23b}}. \quad (8.7.4)$$

Az  $m$  tömegű test sebessége az alsó pontban:

$$v = R\omega = 3b\omega = 3\sqrt{\frac{22gb}{23}}. \quad (8.7.5)$$

**8.8. Feladat:** Homogén tömör tárcsa sugara 6 cm, tömege 1,5 kg. Nyugalomból indul a motor által kifejtett 0,6 Nm forgatónyomaték hatására. Mennyi idő alatt éri el az 1200 1/perc fordulatszámot? ( $\theta = \frac{1}{2}mr^2$ )

**Megoldás:** Jelölések:  $r = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$ ,  $m = 1,5 \text{ kg}$ ,  $M = 0,6 \text{ Nm}$  és  $f = 1200 \text{ 1/perc} = 20 \text{ 1/s}$ .

A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M, \quad (8.8.1)$$

ahonnan a  $\beta$  szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M}{\theta} = \frac{2M}{mr^2} = 222,2 \text{ 1/s}^2. \quad (8.8.2)$$

A szögsebesség és a fordulatszám közötti összefüggés

$$\omega = 2\pi f, \quad (8.8.3)$$

másrészt

$$\omega = \beta t. \quad (8.8.4)$$

A kérdéses fordulatszám eléréséhez szükséges idő

$$t = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = 0,565 \text{ s}. \quad (8.8.5)$$

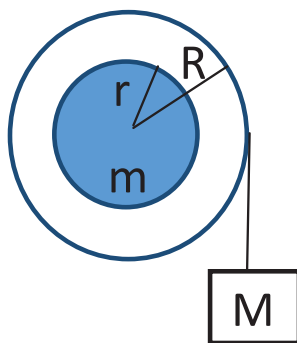
**8.9. Feladat:** Egy  $r = 20 \text{ cm}$  "tehetetlenségi" sugarú,  $m = 40 \text{ kg}$  tömegű kerék sugara  $R = 30 \text{ cm}$ . Az  $R$  sugárhoz tartozó keréktömeget hanyagoljuk el.) Függőlegesen helyeztük egy vízszintes tengelyre. Egy  $M = 2,0 \text{ kg}$  tömegű testet erősítettünk a szélére tekert kötélre a 41. ábrának megfelelően. Határozza meg a kerék elengedés utáni kezdeti szöggyorsulását! (A kerékre:  $\theta = mr^2$ .)

**Megoldás:** Jelölés: a kötelben ébredő erő  $K$ . A kerék forgómozgására felírhatjuk, hogy

$$\theta\beta = KR, \quad (8.9.1)$$

míg az  $m$  tömegű test haladó mozgására

$$Ma = Mg - K. \quad (8.9.2)$$



41. ábra.

A tiszta gördülés feltétele, hogy

$$a = R\beta. \quad (8.9.3)$$

E három egyenletből a kiszámolt szöggyorsulás

$$\beta = \frac{MgR}{\theta + MR^2} = \frac{MgR}{mr^2 + MR^2} = 3,371/s^2. \quad (8.9.4)$$

**8.10. Feladat:** Egy lendkerék fordulatszáma 60 rad/s-ról 180 rad/s-ra növekedett a rajta történt 100 J munkavégzés következtében.

(a) Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka?

(b) Ezt követően egy 3-szor nagyobb tehetetlenségi nyomatékú álló kereket nyomunk a lendkerékhez. Mekkora lesz a kialakuló közös fordulatszám?

**Megoldás:** a, A végzett munka a kinetikus energiát változtatja meg, azaz

$$W = \frac{1}{2}\theta\omega_2^2 - \frac{1}{2}\theta\omega_1^2, \quad (8.10.1)$$

ahol  $\omega_1$  a kezdeti,  $\omega_2$  a végső szögsebesség,  $\theta$  a tehetetlenségi nyomaték. Innen a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = \frac{2W}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,00694 \text{ kgm}^2. \quad (8.10.2)$$

b, Az impulzusmomentum megmaradása miatt

$$\theta\omega_2 = (\theta + 3\theta)\omega', \quad (8.10.3)$$

amelyből

$$\omega' = \frac{1}{4}\omega_2 = 45 \text{ rad/s}. \quad (8.10.4)$$

**8.11. Feladat:** Egy  $m$  tömegű,  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$  tehetetlenségi nyomatékú kereket  $\omega_0$  szögsebességgel megforgatunk és zérus kezdősebességgel a  $\mu$  súrlódási együtthatójú talajra engedjük.

- (a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?  
 (b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:

(a) A kerék és a talaj között ébredő  $\mu mg$  súrlódási erő kezdi haladó (transzlációs) mozgásban gyorsítani a kereket, másrészt az súrlódási erő miatt ébredő forgatónyomaték fékezi forgó (rotációs) mozgásában. A kerék haladó mozgására érvényes dinamikai egyenlet

$$ma = \mu mg, \quad (8.11.1)$$

ahol a pozitív előjel a sebesség növekedését fejezi ki. Míg a forgómozgásra felírható egyenlet — a forgómozgás alapegyenlete — a

$$\theta\beta = M = -\mu mgR, \quad (8.11.2)$$

ahol a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a súrlódási erő által létrehozott forgatónyomaték csökkenti a szögsebességet. Ezekből a kerék  $a$  gyorsulása és  $\beta$  szöggyorsulása

$$a = \mu g \quad (8.11.3)$$

és

$$\beta = -\frac{\mu mgR}{\theta}. \quad (8.11.4)$$

A  $v(t)$  sebesség és az  $\omega(t)$  szögsebesség egyszerűen

$$v(t) = \mu gt \quad (8.11.5)$$

és

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta}t. \quad (8.11.6)$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy az

$$v(t) = R\omega(t) \quad (8.11.7)$$

feltétel teljesüljön, azaz

$$\mu gt = R \left( \omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta}t \right). \quad (8.11.8)$$

A  $\theta$  behelyettesítésével a kértelt eltelt idő

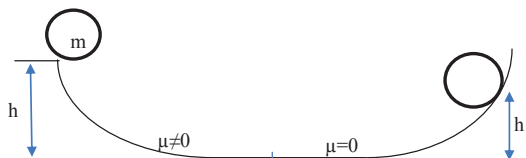
$$t = \frac{R\omega_0}{3\mu g}. \quad (8.11.9)$$

(b) Az eközben megtett út

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\mu g \frac{R^2\omega_0^2}{9\mu^2g^2} = \frac{1}{18} \frac{R^2\omega_0^2}{\mu g}. \quad (8.11.10)$$

**8.12. Feladat:** A 42. ábrán látható módon az  $m$  tömegű  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$  tehetetlenségi nyomatékú korongot egy lejtőn  $h$  magasságban elengedünk. A lejtő tapadási súrlódási együtthatója  $\mu \neq 0$ , ezért a korong itt tisztán gördül. A pálya második fele viszont súrlódásmentes.

- (a) Mekkora sebessége és szögsebessége van a korongnak a lejtő alján?  
 (b) Milyen  $h'$  magasra megy fel a súrlódásmentes emelkedőn a korong?  
 (c) Mennyi a lejtő tetején a korong impulzus momentuma?



42. ábra.

### Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a  $v = R\omega$ . A mechanikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.12.1)$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \quad (8.12.2)$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}. \quad (8.12.3)$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a lejtőn felszalad  $h'$  és ott egy helyben forog  $\omega$  szögsebességgel. Azaz translációs kinetikus energiája alakul csak át helyzeti energiává:

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2. \quad (8.12.4)$$



Innen az emelkedés magassága

$$h' = \frac{2}{3}h. \quad (8.12.5)$$

(c) A lejtő tetején forgó korong az impulzusmomentuma:

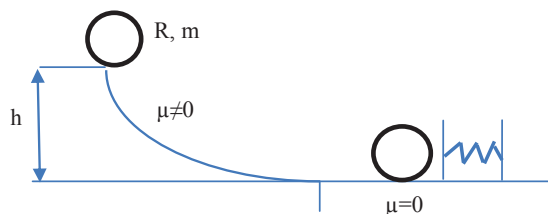
$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR \sqrt{\frac{gh}{3}}. \quad (8.12.6)$$

**8.13. Feladat:** Egy  $R = 10$  cm sugarú,  $m = 1$  kg tömegű tömör korong ( $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ ) tisztán legördül egy  $h = 0,3$  m magasságú lejtős pályán. A lejtő alján nekiütközik a 43. ábrán látható fékezőrugónak, amelynek ütközője és a pálya ezen szakasza súrlódásmentes. A  $k = 400$  N/m rugóállandójú rugó nyugalmi hossza  $l_0 = 20$  cm.

(a) Mekkora a korong sebessége és szögsebessége a lejtő alján?

(b) Mekkora a korong impulzusmomentuma a rugó összenyomódása után?

(c) Mennyivel nyomódott össze a rugó?



43. ábra.

### Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a  $v = R\omega$ . A mechanikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.13.1)$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 2\text{m/s} \quad (8.13.2)$$

és

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 20 \text{ rad/s.} \quad (8.13.3)$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a rugót összenyomja és ott egyhelyben forog  $\omega$  szögsebességgel:

$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR \sqrt{\frac{gh}{3}} = 0,1 \text{ kg m}^2/\text{s.} \quad (8.13.4)$$

(c) A fentiek szerint a translációs kinetikus energiája alakul csak át rugalmas energiává:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2. \quad (8.13.5)$$

Innen az összenyomódás mértéke:

$$\Delta = l_0 - l = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} = 0,1 \text{ m.} \quad (8.13.6)$$

**8.14. Feladat:** Egy  $R$  sugarú,  $m$  tömegű homogén tömegeloszlású nem forgó kereket tengelyre merőlegesen  $v_0$  sebességgel meglökünk és a  $\mu$  súrlódási együtthatójú talajra engedjük. A kerék tehetetlenségi nyomatéka  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ .

(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?

