SEGÉDLET

ABSZOLÚT DERIVÁLT, KOVARIÁNS DERIVÁLT, GEODETIKUS EGYENLET, LIE-DERIVÁLT, KILLING-VEKTOR

Bokor Nándor, 2021.

ELŐZETES:

A Christoffel-szimbólumok szemléletes definíciója (ld. Thomas Moore):

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\vec{e}_\gamma \qquad (1)$$

1. MIT JELENT AZ "ABSZOLÚT DERIVÁLT", EGY $\vec{a}$ VEKTOR IRÁNYDERIVÁLTJA EGY $\vec{u}$ ÉRINTŐVEKTORRAL JELLEMZETT GÖRBE MENTÉN?

A görbét az $x^\alpha(\lambda)$ paraméteres alak írja le. A görbe érintővektora tehát: $u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$. Van egy $\vec{a}$ vektorterünk is ugyanezen a sokaságon. Kérdés: milyen ütemben változik az $\vec{a}$ vektortér, miközben haladunk az adott görbe mentén?

$$\frac{d\vec{a}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}(a^\alpha \vec{e}_\alpha) = \frac{da^\alpha}{d\lambda}\vec{e}_\alpha + a^\alpha \frac{d\vec{e}_\alpha}{d\lambda} = \frac{da^\alpha}{d\lambda}\vec{e}_\alpha + a^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = [(1)] =$$

$$= \frac{da^\alpha}{d\lambda}\vec{e}_\alpha + a^\alpha u^\beta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\vec{e}_\gamma = \frac{da^\alpha}{d\lambda}\vec{e}_\alpha + a^\gamma u^\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\vec{e}_\alpha = \left(\frac{da^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} a^\gamma u^\beta\right)\vec{e}_\alpha. \qquad (2)$$

Tehát az **abszolút derivált (görbe menti derivált)** α-komponense:

$$\left(\frac{d\vec{a}}{d\lambda}\right)^\alpha = \frac{da^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} a^\gamma u^\beta. \qquad (3)$$

Megjegyzés: az "abszolút deriváltra" a - szerintem nagyon logikus és szemléletes - $\left(\frac{d\vec{a}}{d\lambda}\right)^\alpha$ jelölést Moore használja, a $\frac{da^\alpha}{d\lambda}$ kifejezéstől való megkülönböztetésre. (A kettő csak a lokális Descartes-koordinátarendszerben ugyanaz!) Szinte mindenki más az egyáltalán nem szemléletes $\frac{Da^\alpha}{d\lambda}$ jelölést használja ugyanarra, amire Moore a $\left(\frac{d\vec{a}}{d\lambda}\right)^\alpha$-t. Másik megjegyzés: az "abszolút derivált" kicsit megtévesztő név, azt sugallja, mintha itt valami különleges, a 'normális' deriválttól eltérő differenciálszámításról lenne szó (a $\frac{Da^\alpha}{d\lambda}$ jelölés is ezt a benyomást erősíti), holott ez maga *a* deriváltja egy vektornak (ezért jobb az egyszerű és szemléletes $\left(\frac{d\vec{a}}{d\lambda}\right)^\alpha$ jelölés).

---

2. MIT JELENT EGY $\vec{a}$ VEKTOR "KOVARIÁNS DERIVÁLTJA", $\nabla_\alpha a^\mu$?

Fejezzük ki, mennyit változik egy vektor két közeli pont között:

Descartes-koordinátarendszerben ezt várnánk:

$$d\vec{a} = da^\mu \vec{e}_\mu = \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \vec{e}_\mu. \tag{4}$$

De ez általános esetben nem jó, mert a bázisvektorok is helyről helyre változhatnak, azaz a koordináták függvényei lehetnek (ld. (1)). Az általánosan igaz képlet (görbületlen sokaságon):

$$d\vec{a} = d\left(a^\mu \vec{e}_\mu\right) = da^\mu \vec{e}_\mu + a^\mu d\vec{e}_\mu = \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \vec{e}_\mu + a^\mu \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = [(1)] =$$

$$= \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \vec{e}_\mu + a^\mu dx^\alpha \Gamma^\gamma_{\mu\alpha} \vec{e}_\gamma = \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \vec{e}_\mu + a^\gamma dx^\alpha \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} \vec{e}_\mu =$$

$$= \left(\frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} a^\gamma\right) dx^\alpha \vec{e}_\mu. \tag{5}$$

A zárójelben levő kifejezés az, ami a fenti Descartes-koordinátarendszerbeli tárgyalásban szereplő a $\frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha}$ kifejezés szerepét átveszi. A zárójeles kifejezést hívjuk az $\vec{a}$ vektor "**kovariáns deriváltjának**", vagy "**abszolút gradiensének**" (az utóbbi pl. Moore szóhasználata):

$$\nabla_\alpha a^\mu \equiv \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} a^\gamma \tag{6}$$

Precízebben: az $\nabla_\alpha a^\mu$ szimbólum az $\vec{a}$ vektor x^α koordináta szerinti kovariáns deriváltjának μ-komponensét jelöli.