(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:

(a) A kereket a talajra engedve a  $v_0$  sebességgel ellentétes  $F_s = -\mu mg$  súrlódási erő hat, amely egyrészt csökkenti a sebességet, másrészt a kerék középpontjára forgatónyomatékot ad, amely a kereket forgásba hozza. A translációra vonatkozó mozgásegyenlet

$$ma = F_s = -\mu mg, \quad (8.14.1)$$

amelyből a gyorsulás

$$a = -\mu g. \quad (8.14.2)$$

Így a kerék sebessége a

$$v(t) = v_0 - \mu gt \quad (8.14.3)$$

függvény szerint változik. A forgómozgásra a forgómozgás alapegyenlete írható fel, amely — figyelembe véve a forgatónyomaték előjelét —

$$\theta\beta = \mu mgR. \quad (8.14.4)$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítésével, valamint az egyenlet rendezésével a szöggyorsulás

$$\beta = \frac{2\mu g}{R}. \quad (8.14.5)$$

A kerék szögsebessége az

$$\omega(t) = \frac{2\mu g}{R}t \quad (8.14.6)$$

függvény szerint változik. A tiszta gördülés feltétele, hogy a

$$v(t) = R\omega(t) \quad (8.14.7)$$

összefüggés teljesüljön, azaz a

$$v_0 - \mu g t = R \frac{2\mu g}{R} t \quad (8.14.8)$$

fennálljon. Ebből a tiszta gördülésig eltelt időt kifejezve kapjuk, hogy

$$t = \frac{v_0}{3\mu g}. \quad (8.14.9)$$

(b) A megtett út az

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (8.14.10)$$

négyzetes úttörvénybe helyettesítve

$$s = \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{\mu g} \quad (8.14.11)$$

**8.15. Feladat:** \*\* A  $m$  tömegű  $R$  sugarú homogén korongot forgástengelye körül  $\omega_0$  szögsebességgel megforgatunk, majd lapjával — a tengely merőleges a felületre — a sík asztalra helyezzük. A korong és asztal között  $\mu$  súrlódási tényező van. Feltételezve, hogy korong egyenletesen nyomja az asztalt, mennyi idő múlva áll meg a korong? (A korong tehetetlenségi nyomatéka  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ .)

**Megoldás:** A feladat megoldásának kulcsa az eredő forgatónyomaték kiszámolása. Vezessük be a felületi tömegsűrűséget, amely

$$\eta = \frac{m}{R^2\pi}. \quad (8.15.1)$$

A korongból tekintsünk egy  $r$  sugarú  $dr$  szélességű körgyűrűt. Ennek tömege

$$dm = \eta 2r\pi dr. \quad (8.15.2)$$

A körgyűrű érintője mentén ébredő  $dF_s$  súrlódási erő

$$dF_s = \mu dm g, \quad (8.15.3)$$

amely erő a körgyűrű középpontjára vonatkoztatva

$$dM = \mu dm gr = 2\pi\mu\eta gr^2 dr \quad (8.15.4)$$

forgatónyomatékok hoz létre. A korongra ható teljes forgatónyomaték

$$M = \int_0^R 2\pi\mu\eta gr^2 dr = \frac{2\pi}{3}\mu\eta gR^3 = \frac{2}{3}\mu mgR. \quad (8.15.5)$$

Felírva a forgómozgás alapegyenletét

$$\theta\beta = M = \frac{2}{3}\mu mgR \quad (8.15.6)$$

a szögsebesség kiszámolható:

$$\beta = \frac{4}{3} \frac{\mu g}{R}. \quad (8.15.7)$$

A megállásig eltelt idő

$$t = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{3}{4} \frac{\omega_0 R}{\mu g}. \quad (8.15.8)$$

## Impulzusmomentum megmaradása

**8.16. Feladat:** (HN 12B-28) A 44. ábrán látható két tömör tárcsa sugara  $R$ , egyik tömeg  $m$ , a másiké  $3m$ . A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának  $\omega_0$  kezdő szögsebességet adunk, majd nagyon kis magasságból ráejtjük a kezdetben nyugalomban lévő alsó tárcsára. A tárcsák — a közöttük fellépő súrlódás hatására — végül közös  $\omega$  szögsebességgel együtt forognak.

- A megadott mennyiségekkel fejezzük ki a végső  $\omega$  szögsebességet, és
- a tárcsák egymáson való súrlódása közben végzett munkát!
- Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási "ütközésnek"?

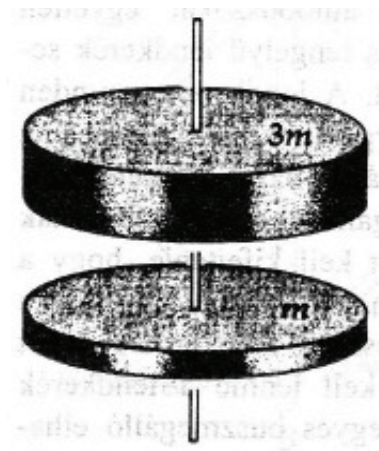
### Megoldás:

(a) Külső forgatónyomatékok hiányában az impulzusmomentum megmaradás tételét alkalmazhatjuk. Kezdetben a  $3m$  tömegű test forog  $\omega_0$  szögsebességgel. Az impulzusmomentum

$$N_1 = \theta_{3m}\omega_0 = \frac{1}{2}3mR^2\omega_0, \quad (8.16.1)$$

ahol  $\theta_{3m}$  a  $3m$  tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Az összetapadás után együtt forog a két test, az együttes impulzusmomentum

$$N_2 = (\theta_m + \theta_{3m})\omega = \left(\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2\right)\omega, \quad (8.16.2)$$



44. ábra.

ahol  $\theta_m$  az  $m$  tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Mivel  $N_1 = N_2$ , így

$$\frac{1}{2}3mR^2\omega_0 = \left(\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2\right)\omega, \quad (8.16.3)$$

amelyből

$$\omega = \frac{3}{4}\omega_0. \quad (8.16.4)$$

(b) A kezdeti kinetikus energia

$$E_1 = \frac{1}{2}\theta_{3m}\omega_0^2 = \frac{1}{4}3mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2, \quad (8.16.5)$$

míg az összetapadás után

$$E_2 = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_{3m})\omega^2 = \frac{1}{4}4mR^2\omega^2 = \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2. \quad (8.16.6)$$

A két energia különbsége, amennyi a belső energiát növeli:

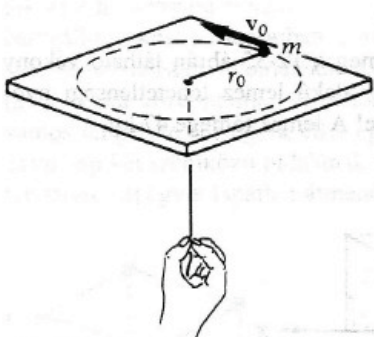
$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2 - \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{16}mR^2\omega_0^2. \quad (8.16.7)$$

(c) Az egyenesvonalú analogon: a  $3m$  tömegű  $v_0$  sebességű test ütközése a nyugvó  $m$  tömegű testtel. Ekkor a közös sebesség:

$$v = \frac{3}{4}v_0. \quad (8.16.8)$$

**8.17. Feladat:** (HN 12C-50) A 45. ábra egy  $r_0$  sugarú körpályán  $v_0$  sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó  $m$  tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test az  $r_0/2$  sugarú körpályára kerüljön. Számítsuk ki az  $m$ , az  $r_0$  és  $v_0$  függvényében

- a test végső sebességét és
- a fonál új helyzetbe húzása során végzett munkát!
- Mutassuk meg, hogy a végzett munka egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával!



45. ábra.

### Megoldás:

(a) Mivel jelen esetben a mozgás során mindvégig a kötél erő sugárirányú, azaz centrális, így az impulzusmomentum megmaradásának tétele alkalmazható

$$mv_0 r_0 = mv \frac{r_0}{2}. \quad (8.17.1)$$

Ebből a test végső sebessége

$$v = 2v_0. \quad (8.17.2)$$

(b) A munka kiszámolásához először a  $K$  kötél erőt egy közbenső  $r$  sugarú pályára kell megadni. Ehhez egyrészt újra alkalmazni kell az impulzusmomentum megmaradásának tételét

$$mv_0 r_0 = mvr, \quad (8.17.3)$$

másrészt fel kell írni a körpályán való mozgásra a

$$K = m \frac{v^2}{r} \quad (8.17.4)$$

mozgásegyenletet. E kettőből az origó felé mutató  $K$  kötél erő

$$K = m \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}. \quad (8.17.5)$$

A végzett munka — figyelembe véve az erő és a radiális egységvektor ellentétes irányát —

$$W = - \int_{r_0}^{r_0/2} m \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3} dr = \frac{1}{2} m v_0^2 r_0^2 \left[ \frac{1}{r^2} \right]_{r_0}^{r_0/2} = \frac{3}{2} m v_0^2. \quad (8.17.6)$$

(c) A kinetikus energia megváltozása

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m (2v_0)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{3}{2} m v_0^2 = W, \quad (8.17.7)$$

ahogy annak lennie is kell.

## Forgási energia

**8.18. Feladat:** Az  $L$  hosszúságú  $m$  tömegű rúd függőlegesen áll, az alsó pontja súrlódásmentes csapággal csatlakozik a talajhoz. Az egyensúlyi helyzetből kimozdul és a talajba csapódik. Mekkora a rúd szögsebessége a becsapódás pillanatában? A rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúd végére vonatkoztatva  $\theta = \frac{1}{3} m L^2$ .

**Megoldás:** A talajszintet választva a potenciális energia zérus pontjának a rúd — a rúd tömegközéppontjának — potenciális energiája álló helyzetben

$$E_{p1} = mg \frac{L}{2}, \quad (8.18.1)$$

míg a fekvő helyzetben

$$E_{p2} = 0. \quad (8.18.2)$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \quad (8.18.3)$$

míg a végső kinetikus energia a forgásból származó

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \theta \omega^2. \quad (8.18.4)$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ( $E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$ ) kapjuk, hogy

$$mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \theta \omega^2. \quad (8.18.5)$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \quad (8.18.6)$$

adódik.

**8.19. Feladat:** \* Az  $L$  szárhosszúságú, száranként  $m$  tömegű létra egyik lába a falnál áll, míg a másik lába súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes talajon. A kezdetben  $2\alpha$  szögre szétnyitott létra szára csúszik, és a létra teljesen szétnyílván a talajba csapódik. Mekkora a létra szárainak szögsebessége a becsapódás pillanatában? (A rúd végpontjára vett tehetetlenségi nyomatéka  $\frac{1}{3}mL^2$ .)

**Megoldás:** A létra a becsapódás pillanatában csak forgómozgást végez. Ez belátható, ha végiggondoljuk a következőt. Ha a létra csúcsa — a két szár találkozási pontja —  $v_x$  sebességgel halad, akkor csúszó talppont sebessége  $2v_x$ . A csúcspontra a becsapódás pillanatában csak függőleges mozgást végez ( $v_x = 0$ ), így a csúszó talppont sebessége ugyancsak zérus. Azaz a létra egyetlen pontja sem végez haladó mozgást. A kezdeti helyzeti energia alakul át forgási energiává:

$$2mg\frac{L}{2}\cos\alpha = 2\frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.19.1)$$

Egyszerűsítés és átrendezés után mindkét rúd szögsebessége

$$\omega\sqrt{\frac{3g}{L}}. \quad (8.19.2)$$

**8.20. Feladat:** \* A  $h$  magasságú toronyugró a palló szélén áll és összegörnyedés nélkül — merev rúdként — a vízbe fordul. (A lába a pallón nem csúszik meg a dőlés során.) Mekkora szögnél válik el a pallótól?

**Megoldás:** Jelölje  $\alpha$  azt a függőlegessel bezárt szöveget, amelynél éppen elvélük a pallótól a toronyugró lába. Első lépésként számítsuk ki mekkora ebben a pillanatban a szögsebessége. A palló szintjét tekintve a potenciális energia zérus pontjának a kezdeti helyzeti energia

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \quad (8.20.1)$$

míg a dőlt helyzetben

$$E_{p2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha. \quad (8.20.2)$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \quad (8.20.3)$$

míg az elválás pillanatához tartozó forgásból származó kinetikus energia

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.20.4)$$



A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ( $E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$ ) kapjuk, hogy

$$mg \frac{L}{2} = mg \frac{L}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \theta \omega^2. \quad (8.20.5)$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre azt kapjuk, hogy

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos \alpha)}. \quad (8.20.6)$$

A rúd tömegközéppontjának sebessége

$$v = \frac{L}{2} \omega = \sqrt{\frac{3}{4} g L (1 - \cos \alpha)}. \quad (8.20.7)$$

Az elválás pillanatában — egyetlen erőként — az  $mg$  súlyerő rúd irányú (radiális) komponense hat és tartja körpályán a rúd tömegközéppontját, azaz

$$m \frac{v^2}{\left(\frac{L}{2}\right)} = mg \cos \alpha. \quad (8.20.8)$$

A sebesség behelyettesítése és az egyszerűsítések után

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \quad (8.20.9)$$

adódik, amelyből az elválás pillanatához tartozó szög  $\alpha = 53,1^\circ$ .

## 9. Feladatok a rezgőmozgás és a mechanikai hullámok tárgyköréből

### Harmonikus rezgőmozgás

**9.1. Feladat:** (HN 15A-1) 20 g tömegű részecske harmonikus rezgőmozgást végez 3 rezgés/másodperc frekvenciával és 5 cm amplitúdóval.

- Mekkora teljes távolságot fut be a részecske egy teljes periódus folyamán?
- Mekkora a legnagyobb sebessége? Hol lép ez fel?
- Határozzuk meg a részecske legnagyobb gyorsulását! Hol lép fel a mozgás során a legnagyobb gyorsulás?

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 20 \text{ g} = 0,02 \text{ kg}$ ,  $f = 3 \text{ 1/s}$  és  $A = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$ . A rezgés körfrekvenciája  $\omega = 2\pi f = 18,85 \text{ 1/s}$ .

- Egy teljes periódus alatt 4-szer futja be az amplitúdónyi kitérést, így a megtett út

$$s = 4A = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}. \quad (9.1.1)$$

(b) A sebesség maximális értéke

$$v_{max} = A\omega = 0,94 \text{ m/s.} \quad (9.1.2)$$

Ezt az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor éri el a részecske.

(c) A gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = A\omega^2 = 17,77 \text{ m/s}^2. \quad (9.1.3)$$

Ezt a maximális kitérésű helyeken való áthaladáskor éri el a részecske.

**9.2. Feladat:** Pontszerűnek tekinthető 1 kg tömegű testre  $F = -Dx$  alakú rugalmas erő hat. A rugóállandó  $D = 0,25 \text{ N/cm}$ . A  $t = 0$  pillanatban a kitérés 20 cm, a sebesség 2,83 m/s. Mekkora a rezgés amplitúdója?

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 1 \text{ kg}$ , a  $t = 0$  pillanathoz tartozó kitérés és sebesség értékek  $y_0 = 20 \text{ cm}$  és  $v_0 = 2,83 \text{ m/s}$ .

A rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 5 \text{ 1/s.} \quad (9.2.1)$$

A rezgés kitérése és sebessége

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (9.2.2)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad (9.2.3)$$

ahol  $A$  az amplitúdó és  $\varphi$  a kezdőfázis. A  $t = 0$  pillanatra

$$y_0 = A \sin \varphi, \quad (9.2.4)$$

$$v_0 = A\omega \cos \varphi. \quad (9.2.5)$$

E két egyenletből behelyettesítés után az amplitúdó

$$A = \frac{\sqrt{y_0^2 \omega^2 + v_0^2}}{\omega} = 0,6 \text{ m.} \quad (9.2.6)$$

**9.3. Feladat:** A 4 N/m rugóállandójú rugóra egy 0,8 kg tömegű testet függesztünk. Nyugalmi helyzetéből 12 cm-t kitérítjük és itt 0,4 m/s kezdősebességgel indítva harmonikus rezgőmozgásba hozzuk. Mézbe merítve megáll a test. Mekkora a súrlódás által disszipált mechanikai

energia?

**Megoldás:** Jelölések:  $k = 4 \text{ N/m}$ ,  $m = 0,8 \text{ kg}$ ,  $x = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}$  és  $v = 0,4 \text{ m/s}$ .

A mozgás kezdetén a teljes mechanika energia a rugalmas energiából és a mozgási energiából áll

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 0,0928 \text{ J.} \quad (9.3.1)$$

Mivel a text megáll és a kitérése zérus lesz, így éppen ennyi a súrlódás következtében disszipált ("szétszórt") mechanikai energia.

**9.4. Feladat:** Mutassa meg, hogy a  $F = -kx$  rugalmas erejű rugóra akasztott  $m$  tömegű test  $g$  homogén nehézségi erőterben harmonikus rezgőmozgást végez!

**Megoldás:** Fordítsuk lefelé az  $y$  tengely irányítását. Tegyük a rugó végére a testet és engedjük megnyúlni  $y$  hosszal, amíg el nem éri az egyensúlyi (gyorsulásmentes) helyzetét. Ekkor érvényes, hogy

$$0 = mg - ky. \quad (9.4.1)$$

Ezt követően húzzuk lejjebb további  $x$  távolsággal, aminek következtében, ha elengedjük, a test gyorsulni fog. Az erre a helyzetre felírható mozgásegyenlet

$$ma = mg - k(x+y). \quad (9.4.2)$$

Figyelembe az ezt megelőző egyenletet végül az

$$ma = -kx \quad (9.4.3)$$

egyenletre jutunk, amely éppen a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete.

**Megjegyzés:** A megoldásból az is kiolvasható, hogy egyrészt a rezgés az egyensúlyi helyzet körül jön létre, másrészt a homogén nehézségi erőter jelenléte ellenére a mozgás harmonikus.

**9.5. Feladat:** Egy harmonikus rezgőmozgást végző test legnagyobb gyorsulása  $8\pi \text{ m/s}^2$ , legnagyobb sebessége  $1,6 \text{ m/s}$ .

- Határozza meg a rezgésidőt és az amplitúdót!
- Mennyi a rezgés összenergiája?

**Megoldás:**

- A maximális gyorsulás illetve sebesség

$$a_{\text{max}} = A\omega^2 \quad (9.5.1)$$

illetve

$$v_{max} = A\omega, \quad (9.5.2)$$

ahol  $A$  az amplitúdó,  $\omega$  a körfrekvencia. E két egyenletből

$$\omega = \frac{a_{max}}{v_{max}} = \frac{8\pi}{1,6} = 15,7 \text{ rad/s} \quad (9.5.3)$$

és

$$A = \frac{v_{max}^2}{a_{max}} = \frac{2,56}{8\pi} \sim 0,1 \text{ m}. \quad (9.5.4)$$

A rezgésidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \sim 0,4 \text{ s}. \quad (9.5.5)$$

(b) Jelölje  $m$  a tömeget kg-ban. A rezgés teljes energiája

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 1,28m \text{ J}. \quad (9.5.6)$$

*Megjegyzés:* Látható, hogy a kinematikai adatok önmagukban nem elegendőek a dinamikai mennyiségek meghatározásához!

**9.6. Feladat:** Két, azonos amplitúdójú rezgés, melyek frekvenciája  $\nu_1 = 40$  Hz és  $\nu_2 = 60$  Hz, egyszerre kezdi meg rezgését az egyensúlyi helyzetből. Mikor lesz legelőször ismét azonos a kitérésük?

**Megoldás:** A rezgések kitérését az  $y(t) = A \sin 2\pi\nu_1 t$  illetve  $y(t) = A \sin 2\pi\nu_2 t$  alakba írjuk fel. Az első találkozási idő a kettő egyenlőségéből számolható

$$A \sin 2\pi\nu_1 t = A \sin 2\pi\nu_2 t. \quad (9.6.1)$$

Az egyenletet átrendezve és a szögek szinusza különbségére vonatkozó összefüggést alkalmazva

$$0 = \sin 2\pi\nu_2 t - A \sin 2\pi\nu_1 t = 2 \cos \frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2} t \sin \frac{2\pi\nu_2 - 2\pi\nu_1}{2} t \quad (9.6.2)$$

írható. Leghamarabb akkor teljesül az egyenlőség, ha

$$\cos \frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2} t = 0, \quad (9.6.3)$$

azaz

$$\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2} t = \frac{\pi}{2}. \quad (9.6.4)$$

Innen az első találkozás időpontja

$$t = \frac{1}{2(\nu_2 + \nu_1)} = 0,005 \text{ s}. \quad (9.6.5)$$

**9.7. Feladat:** (HN 15A-19) Határozzuk meg a 2,3 m hosszú fonálinga

- (a) frekvenciáját és  
 (b) lengésidejét a Hold felszínén, ahol a gravitációtól származó nehézségi gyorsulás  $1,67 \text{ m/s}^2$ .