Hogy az (5) alatti bekezdés még szemléletesebb, érthetőbb legyen, vegyük az (5) elején és végén levő vektornak mondjuk a β-komponensét:

$$(d\vec{a})^\beta = \left[\left(\frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} a^\gamma\right) dx^\alpha \vec{e}_\mu\right]^\beta. \tag{7}$$

A jobb oldal - mivel vektorok súlyozott összegének β-komponense egyenlő a vektorok β-komponensének súlyozott összegével - így írható:

$$\left[\left(\frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} a^\gamma\right) dx^\alpha \vec{e}_\mu\right]^\beta = \left(\frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} a^\gamma\right) dx^\alpha \left(\vec{e}_\mu\right)^\beta =$$

$$= \left(\frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} a^\gamma\right) dx^\alpha \delta^\beta_\mu = \left(\frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} a^\gamma\right) dx^\alpha \tag{8}$$

Ezt visszahelyettesítve (7) jobb oldalára:

$$(d\vec{a})^\beta = \left(\frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} a^\gamma\right) dx^\alpha, \tag{9}$$

ami talán még közvetlenebbül és szemléletesebben mutatja, hogy a kovariáns derivált (6) képlete - ami itt most a μ összegzőindex β-ra cserélése miatt a $\nabla_\alpha a^\beta \equiv \frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} a^\gamma$ alakot ölti - miért helyes.

A fenti levezetések filozófiája ('filozófia#1') szerint (amit az (1) tükröz) a vektorkomponensek sima parciális deriválása azért nem működik, mert *két különböző helyen levő vektort akarunk összehasonlítani* (ti. a komponenseiket), márpedig a második vektor helyén már ***mások a bázisvektorok***!

Van egy másik filozófia (ld. Poisson, nevezzük ezt 'filozófia#2'-nek), amelyben a Christoffel-szimbólumok nem az (1) egyenlet szerint vannak definiálva. Eszerint a gondolkodásmód szerint is a vektorkomponensek sima parciális deriválása azért nem működhet, mert eleve *két különböző helyen levő két vektort akarunk összevetni*, de ez azért probléma, mert ***a két vektor két különböző 'világban' (tangenstérben) létezik***!
Eszerint a gondolatmenet szerint a levezetés a következőképpen megy (Poisson nyomán):
Azt szeretnénk kideríteni, hogy egy $\vec{a}$ vektormező mennyit változik egy P ponttól egy Q pontig. Ehhez azonban a Q pontból az ottani $\vec{a}(Q)$ vektort 'transzportálni' kell a P -be, hogy ott közvetlenül összehasonlíthassuk az eredetileg is P-ben levő $\vec{a}(P)$ vektorral (ill. a komponenseiket összehasonlíthassuk). Tehát:

$$(d\vec{a})^\beta \equiv \left(\vec{a}_T(P)\right)^\beta - \left(\vec{a}(P)\right)^\beta = \left(\vec{a}(Q)\right)^\beta - \left(\vec{a}(P)\right)^\beta + \left(\vec{a}_T(P)\right)^\beta - \left(\vec{a}(Q)\right)^\beta \tag{10}$$

A második lépésben cselesen hozzáadtuk és ki is vontuk a kifejezéshez a $\left(\vec{a}(Q)\right)^\beta$ tagot. Az első két tag egy olyan különbség, amelyben a két helyen levő vektor β-komponensét 'naivan' kivonjuk egymásból. Ez *nem* lesz egyenlő a vektor valódi megváltozásának β-komponensével - akár a 'filozófia#1'-gyel, akár a 'filozófia#2'-vel indokolhatjuk ezt -, csak Descartes-koordinátarendszerben. Mindenesetre ez a koordinátadifferenciál így írható:

$$\left(\vec{a}(Q)\right)^\beta - \left(\vec{a}(P)\right)^\beta = da^\beta = \frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \tag{11}$$