Megoldás:

(a) A kitérített inga pályagörcbége kör. A  $g$  nehézségi gyorsulású erőterben  $\alpha$  szöggel kitérített  $l$  hosszúságú fonálingán az  $m$  tömegű testet a testre ható gravitációs erőnek a pályagörbe érintője irányába eső erőkomponense fogja az egyensúlyi irányba mozgatni. A mozgásegyenlet

$$ma_t = -mg \sin \alpha, \quad (9.7.1)$$

ahol a tangenciális (érintő irányú) gyorsulás, a negatív előjel pedig arra utal, hogy a növekvő szögekkel ellentétes irányú az erőkomponens. A tangenciális gyorsulás

$$a_t = l\beta = l\ddot{\alpha}, \quad (9.7.2)$$

ahol  $\beta = \dot{\alpha}$  a szöggyorsulás. Így az

$$l\ddot{\alpha} = -g \sin \alpha, \quad (9.7.3)$$

differenciál egyenlet kapható. Ez az egyenlet kis szögekre – ha  $\alpha \ll 5^\circ$ , akkor  $\sin \alpha \sim \alpha$  – a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletébe megy át, azaz

$$l\ddot{\alpha} = -g\alpha. \quad (9.7.4)$$

Innen az inga körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (9.7.5)$$

A frekvencia

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 0,135 \text{ 1/s}. \quad (9.7.6)$$

(b) A periódusidő

$$T = \frac{1}{f} = 7,4 \text{ s}. \quad (9.7.7)$$

**9.8. Feladat:** A földi Egyenlítőn egy zárt épületben egy fonálinga segítségével hogyan állapítanánk meg, hogy a Hold felettünk vagy a Föld túlsó oldalán van?

Megoldás: Ha a Hold a Föld túlsó oldalán van, akkor a Holdtól származó vonzó kölcsönhatás hozzáadódva a Földéhez a  $g$  nehézségi gyorsulásnál nagyobb  $g'$  értékkel kell számolni. Így

a kialakuló rezgés  $\omega'$  körfrekvenciája nagyobb mint az az  $\omega$ , amely csak a Föld hatását veszi figyelembe:

$$\omega' = \sqrt{\frac{g'}{l}} > \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (9.8.1)$$

Ennek megfelelően a periódusidőkre az áll fenn, hogy  $T' < T$ .

**9.9. Feladat:** (HN 15A-20) Egy világítótorony látogatója meg akarja mérni a torony magasságát. Van nála egy orsó cérna, erre kis kavicsot köt, és a torony spirál-lépcsőházának közepén – mint fonálingát – lelógatja. A lengésidő 9,4 s. Milyen magas a torony?

**Megoldás:** A fonálinga  $\omega$  körfrekvenciája az  $l$  fonálhosszal és a  $g$  nehézségi gyorsulással

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (9.9.1)$$

A  $T$  periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9.9.2)$$

Innen az inga hossza, ami most a torony  $h$  magassága is egyben

$$h = l = \frac{T^2}{4\pi^2} g = 22,38 \text{ m}. \quad (9.9.3)$$

**9.10. Feladat:** (HN 15B-26) Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk a 46. ábra szerint úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng.

- Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periódusidejét.
- Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?

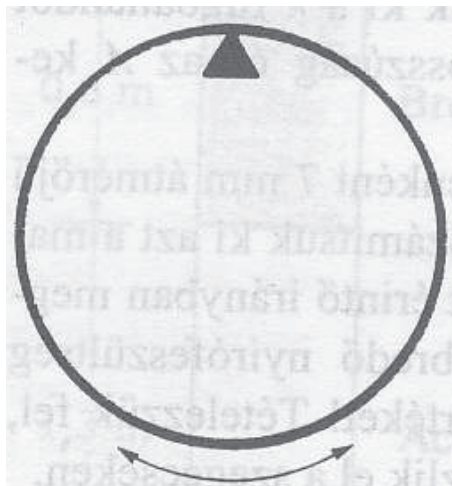
**Megoldás:** Jelölés:  $R = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ ;  $m$  a karika tömege,  $\theta_0 = mR^2$  a szimmetria tengelyére vett tehetetlenségi nyomatéka;  $\varphi$  a kitérés szöge a függőlegeshez viszonyítva.

(a) A kés élén felfüggesztett inga karja – felfüggesztés és tömegközéppont távolsága – az  $R$  sugár, a felfüggesztésre vett  $\theta$  tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel szerint

$$\theta = \theta_0 + mR^2 = 2mR^2. \quad (9.10.1)$$

Kitérítve  $\varphi$  szöggel a karikát

$$M = -mgR \sin \varphi \quad (9.10.2)$$



46. ábra.

forgatónyomaték fog hatni. A negatív előjel éppen arra utal, hogy a nyomaték az egyensúlyi helyzet felé mozgat. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M = -mgR \sin \varphi, \quad (9.10.3)$$

ahol  $\beta$  a szöggyorsulás. Mivel  $\beta = \ddot{\varphi}$ , így

$$\theta\ddot{\varphi} = -mgR \sin \varphi, \quad (9.10.4)$$

amely "majdnem" a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Ha kis szögkitérésekre szorítkozunk, akkor alkalmazhatjuk a  $\sin \varphi \sim \varphi$  közelítést, így a

$$\theta\ddot{\varphi} = -mgR\varphi \quad (9.10.5)$$

egyenlet harmonikus rezgőmozgást ír le. Az  $\omega$  körfrekvencia közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{\theta}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}. \quad (9.10.6)$$

A periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \quad (9.10.7)$$

(b) A fonálinga (matematikai inga) lengésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (9.10.8)$$

ahonnan a kérdéses fonál hossz

$$l = 2R. \quad (9.10.9)$$

**9.11. Feladat:** (HN 15C-37) Egy meg nem feszített  $l$  hosszúságú,  $k$  rugóállandójú homogén rugót úgy vágunk két részre, hogy az egyik darab kétszer akkora, mint a másik.

(a) Fejezzük ki rugódarabok  $k_1$  és  $k_2$  rugóállandóját!

(b) Ha mindkét darab egyik végére azonos tömegű testet akasztanánk, mi lenne a frekvenciák aránya?

Megoldás:

(a) Elég csak gondolatban szétválasztani az  $l$  hosszúságú rugót egy  $l_1$  és  $l_2$  hosszúságú darabra, ahol legyen  $l_1 = 2l_2$ . Ha a rugót  $F$  erővel húzzuk, akkor jelölje a megnyúlást  $\Delta x$ , azaz

$$F = k\Delta x. \quad (9.11.1)$$

Az  $l_1$  és  $l_2$  szakaszok megnyúlása  $\Delta x_1$  és  $\Delta x_2$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2, \quad (9.11.2)$$

amelyekre, mivel az  $F$  erő a rugó teljes hosszában hat – fennáll, hogy

$$F = k_1\Delta x_1 \quad (9.11.3)$$

és

$$F = k_2\Delta x_2. \quad (9.11.4)$$

A  $\Delta x_1$  és  $\Delta x_2$  megnyúlások arányosak az  $l_1$  és  $l_2$  szakaszok hosszaival, így

$$\Delta x_1 = 2\Delta x_2. \quad (9.11.5)$$

A fenti egyenletekből

$$k_1 = 1,5k, \quad (9.11.6)$$

míg

$$k_2 = 3k. \quad (9.11.7)$$

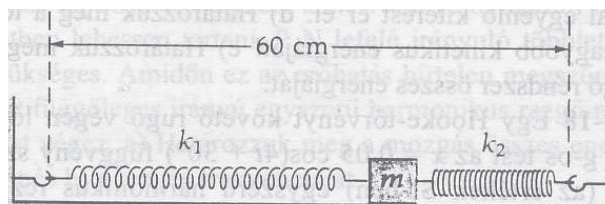
(b) A frekvenciák aránya

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{k_1}{m}}}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \quad (9.11.8)$$



**9.12. Feladat:** (HN 15C-38) Két rugó mindegyike feszítetlen állapotban  $l_0 = 20$  cm hosszú, de rugóállandóik különbözőek:  $k_1 = 40$  N/m és  $k_2 = 80$  N/m. A rugókat vízszintes súrlódásmentes felületen nyugvó  $m = 0,60$  kg tömegű kicsiny testhez rögzítik. A rugókat ellentétes irányban megfeszítik és egymástól  $L = 60$  cm távolságban lévő kampókhöz rögzítik a 47. ábra szerint. Feltéve, hogy a test mérete elhanyagolható.

- (a) A baloldali kampótól milyen távol lesz a test egyensúlyi helyzete?  
 (b) Mekkora a test rugóirányú harmonikus rezgőmozgásának a körfrekvenciája?



47. ábra.

**Megoldás:**

- (a) Jelölje az egyes rugók megnyúlását  $x_1$  illetve  $x_2$ . A teljes megnyúlás

$$D = L - 2l_0 = x_1 + x_2. \quad (9.12.1)$$

Az egyensúlyi helyzetben a rugókban ugyanakkora nagyságú erő ébred, azaz

$$k_1 x_1 = k_2 x_2. \quad (9.12.2)$$

A test baloldali faltól való távolságának meghatározásához az  $x_1$  kiszámolására van szükség

$$x_1 = \frac{Dk_2}{k_1 + k_2} = 12 \text{ cm}. \quad (9.12.3)$$

Tehát a test egyensúlyi helyzete a faltól

$$l_0 + x_1 = 32 \text{ cm} \quad (9.12.4)$$

távolságra van.

- (b) Mozdítsuk ki a testet az egyensúlyi helyzetéből a pozitív irányba  $x$ -szel és írjuk fel a mozgásegyenletet a ható erőkkel – figyelembe véve az irányokat és azt, hogy a megnyúlások megváltoztak –

$$ma = -k_1(x_1 + x) + k_2(x_2 - x). \quad (9.12.5)$$

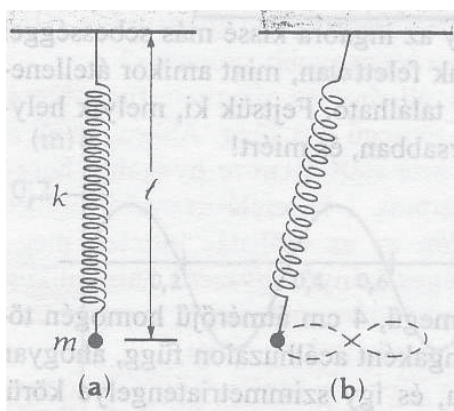
Alkalmazva a (9.12.2) egyenletbeli összefüggést az

$$ma = -(k_1 + k_2)x \quad (9.12.6)$$

egyenletre jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad (9.12.7)$$

**9.13. Feladat:** (HN 15C-39) Egy  $k$  rugóállandójú rugó végére akasztott  $m$  tömegű test a rugót (nyugalmi állapotban)  $l$  hosszúságúra nyújtja a 48.a ábra szerint. A testet most mozgásba hozzuk úgy, hogy fel-le rezeg és ingaként ide-oda leng. A test a 48.b ábra szerint a függőleges síkban mozogva "nyolcasokat" ír le. Fejezzük ki a  $k$  rugóállandót az  $m$ ,  $l$  és  $g$  függvényében!



48. ábra.

**Megoldás:** A mozgás egy rezgésre és egy ingalengésre bontható. A rezgés  $\omega_r$  körfrekvenciája

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (9.13.1)$$

az ingamozgás  $\omega_i$  körfrekvenciája

$$\omega_i = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (9.13.2)$$

alakban írható fel. A "8"-as leírása során egy ingalengéshez két rezgés tartozik, tehát

$$\omega_r = 2\omega_i, \quad (9.13.3)$$

vagyis

$$\frac{k}{m} = 4\frac{g}{l}. \quad (9.13.4)$$

Innen a rugóállandó

$$k = 4\frac{mg}{l}. \quad (9.13.5)$$

**9.14. Feladat:** Egy  $d$  vastagságú egyenletes  $A$  keresztmetszetű falapocskát vízre teszünk  $g$  homogén nehézségi erőterben. A falapocskát függőleges irányban kicsit megnyomva, majd elengedve rezgőmozgást jön létre. Mutassuk meg, hogy a mozgás harmonikus rezgőmozgás. A közegellenállástól és a felületi feszültségtől tekintsünk el. A fa sűrűsége  $\rho_f$ , a vízé  $\rho_v$ .

**Megoldás:** Helyezzük a falapocskát a vízre és várjuk meg az egyensúlyi helyzet beálltát. Ha ekkor  $x$ -szel jelöljük a bemerülés nagyságát, akkor lefele irányított koordináta-rendszer esetén a testre ható erők a

$$0 = \rho_f A d g - \rho_v A x g \quad (9.14.1)$$

egyenletnek tesznek eleget. Ezt követően a falapocskát  $y$ -nal lejjebb nyomjuk, majd elengedjük. A falapocska mozgásegyenlete a

$$\rho_f A d \ddot{y} = \rho_f A d g - \rho_v A (x + y) g \quad (9.14.2)$$

lesz. Figyelembe véve a (9.14.1) egyenletet a

$$\rho d \ddot{y} = -\rho_v g y \quad (9.14.3)$$

egyenlethez jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a rezgés körfrekvenciája közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_v g}{\rho_f d}}. \quad (9.14.4)$$

**9.15. Feladat:** Az  $M$  tömegű,  $R$  sugarú homogén anyageloszlású bolygó északi és déli pólusa között lyukat fúrunk. Mutassuk meg, hogy a bedobott  $m$  tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez! (A súrlódástól tekintsünk el.)

**Megoldás:** A homogén bolygó közepétől  $r$  távolságban lévő testre a bolygónak attól a részétől származik eredő erőhatás, amennyi az  $r$  sugáron belül van. Így az arányosság miatt a figyelembe veendő tömeg

$$M(r) = \frac{r^3}{R^3} M. \quad (9.15.1)$$

Az  $m$  tömegű test mozgásegyenlete

$$m \ddot{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{R^3} r, \quad (9.15.2)$$

amelyből

$$\ddot{r} = -\gamma \frac{M}{R^3} r \quad (9.15.3)$$

adódik. Ez egy harmonikus rezgőmozgás egyenlete. A körfrekvencia közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}. \quad (9.15.4)$$

**9.16. Feladat:** Az  $M$  tömegű,  $R$  sugarú homogén bolygó északi pólusán lefektetünk egy sűrűségmentes sík lapot, amely a póluson átmenő érintősík. Mutassuk meg, hogy egy, a póluson átmenő egyenes mentén mozgó  $m$  tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez! Mi az itteni harmonikus rezgés feltétele? (A bolygó forgásától tekintsünk el.)

Megoldás: A síkon az érintési ponttól  $x$  távolságban a testre ható erő

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2 + x^2}, \quad (9.16.1)$$

amely a bolygó középpontja felé mutat. Az egyensúlyi helyzet felé mutató tangenciális komponens

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \quad (9.16.2)$$

Ezzel a test mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{mM}{(R^2 + x^2)^{3/2}} x. \quad (9.16.3)$$

Ha kis  $x \ll R$  kitérésekre szorítkozunk, akkor alkalmazhatjuk a

$$\frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \sim \frac{1}{R^3} \quad (9.16.4)$$

közelítést, amellyel a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{mM}{R^3} x \quad (9.16.5)$$

alakú lesz. Ez pedig a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a körfrekvencia

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}. \quad (9.16.6)$$

## Csillapodó és gerjesztett rezgések

**9.17. Feladat:** (HN 15B-28) Egy 2 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Súrlódás miatt a test csillapított harmonikus mozgást végez. A rezgés amplitúdója a  $t = 0$  s időpillanatban 0,20 m, majd ezt követően 6 másodperc múlva 0,16 m-re csökken.

- (a) Határozzuk meg a súrlódási erőből származó csillapítási együtthatót.  
 (b) Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját.

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 2$  kg;  $k = 200$  N/m;  $A = 0,2$  m;  $t = 6$  s és  $A(t) = 0,16$  m.

(a) A csillapodó rezgés mozgásegyenlete

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 = 0, \quad (9.17.1)$$

ahol

$$\beta = \frac{c}{2m} \quad (9.17.2)$$

a keresett  $c$  csillapítási együtthatóval és

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (9.17.3)$$

A (9.17.1) mozgásegyenletet kielégítő kitérés az idő függvényében

$$y(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta), \quad (9.17.4)$$

ahol  $\delta$  a kezdeti feltételhez illesztett kezdőfázis, valamint  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  Itt a  $t$  időpillanathoz tartozó amplitúdó

$$A(t) = Ae^{-\beta t}. \quad (9.17.5)$$

Ebből  $\beta$  kifejezhető és a paraméterek behelyettesítése után kiszámolható:

$$\beta = -\frac{1}{t} \ln \frac{A(t)}{A} = 0,0371/\text{s}. \quad (9.17.6)$$

A  $c$  csillapodási tényező a (9.17.2) összefüggésből

$$c = 2m\beta = 0,1488 \text{ kg/s}. \quad (9.17.7)$$

(b) A rendszer rezonanciafrekvenciája

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 99,991/\text{s}. \quad (9.17.8)$$

**9.18. Feladat:** Egy csillapítatlan rezgő rendszerben mozgó test tömege 0,5 g. A rendszert változtatható frekvenciájú gerjesztő erő hajtja, amplitúdója minden frekvencián  $F_0$ . A test 400 Hz-en 9 mm, 405 Hz-en 5 mm amplitúdóval rezeg.

- (a) Határozzuk meg az oszcillátor  $\omega_0$  sajátfrekvenciáját és
- (b) a rezgés amplitúdóját 395 Hz frekvencián.
- (c) Állapítsuk meg a gerjesztő erő nagyságát. Megoldás:

## Rugalmas közegekben terjedő hullámok

**9.19. Feladat:** Mindkét végén nyitott síp alapfrekvenciája 110 Hz. Milyen hosszú a síp, ha a hang terjedési sebessége 340 m/s?

Megoldás: Ha a síp mindkét vége nyitott, akkor mindkét helyen duzzadóhely van. Ebből következik, hogy a hang fél hullámhossza a síp hossza, azaz

$$d = \frac{\lambda}{2}. \quad (9.19.1)$$

A hullámhossz a kifejezhető a frekvenciával és a terjedési sebességgel, amely

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 3,091 \text{ m}. \quad (9.19.2)$$

Így a síp hossza

$$d = 1,55 \text{ m}. \quad (9.19.3)$$

**9.20. Feladat:** A pozitív  $x$  tengely irányában egy transzverzális harmonikus hullám terjed 2 m/s sebességgel, amely a  $t = 0$  időpillanatban az origóban van. Amplitúdója 10 cm, frekvenciája 0,5 Hz.

- (a) Mennyi a körfrekvencia?
- (b) Mekkora a hullámhossz?
- (c) Mekkora a cirkuláris hullámszám?

Megoldás:

- (a) A körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 3,14 \text{ 1/s}. \quad (9.20.1)$$

(b) A hullám terjedési  $v$  sebessége, a  $\nu$  frekvencia és a  $\lambda$  hullámhossz közötti összefüggés

$$v = \lambda\nu, \quad (9.20.2)$$

ahonnan

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = 4 \text{ m}. \quad (9.20.3)$$

(c) A cirkuláris hullámszám

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1,571/\text{m}. \quad (9.20.4)$$

**9.21. Feladat:** (HN 18B-8) Kifeszített huzalon haladó transzverzális hullám amplitúdója 0,2 mm, frekvenciája 500 Hz, sebessége 196 m/s.