A (10) jobb oldalán levő harmadik és negyedik tag összevonva egy nagyon hibrid, öszvér különbséget adnak: a Q-ban levő vektor P-be transzportált változatának β-komponenséből (ahol a vektorkomponenseket a P-ben levő koordinátarendszerben állapítjuk meg!) kivonjuk ugyanezen vektortér eredeti Q helyen levő vektorának β-komponensét (amit a Q-ban levő koordinátarendszert felhasználva állapítunk meg!). [*Végső soron itt derül fény a '#1 és #2 filozófiák' közötti* <u>*összhangra*</u>*, mert ez a* $\left(\vec{a}_T(P)\right)^\beta - \left(\vec{a}(Q)\right)^\beta$ *különbség azt világítja meg, hogy a* P *és* Q *között* <u>*mennyit változtak a koordináta bázisvektorok*</u>, csakúgy, mint az *'#1 filozófiában'.*] Ez a fajta filozófia ezen a ponton vezeti be a Christoffel-szimbólumokat, azzal a kijelentéssel, hogy a $\left(\vec{a}_T(P)\right)^\beta - \left(\vec{a}(Q)\right)^\beta$ különbségtől megköveteljük, hogy a lineáris legyen a két pont távolságában, azaz dx^α-ban is, és a P-beli eredeti vektormező koordinátáiban, azaz $\left(\vec{a}(P)\right)^\gamma$-ban is:

$$\left(\vec{a}_T(P)\right)^\beta - \left(\vec{a}(Q)\right)^\beta = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} dx^\alpha \left(\vec{a}(P)\right)^\gamma \tag{12}$$

Ez most a Christoffel-szimbólumok definíciója! Tanulságos összevetni a - szerintem - szemléletesebb, elegánsabb (1) definícióval. A (11)-et és (12)-t behelyettesítve (10) jobb oldalába a (10) így írható:

$$(d\vec{a})^\beta = \frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} dx^\alpha \left(\vec{a}(P)\right)^\gamma = \left(\frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} a^\gamma\right) dx^\alpha, \tag{13}$$

ez pedig megegyezik a (9) egyenlettel. Tehát a 'filozófia#2' is elvezet minket a kovariáns derivált (6)-os képletéhez.

A fentiekben az $\vec{a}$ kontravariáns vektor kovariáns deriváltjáról volt szó. Egy $\underline{b}$ *kovariáns vektor*, ill. egy $\boldsymbol{T}$ *tenzor* kovariáns deriváltjára az alábbi - (6)-hoz hasonló - képletek adódnak (nem vezetem le őket, de könnyen levezethetők azzal a trükkel, hogy a szorzat deriváltjának Leibnitz-szabályát alkalmazzuk):

$$\nabla_\alpha b_\mu = \frac{\partial b_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} b_\gamma \tag{14}$$

$$\nabla_\alpha T^{\beta\gamma}{}_\delta = \frac{\partial T^{\beta\gamma}{}_\delta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\varphi} T^{\varphi\gamma}{}_\delta + \Gamma^\gamma_{\alpha\varphi} T^{\beta\varphi}{}_\delta - \Gamma^\varphi_{\alpha\delta} T^{\beta\gamma}{}_\varphi \tag{15}$$

ahol az utóbbi esetben konkrét példának egy kétszeresen kontravariáns, egyszeresen kovariáns tenzort választottam. Skalármező kovariáns deriváltja nagyon egyszerű: az f skalármező *egykomponensű* mennyiség (a sokaság minden pontjában 1-1 szám), az értéke egy adott pontban független attól, milyen koordinátarendszert használunk, tehát nem okoz bonyodalmat, hogy közben a koordinátabázisvektorok pontról pontra változhatnak. Tehát:

$$\nabla_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \tag{16}$$

A $\boldsymbol{g}$ metrikus tenzor kovariáns deriváltja zérus. Ezt egy zseniális érveléssel láthatjuk be. (A metrikus tenzor kétszeresen kovariáns tenzor, kovariáns deriváltjának képletét a (15) mintájára könnyű felírni, 3 tagból fog állni, amelyek közül az első egy parciális derivált, a másik kettőben pedig a Christoffel-szimbólumok vannak.) Tudjuk, hogy a metrikus tenzor komponensei *Descartes koordinátarendszerben* 0-k és 1-esek (téridőben: *Minkowski-koordinátarendszerben* 0-k, 1-esek és (-1)-esek). Tehát konstansok, nem függnek a koordinátáktól (ezekben a konkrét koordinátarendszerekben!). Vagyis *ebben* a Descartes- (v. Minkowski-) koordinátarendszerben $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0$. *Ugyanebben* a koordinátarendszerben a Christoffel-szimbólumok is nullák. Tehát *ebben* a koordinátarendszerben

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0. \tag{17}$$

[Fontos megjegyzés: a Descartes-, ill. Minkonwski-koordinátarendszerrel nem korlátoztuk a tárgyalásunkat görbületlen sokaságra! Ilyen lokális koordinátarendszerek görbült sokaságon is tetszőleges pontban felvehetők!] A (17) viszont *tenzoregyenlet*, egy tenzor nullaságát fogalmazza meg, ami ha egy bizonyos koordinátarendszerben teljesül, akkor bármilyen más koordinátarendszerben (pl. polárkoordinátákban, stb.) is teljesül! Tehát **a metrikus tenzor kovariáns deriváltja zérus**.