(a) Írjuk fel SI egységekkel a hullámfüggvényt  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  alakban.

(b) A huzal lineáris tömegsűrűsége 4,1 g/m. Mekkora a huzalt feszítő erő?

Megoldás:

(a) Az amplitúdó méterben

$$A = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}. \quad (9.21.1)$$

A körfrekvencia

$$\omega = 2\pi f = 3140 \text{ 1/s}. \quad (9.21.2)$$

A hullámhossz

$$\lambda = v/f = 0,392 \text{ m}. \quad (9.21.3)$$

A cirkuláris hullámszám

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 16 \text{ 1/m}. \quad (9.21.4)$$

Így a hullámfüggvény

$$y(x, t) = 2 \cdot 10^{-4} \sin(16x - 3140t). \quad (9.21.5)$$

(b) A terjedési sebesség négyzete

$$v^2 = \frac{F}{\mu}, \quad (9.21.6)$$

ahol  $\mu$  a hosszegységenkénti tömeg. Innen a köteleet feszítő erő

$$F = \mu v^2 = 157 \text{ N}. \quad (9.21.7)$$

**9.22. Feladat:** Egy húron csillapítatlan transzverzális harmonikus hullám terjed 20 m/s sebességgel pozitív irányba. Amplitúdója 50 cm, frekvenciája 2 Hz. A  $t_0 = 0$  pillanatban az  $x_0 = 0$  helyen levő részecske kitérése 25 cm, és negatív irányban mozog. Mekkora a kitérése az  $x = 5$  m helyen lévő részecskének a  $t = 2$  s pillanatban?

**Megoldás:** Jelölések:  $v = 20$  m/s;  $A = 50$  cm = 0,5 m;  $\nu = 2$  Hz;  $A(x_0 = 0, t_0 = 0) = A(0, 0) = 25$  cm = 0,25 m.

A hullámfüggvény általános alakja

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \delta), \quad (9.22.1)$$

amelyre a kezdeti feltételeket alkalmazva

$$A(0, 0) = A \sin \delta. \quad (9.22.2)$$

Ahhoz, hogy a hullámfüggvény a kezdeti időpillanatot követően csökkenjen, úgy  $0 < \delta < \pi/2$  kell legyen. Így az adatok behelyettesítése után

$$\delta = \frac{\pi}{6}. \quad (9.22.3)$$

Az  $\omega$  körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 12,56 \text{ 1/s}. \quad (9.22.4)$$

A hullám terjedési sebessége a

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (9.22.5)$$

összefüggéssel számolható, ahonnan a  $k$  cirkuláris hullámszám

$$k = \frac{\omega}{v} = 0,628 \text{ 1/m}. \quad (9.22.6)$$

A hullámfüggvény az SI egységekkel kifejezve a

$$y(x, t) = 0,5 \sin\left(0,628x - 12,56t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (9.22.7)$$

alakot ölti. Az  $x = 5$  m és  $t = 2$  s helyettesítést elvégezve az ezen a helyen és ebben az időpontban a kitérés

$$y(5, 2) = -0,25 \text{ m}. \quad (9.22.8)$$



## 10. Feladatok a termodinamika tárgyköréből

### Hővezetés, hőterjedés sugárzással

**10.1. Feladat:** (HN 19A-23) Határozzuk meg egy 20 cm hosszú, 4 cm átmérőjű hengeres vörösréz rúdon időegység alatt átvezetett hőmennyiséget, ha a rúd két vége  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ill.  $220\text{ }^{\circ}\text{C}$  hőmérsékletű!

Megoldás:

**10.2. Feladat:** (HN 19A-25) Egy épület téglafalának mérete:  $4\text{ m} \times 10\text{ m}$  és, a fal  $15\text{ cm}$  vastag. A hővezetési együtthatója  $\lambda = 0,8\text{ W/m K}$ . Mennyi hő áramlik át a falon 12 óra alatt, ha az átlagos belső hőmérséklet  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , a külső pedig  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

Megoldás: Jelölések: a fal felülete  $A = 4\text{ m} \times 10\text{ m} = 40\text{ m}^2$ ; a falvastagság  $d = 15\text{ cm}$ ; az eltelt idő  $t = 12\text{ óra} = 43200\text{ s}$ ;  $T_1 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  és  $T_2 = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

A hőáram (a belső energia árama, itt most a fal teljes felületére vett teljesítmény) a Fourier-törvény szerint

$$I = P = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} A. \quad (10.2.1)$$

A 12 óra alatt átáramlott hő

$$Q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} A t = 1,38 \cdot 10^8 \text{ J}. \quad (10.2.2)$$

**10.3. Feladat:** (HN 19B-33) Egy  $3\text{ cm}$  élhosszúságú alumínium kockát lámpakorommal vontak be és így ideális hőszigetelő lett. A kockát vákuumkamrába tették, amelynek falait  $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on tartották. Milyen teljesítményű legyen az a fűtőtest, amely annyi energiát ad a kockának, hogy hőmérséklete állandóan  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$  maradjon?

Megoldás: Jelölések, adatok:  $a = 3\text{ cm}$ ;  $T_0 = 27\text{ }^{\circ}\text{C} = 300\text{ K}$ ;  $T_1 = 90\text{ }^{\circ}\text{C} = 363\text{ K}$  és  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ .

A stacionárius (időben állandó) állapot beálltakor a fűtőtest teljesítménye

$$P = \sigma(T_1^4 - T_0^4)A \quad (10.3.1)$$

ahol a kocka felszíne  $A = 6a^2$ . Az adatok behelyettesítése után

$$P = 2,836\text{ W}. \quad (10.3.2)$$

## Ideális gázok állapotegyenlete

**10.4. Feladat:** (HN 20B-26) Egy tó fenekén, ahol a hőmérséklet  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ , egy  $0,2\text{ cm}$  átmérőjű légbuborék képződött. Ez  $25\text{ m}$ -t emelkedik a felszínig, ahol a víz hőmérséklete  $24\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Határozzuk meg a gömb alakú buborék méretét, amint éppen eléri a víz felszínét, feltételezve, hogy a buborék belsejében lévő levegő mindig felveszi a környező víz hőmérsékletét! A légköri nyomás  $10^5\text{ Pa}$ .

**Megoldás:** Jelölések:  $T_1 = 4\text{ }^{\circ}\text{C} = 277\text{ K}$ ;  $d_1 = 0,2\text{ cm}$ ;  $h = 25\text{ m}$ ;  $T_2 = 24\text{ }^{\circ}\text{C} = 297\text{ K}$ ; a külső légnyomás  $p_k = 10^5\text{ Pa}$ ; a víz sűrűsége  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ .

Az egyesített gáztörvény szerint

$$\frac{(p_k + \rho gh)\frac{4}{3}\left(\frac{d_1}{2}\right)^3\pi}{T_1} = \frac{p_k\frac{4}{3}\left(\frac{d_2}{2}\right)^3\pi}{T_2}, \quad (10.4.1)$$

ahonnan — behelyettesítés után — a buborék átmérője

$$d_2 = 0,31\text{ cm}. \quad (10.4.2)$$

**10.5. Feladat:** (HN 20A-29) A Nap belsejének hőmérséklete kb.  $2 \cdot 10^7\text{ K}$ .

(a) Határozzuk meg egy proton átlagos kinetikus energiáját a Nap belsejében!

(b) Határozzuk meg a proton négyzetes középsebességét!

**Megoldás:**

**10.6. Feladat:** (HN 20B-36) Milyen hőmérsékleten egyenlő az oxigén atomok négyzetes középsebessége a Föld felszínéről való szökési sebességgel?

**Megoldás:** Adatok: A Föld sugara  $R_F = 6370\text{ km}$ , tömege  $M_F = 6 \cdot 10^{24}\text{ kg}$ ; gravitációs állandó  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ; egyetemes gázállandó  $R = 8,31\text{ J}/(\text{mol K})$ ; az oxigén móltömege  $M = 16\text{ g/mol}$ .

A  $v_{sz}$  szökési sebesség

$$v_{sz} = \sqrt{\frac{2\gamma M_F}{R_F}}, \quad (10.6.1)$$

a  $v_{nks}$  négyzetes középsebesség

$$v_{nks} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (10.6.2)$$

A kettő egyenlőségéből a fenti adatokkal a kérdéses hőmérséklet

$$T = 80642\text{K}. \quad (10.6.3)$$

**10.7. Feladat:** 2 mól, 2 atomos gázzal állandó nyomáson 747,9 J hőt közlünk. A hőmérséklete  $10^\circ\text{C}$ -kal változik. Hány szabadsági fokú a gáz?

Megoldás: Az állandó nyomáson vett mólhő és a szabadsági fokok száma közötti összefüggés

$$c_p = \frac{f+2}{2}R. \quad (10.7.1)$$

A közölt hő és a hőmérséklet változás között fenn áll, hogy

$$Q = c_p n \Delta T, \quad (10.7.2)$$

amelyből behelyettesítés után az állandó nyomáson vett mólhőre  $c_p = \frac{9}{2}$  adódik. Innen egyszerűen leolvasható, hogy a szabadsági fokok száma

$$f = 7. \quad (10.7.3)$$

*Megjegyzés:* A szoba hőmérsékletű kétatomos gázok állandó nyomáson vett mólhője  $c_p = \frac{7}{2}$ , a szabadsági fokok száma  $f = 5$ , amelyek a translációs és rotációs mozgásokhoz kapcsolódnak. Magas hőmérsékleten ( $\sim 2000\text{ K}$ ) azonban a rezgéshez tartozó 2 újabb szabadsági fok jelenik meg. A mérést ezen a hőmérsékleten végezték!

**10.8. Feladat:** (HN 21B-12) Mutassuk meg, hogy egyatomos ideális gázra az izotermikus kompresszió-modulus ( $K = -V \cdot dp/dV$ ) egyenlő a nyomással!

Megoldás: Az ideális gáz állapotegyenlete

$$pV = nRT, \quad (10.8.1)$$

ahonnan a nyomás

$$p(V) = nRT \frac{1}{V}. \quad (10.8.2)$$

A  $dp/dV$  differenciálhányadost kiszámolva

$$\frac{dp}{dV} = -nRT \frac{1}{V^2}, \quad (10.8.3)$$

az izoterm kompresszió-modulus — felhasználva az állapotegyenlet alakját —

$$K = -V \frac{dp}{dV} = VnRT \frac{1}{V^2} = p. \quad (10.8.4)$$

## Körfolyamatok ideális gázzal

**10.9. Feladat:** (HN 21C-22) Kezdeti  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  állapotjelzőkkel jellemzett egyatomos ideális gázzal a következő, három lépésből álló körfolyamatot végezzük: izotermikus expanszió  $V_2$  térfogatig, izobár kompresszió az eredeti térfogatig és izochor melegítés a kezdeti nyomás és hőmérséklet visszaállítására.

- Ábrázoljuk a körfolyamatot a  $p-V$  síkon!
- Határozzuk meg a gáz mólszámát a megadott paraméterekkel, a gázállandóval és  $c_v$ -vel kifejezve.
- Határozzuk meg a  $T_2$  hőmérsékletet az izobár kompresszió végén a b) feladat eredményét felhasználva!
- Írjuk fel mindhárom folyamatra a hőmérséklet változását a megfelelő változók függvényében.

### Megoldás:

- (ábra)
- Az ideális gáz

$$pV = nRT \quad (10.9.1)$$

állapotegyenletéből és a mólhőre érvényes

$$c_v = \frac{3}{2}R \quad (10.9.2)$$

összefüggéssel az  $n$  mólszám

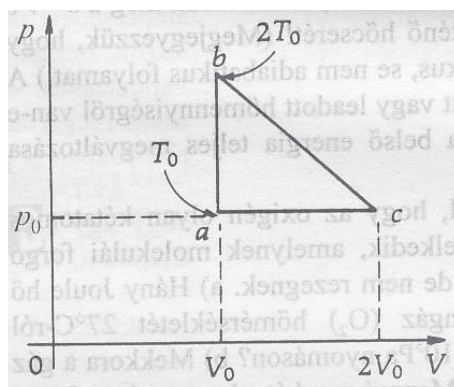
$$n = \frac{3p_1V_1}{2c_vT_1} = \frac{3p_2V_2}{2c_vT_1} = \frac{3p_2V_1}{2c_vT_2}. \quad (10.9.3)$$

- A fenti egyenletből a  $T_2$  hőmérséklet

$$T_2 = \frac{V_1}{V_2}T_1. \quad (10.9.4)$$

(d) Az első folyamatban  $\Delta T = 0$ ; a másodikban  $\Delta T = T_2 - T_1 = (\frac{V_1}{V_2} - 1)T_1$ ; míg a harmadikban  $\Delta T = T_1 - T_2 = (1 - \frac{V_1}{V_2})T_1$ .

**10.10. Feladat:** (HN 21C-26) Két mól egyatomos gázzal a 49. ábrán látható abca körfolyamatot végezzük. A  $p$ - $V$  síkon mindhárom folyamat ábrája egyenes. Az  $a$  pontban a paraméterek:  $p_0$ ,  $V_0$ ,  $T_0$ . Az alábbi feladatokat oldjuk meg  $RT_0$  függvényében.



49. ábra.

- Határozzuk meg egy teljes ciklus alatt végzett munkát.
- Határozzuk meg a  $b \rightarrow c$  folyamat során történő hőcserét! A rendszer által felvett vagy leadott hőmennyiségről van-e szó?
- Mekkora a belső energia teljes megváltozása egy ciklus során?

**Megoldás:** Az egyesített gáztörvény alkalmazásával az egyes pontokban az állapothatározók:

a:  $(p_0, V_0, T_0)$

b:  $(2p_0, V_0, 2T_0)$

c:  $(p_0, 2V_0, 2T_0)$

(a) A körfolyamatban végzett munka

$$W = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{1}{2}p_0V_0 = \frac{1}{2}nRT_0. \quad (10.10.1)$$

(b) A  $b \rightarrow c$  folyamat kezdő és végállapotában a hőmérséklet egyaránt  $T_2$ , de ettől a folyamat maga nem izotermikus. Ugyanakkor a belső energia megváltozása zérus. A gáz által végzett munka

$$W_{b \rightarrow c} = \frac{1}{2}(2p_0 + p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}nRT_0, \quad (10.10.2)$$

s ennek megfelelően a felvett hő

$$Q_{b \rightarrow c} = \frac{3}{2} nRT_0. \quad (10.10.3)$$

*Megjegyzés:* E folyamat további diszkusszióra érdemes!

(c) A körfolyamat egy teljes ciklusában a belső energia megváltozása zérus.

**10.11. Feladat:** (HN 22A-5) Egy hőerőgép, amelynek a Carnot-hatásfoka 30%, a 400 K hőmérsékletű hőtartályból vesz fel hőt. Határozzuk meg a hidegebb hőtartály hőmérsékletét!

Megoldás: A Carnot-körfolyamat hatásfoka

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (10.11.1)$$

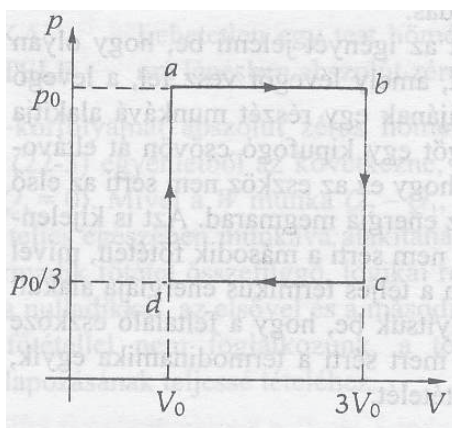
ahol  $T_1$  a felső,  $T_2$  az alsó hőtartály hőmérséklete. Innen

$$T_2 = (1 - \eta)T_1 = 280\text{K}. \quad (10.11.2)$$

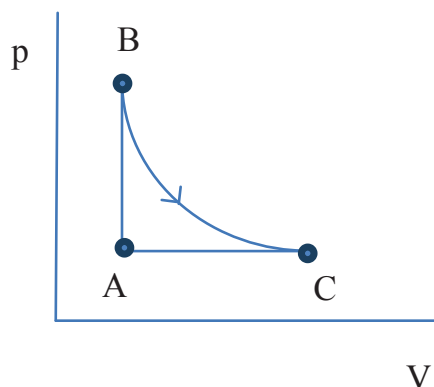
**10.12. Feladat:** (HN 22B-23) Egyatomos ideális gázzal a 50. ábrán látható,  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$  körfolyamatot végezzük.

(a) Határozzuk meg a gáz által végzett eredő munkát  $p_0$  és  $V_0$  segítségével!

(b) Határozzuk meg a körfolyamat hatásfokát! Megoldás:



50. ábra.



51. ábra.

**10.13. Feladat:** A 51. ábra 1 kmol héliumgázon végzett körfolyamatot mutat. A BC ív izotermát jelöl,  $p_A = 10^5$  Pa,  $V_A = 22,4$  m<sup>3</sup>,  $p_B = 2 \cdot 10^5$  Pa. a, Határozzuk meg  $T_A$ ,  $T_B$  és  $V_C$  értékeit! b, Számítsuk ki a körfolyamatban az AB és BC folyamatban végzett munkát!

**Megoldás:** a, Az ideális gáz állapotegyenletét

$$p_A V_A = nRT_A \quad (10.13.1)$$

felhasználva az A-beli hőmérséklet

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 269,6 \text{ K}. \quad (10.13.2)$$

A B-beli hőmérsékletet Gay-Lussac II. törvénye

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \quad (10.13.3)$$

segítségével határozhatjuk meg. Innen

$$T_B = T_A \frac{p_B}{p_A} = 539,2 \text{ K}. \quad (10.13.4)$$

Mivel a  $B \rightarrow C$  folyamat izoterm, így

$$T_C = T_B = 539,2 \text{ K}. \quad (10.13.5)$$

A C-beli térfogatot pl. Gay-Lussac I. törvénye

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_C}{T_C} \quad (10.13.6)$$

segítségével határozhatjuk meg. Innen

$$V_C = V_A \frac{T_C}{T_A} = 44,8 \text{ m}^3. \quad (10.13.7)$$

b, Mivel az  $A \rightarrow B$  folyamatban nincs térfogatváltozás, így a végzett munka is zérus:

$$W_{A \rightarrow B} = 0. \quad (10.13.8)$$

A  $B \rightarrow C$  izoterm folyamatban a gáz által végzett munka

$$W = \int_{V_B}^{V_C} p(V) dV = \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT_B}{V} dV = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B} = 3,1 \cdot 10^6 \text{ J}. \quad (10.13.9)$$

**10.14. Feladat:**  $1 \text{ m}^3$ ,  $0 \text{ C}^0$ -os  $10^5 \text{ Pa}$  nyomású héliumot állandó nyomáson addig hűtenek, amíg térfogata  $0,75 \text{ m}^3$  nem lesz. Mennyi hőt kell ehhez elvonni?

**Megoldás:** Jelölések:  $V_1 = 1 \text{ m}^3$ ,  $T_1 = 0 \text{ C}^0 = 273 \text{ K}$ ,  $p_1 = p_2 = 10^5 \text{ Pa}$  és  $V_2 = 0,75 \text{ m}^3$ . Mivel egyatomos gázzal van szó, az állandó nyomáson vett mólhő  $c_p = \frac{5}{2}R$ . A folyamat állandó nyomáson történik, így

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad (10.14.1)$$

amelyből a hűtés utáni hőmérséklet

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 204,75 \text{ K}. \quad (10.14.2)$$

A elvont hő kiszámolásához tudni kell, hány mól hélium van rendszerben. Ez a

$$pV = nRT \quad (10.14.3)$$

összefüggésből tehető meg, azaz

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = 44,08 \text{ mol}. \quad (10.14.4)$$

Ezzel a közölt hő

$$Q = c_p n (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} R n (T_2 - T_1) = -62500 \text{ J}. \quad (10.14.5)$$

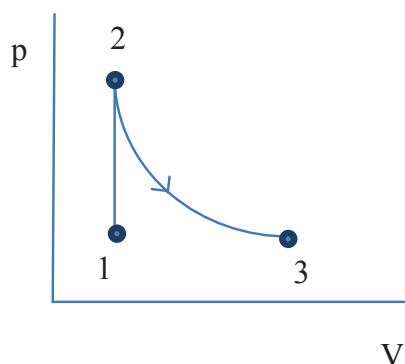
**Megjegyzés:** A negatív előjel arra utal, hogy hőelvonás történik.