---

3. VISSZATÉRÜNK AZ ELSŐ PONTHOZ, EGY $\vec{a}$ VEKTOR ADOTT, $\vec{u}$ ÉRINTŐVEKTORRAL JELLEMZETT GÖRBE MENTI IRÁNYDERIVÁLTJÁHOZ, AMIT MOST MÁR MÁS MATEMATIKAI FORMÁBAN IS KI TUDUNK FEJEZNI

(A görbe érintővektora, mint fent: $u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$.)

Állítás: az abszolút derivált (görbe menti derivált) μ-komponense, $\left(\frac{d\vec{a}}{d\lambda}\right)^\mu$, az $u^\alpha \nabla_\alpha a^\mu$ szimbólummal is leírható.

Bizonyítás:

$$u^\alpha \nabla_\alpha a^\mu = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\left(\frac{\partial a^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} a^\gamma\right) = \frac{da^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} a^\gamma u^\alpha = \left(\frac{d\vec{a}}{d\lambda}\right)^\mu, \tag{18}$$

ahol az utolsó lépésben (3)-at használtuk fel. q.e.d.

A fenti kifejezést Stephani (p. 133) úgy hívja, hogy "az $\vec{a}$ kovariáns deriváltja az $\vec{u}$ irányában".

---

4. MI A GEODETIKUS? MI A GEODETIKUS EGYENLET?

<u>A. definíció</u>: *Egy görbét akkor nevezünk geodetikusnak, ha két rögzített pont között az extremális hosszt valósítja meg*.

A metrikus egyenlet:

$$dl^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta. \tag{19}$$

Tehát egy λ-val paraméterezett $x^\alpha(\lambda)$ görbe - vagy világvonal - hossza adott P és Q pontok - vagy események - között:

$$l = \int_P^Q \sqrt{\pm g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta}\, d\lambda, \tag{20}$$

ahol $\dot{x}^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$, és a négyzetgyök alatti előjel attól függ, hogy (téridőben) a világvonal időszerű vagy térszerű-e. Az l görbehosszt akarjuk extremizálni, ez pont olyan feladat, mint amikor a 'legkisebb hatás elvét' számoljuk mechanikában. Azaz a (20) integrál belsejében levő négyzetgyökös kifejezést tekintjük 'Lagrange-függvénynek':

$$L(\dot{x}^{\alpha}, x^{\alpha}) \equiv \sqrt{\pm g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^{\alpha}\, \dot{x}^{\beta}} \tag{21}$$

és felírjuk rá az Euler-Langrange egyenletet:

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} = 0. \tag{22}$$

Az egyenletet megoldva (elég hosszadalmas számolás, ld. Thomas Moore, 8. fejezet) azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}\frac{dx^{\gamma}}{d\lambda} = 0. \tag{23}$$

Ez a ***geodetikus egyenlet***. Ezt az egyenletet elégíti ki egy görbe $x^{\alpha}(\lambda)$ implicit formában felírt alakja, ha az a görbe extrém távolságot valósít meg két adott pont között. A (23) szemléletes jelentése: leírja, hogy a geodetikus vonalak milyen *kinézetűek* egy adott koordinátarendszert alkalmazó 'térképen'.

<u>B. definíció</u>: *Egy görbét akkor nevezünk geodetikusnak, ha az érintővektora a görbe mentén párhuzamos eltolást szenved.*

A B definíció más szóhasználatokkal azt mondja, hogy ha egy görbe geodetikus, akkor (a) az érintővektora nem változik a görbe mentén, vagyis (b) az érintővektorának az 'abszolút deriváltja' zérus, vagyis (c) *a görbe érintővektorának irányderiváltja magának a görbének a mentén zérus*! A (3) egyenlet alapján, az $\vec{a}$ vektor helyébe is az $\vec{u}$ vektort írva:

$$\left(\frac{d\vec{u}}{d\lambda}\right)^{\alpha} = \frac{du^{\alpha}}{d\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}u^{\gamma}u^{\beta} = 0. \tag{24}$$