**10.15. Feladat:** Tekintsünk  $n = 2$  mólnyi egyatomos ideális gázt:  $p_1 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_1 = 273 \text{ K}$ . A gázzal  $Q = 6806 \text{ J}$  hőt közlünk, állandó térfogat mellett, majd izoterm módon tágulni engedjük úgy, hogy a végső térfogat háromszorosa legyen a kiindulási térfogatnak.

(a) Ábrázolja a folyamatot állapotdiagramon!

(b) Mennyi lesz a hőkölés utáni hőmérséklet?





52. ábra.

- (c) Mekkora lesz a nyomás a folyamat végén?  
 (d) Mekkora az entrópia-változás a két folyamatban?

Megoldás:

- (a) Az állapotdiagram a 52. ábrán látható.  
 (b) A közölt hő és a hőmérséklet változás közötti összefüggés

$$Q = c_v n \Delta T, \quad (10.15.1)$$

ahol  $c_v = \frac{3}{2}nR$ . Innen a hőközlés utáni hőmérséklet

$$\Delta T = \frac{Q}{c_v n} = \frac{Q}{\frac{3}{2}nR} = 273 \text{ K}. \quad (10.15.2)$$

Így az állandó nyomású hőközlés utáni hőmérséklet

$$T_2 = 546 \text{ K}. \quad (10.15.3)$$

- (c) Az állandó térfogaton végzett hőközlés során kialakuló  $p_2$  nyomás a

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (10.15.4)$$

összefüggésből

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (10.15.5)$$

A térfogatváltozás miatti nyomás – figyelembe véve, hogy  $V_1 = V_2$  és  $V_3 = 3V_1$  – a Boyle-Mariotte törvény szerint a

$$p_2 V_2 = p_3 V_3 \quad (10.15.6)$$

összefüggésből

$$p_3 = \frac{V_2}{V_3} p_2 = 0,667 \cdot 10^5 \text{ Pa.} \quad (10.15.7)$$

(d) Az izochor (1  $\rightarrow$  2) folyamatbeli  $S_1$  entrópiaváltozás a

$$S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_v n dT}{T} = \frac{3}{2} n R \ln \frac{T_2}{T_1} = 17,28 \text{ J/K.} \quad (10.15.8)$$

Az izoterm (2  $\rightarrow$  3) folyamatban a gáz belsőenergia változása, a felvett hő a tágulási munkára fordítódik. Így a felvett hő

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_2}{V} dV = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = 9969,4 \text{ J.} \quad (10.15.9)$$

Az izoterm  $S_2$  entrópiaváltozás

$$S_2 = \frac{Q}{T_2} = 18,26 \text{ J/K.} \quad (10.15.10)$$

Az össz entrópiaváltozás: 35,54 J/K.

**10.16. Feladat:** 8 g tömegű, 5 l térfogatú, 27 °C hőmérsékletű  $N_2$  gázt ( $M = 28$  g) adiabatikusan kiterjesztünk 50 liter térfogatra. Mennyi hőmennyiséget kell ezen a térfogaton a gázzal közölni, hogy hőmérséklete újra 27 °C legyen?

**Megoldás:** Jelölések:  $m = 8$  g,  $V_1 = 5$  l,  $T_1 = 27^\circ\text{C} = 300$  K és  $V_2 = 50$  l. Mivel kétatomos szoba hőmérsékletű gázzal van szó, ezért a mólhők  $c_p = \frac{7}{2}R$ ,  $c_v = \frac{5}{2}R$ , így  $\kappa = c_p/c_v = \frac{7}{5}$ . Elsőként az adiabatikus folyamat végi hőmérsékletet határozzuk meg a  $TV^{\kappa-1} = \text{const.}$  összefüggés alapján

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}. \quad (10.16.1)$$

Behelyettesítés után

$$T_2 = 119,43 \text{ K.} \quad (10.16.2)$$

A 8 g nitrogén gáz  $n = 0,2857$  molnak felel meg, így az állandó térfogaton történő visszamelegítéshez szükséges hő

$$Q = c_v n \Delta T = \frac{5}{2} R n (T_1 - T_2) = 1071,8 \text{ J.} \quad (10.16.3)$$

## Hőátadás

**10.17. Feladat:** A  $c_1$  fajhőjű,  $m_1$  tömegű,  $T_1$  hőmérsékletű pohárba  $c_2$  fajhőjű,  $m_2$  tömegű,  $T_2$  hőmérsékletű sört öntünk. ( $c_1 = 670$  J/kgK,  $T_1 = 37$  °C,  $m_1 = 0,3$  kg,  $c_2 = 4000$  J/kgK,  $T_2 = 8$  °C,  $m_2 = 0,5$  kg)

- Mekkora lesz a közös hőmérséklet?
- Mennyi az átadott hő?
- Mekkora a hőáram, ha  $\Delta t = 5$  s alatt áll be az egyensúly?
- Mekkora a teljes entrópia változás?

### Megoldás:

(a) Az energiamegmaradás kifejezhető úgy, hogy a belső energiákat a  $T_0 = 0$  °C-hoz viszonyítjuk:

$$c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2 = (c_1 m_1 + c_2 m_2) T, \quad (10.17.1)$$

ahol  $T$  a közös hőmérséklet. Innen

$$T = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} = 10,64^\circ\text{C} = 283,64\text{K}. \quad (10.17.2)$$

(b) Az átadott hő nagysága

$$\Delta Q = c_1 m_1 (T_1 - T) = 5298\text{J}. \quad (10.17.3)$$

(c) A hőáram

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 1059,6\text{W}. \quad (10.17.4)$$

(d) A teljes entrópiaváltozás

$$S = \int_{T_1}^T c_1 m_1 \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^T c_2 m_2 \frac{dT}{T} = c_1 m_1 \ln \frac{T}{T_1} + c_2 m_2 \ln \frac{T}{T_2} \quad (10.17.5)$$

$$= (-17,86 + 18,70)\text{J/K} = 0,84\text{J/K}.^* \quad (10.17.6)$$

\*Emlékeztető: A hőmérsékletet kelvinben kell behelyettesíteni.

**10.18. Feladat:**  $m = 1$  kg tömegű,  $T_1 = 273$  K hőmérsékletű vizet  $T_2 = 300$  K hőmérsékletű végtelen hőkapacitású hőtartállyal hozunk kapcsolatba. (A víz fajhője: 4,18 kJ/kg.) Mennyi a rendszer teljes entrópiájának megváltozása?

**Megoldás:** A víz és a hőtartály által cserélt hő nagysága

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} c_v m dT = c_v m (T_2 - T_1), \quad (10.18.1)$$

amely pozitív a vízre, negatív a hőtartályra nézve. A víz  $S_1$  entrópiaváltozása – figyelembe véve, hogy a hőfelvétel a víz esetén nem állandó hőmérsékleten történik –

$$S_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v m \frac{dT}{T} = c_v m \ln \frac{T_2}{T_1} = 394,2 \text{ J/K}. \quad (10.18.2)$$

A hőtartály végtelen hőkapacitású, ami azt jelenti, hogy  $T_2$  hőmérséklete nem változik, azaz a hőtartály  $S_2$  entrópiaváltozása egyszerűen

$$S_2 = -\frac{Q}{T_2} = -376,2 \text{ J/K}. \quad (10.18.3)$$

Azaz az össz entrópiaváltozás: 18 J/K.

**10.19. Feladat:** (HN 23B-9) Igazoljuk, hogy  $n$  mól ideális gáz  $V_0$  kezdeti térfogatról  $2V_0$  végső térfogatra való izobár tágulásakor a gáz entrópiaváltozása  $nR[\kappa/(\kappa-1)] \ln 2$ !

**Megoldás:** A folyamat során felvett elemi hő

$$dQ = nc_p dT, \quad (10.19.1)$$

így az entrópiaváltozás

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} nc_p \frac{dT}{T} = nc_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (10.19.2)$$

ahol  $T_1$  a kezdeti,  $T_2$  a végső hőmérséklet. Felhasználva Gay-Lussac I. törvényét

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}, \quad (10.19.3)$$

ahol most  $V_1 = V_0$  a kezdeti,  $V_2 = 2V_0$  a végső térfogat, az entrópiaváltozás

$$\Delta S = nc_p \ln \frac{V_2}{V_1} = nc_p \ln 2. \quad (10.19.4)$$

Most már csak az kell belátni, hogy

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} R = \frac{c_p}{\frac{c_p}{c_v} - 1} R = c_p. \quad (10.19.5)$$

Így az állítást igazoltuk.

**10.20. Feladat:** (HN 23C-17) Igazoljuk, hogy az egyatomos ideális gáz izochor állapotváltozása során az entrópiaváltozás  $3/2 nR \ln(p_v/p_k)$ , ahol  $p_k$  a kezdeti,  $p_v$  a végső nyomás!

Megoldás: Mivel egyatomos gárról van szó, az állandó térfogaton vett mólhő

$$c_v = \frac{3}{2}R. \quad (10.20.1)$$

A folyamat során felvett elemi hő

$$dQ = nc_v dT, \quad (10.20.2)$$

így az entrópiaváltozás

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_k}^{T_v} \frac{3}{2}nR \frac{dT}{T} = \frac{3}{2}nR \ln \frac{T_v}{T_k}, \quad (10.20.3)$$

ahol  $T_k$  a kezdeti,  $T_v$  a végső hőmérséklet. Felhasználva Gay-Lussac II. törvényét

$$\frac{T_v}{T_k} = \frac{p_v}{p_k}, \quad (10.20.4)$$

az entrópiaváltozás

$$\Delta S = \frac{3}{2}nR \ln \frac{p_v}{p_k}. \quad (10.20.5)$$