Mivel $\vec{u}$ a görbe érintővektora, azaz $u^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}$, a (24) második egyenlősége így írható:

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}\frac{dx^{\gamma}}{d\lambda} = 0, \tag{25}$$

vagyis a B definíció is eljuttatott bennünket - rendkívül egyszerűen - a (23) geodetikus egyenletig. Ezzel bizonyítottuk, hogy <u>a geodetikus fenti A és B definíciói ekvivalensek</u>. A (23) formában írt geodetikus egyenlet csatolt differenciálegyenlet-rendszert ad arra az *N* db $x^{\alpha}(\lambda)$ függvényre, amely a görbét az adott koordinátarendszerben leírja. (*N* a sokaság dimenziószáma.) A geodetikus egyenletet - ha nem az $x^{\alpha}(\lambda)$ függvényekkel akarjuk felírni, hanem szemléletes tartalmukat szeretnénk demonstrálni - a (18) összefüggések segítségével az alábbi rendkívül elegáns alakokban is felírhatjuk:

$\frac{d\vec{u}}{d\lambda} = 0$, ahol $u^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}$, (geodetikus egyenlet) (26)

vagy:

$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u^{\mu} = 0$, ahol $u^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}$ (geodetikus egyenlet) (27)

---

5. MIT JELENT EGY $\vec{a}$ VEKTORMEZŐNEK EGY $\vec{u}$ VEKTORMEZŐ SZERINTI LIE-DERIVÁLTJA?

Friedman nagyon szemléletes képét követve az $\vec{u}$ vektormezőt *egy stacionárius folyadékáramlás sebességtereként* képzeljük el. A szemléletes kép szerint ez a folyadék képes magával sodorni *valamit*. Hogy *mit*, arra már a különböző magyarázatok más és más interpretációt javasolnak.
Az alapvető személetes kép és egyben a Lie-derivált definíciója: egy $\vec{a}$ vektormezőt egy adott pontban úgy Lie-deriváljuk az $\vec{u}$ szerint, hogy az $\vec{a}$ vektormezőnek az adott pontban levő elemét, az ottani $\vec{a}$ vektort a folyadékáramlással egy kicsit elsodorjuk, és összehasonlítjuk az elsodort $\vec{a}$ vektort azzal a vektorral, ami az $\vec{a}$ vektormező elemeként eredetileg ezen az új helyen 'várt minket'.

Speciális példa: Előzetes példaként (Friedmant követve) nézzünk egy olyan $\vec{a}$ vektormezőt, amelyről ki fog derülni, hogy az $\vec{u}$ szerinti Lie-deriváltja *zérus*! Ehhez tekintsünk két közeli folyadékrészecskét, melyeknek a pályája $\vec{\tilde{r}}(t)$ illetve $\vec{r}(t)$, és most speciálisan az $\vec{a}$ egy olyan vektort jelentsen (egyelőre egyetlen egyet), hogy *a két folyadékrészecskét* a kezdő időpillanatban *összekötő vektor* ennek az $\vec{a}$ vektornak egy konstans skalárszorosa, $\epsilon\vec{a}$ legyen (ahol ϵ kicsi). Ezek után elhatározzuk, hogy - ebben a speciális példában - úgy csinálunk az $\vec{a}$-ból egy teljes vektor*mezőt*, hogy előírjuk, hogy a $\epsilon\vec{a}$ vektor *minden időpillanatban* "lekövesse", ahogy a két folyadékrészecske továbbáramlik, és *mindig összekösse őket*. Erről a speciálisan kigondolt $\vec{a}$ vektormezőről fogjuk kimutatni, hogy az $\vec{u}$ szerinti Lie-deriváltja zérus. Tehát a most leírtak szerint megköveteljük, hogy a

$$\vec{r}(t) + \epsilon\vec{a}\big(\vec{r}(t)\big) = \vec{\tilde{r}}(t) \qquad \text{(speciális példa az } \vec{a} \text{ vektormezőre!)} \qquad (28)$$

reláció minden időpillanatban (a ϵ-ban lineáris pontosságig) teljesüljön.
A (28)-et komponens alakban is felírhatjuk:
Tekintsük a fenti egyenletet a kezdő időpillanatban, és *deriváljuk t szerint*! Az eredményt komponens alakban írom fel, azaz a bal oldalon és a jobb oldalon kapott vektornak is valamely α-komponensét fejezem ki. A (28) bal oldalát *t* szerint deriválva kapjuk:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^{\alpha} + \epsilon\left(\frac{d\vec{a}(\vec{r}(t))}{dt}\right)^{\alpha} = \big(\vec{u}(\vec{r})\big)^{\alpha} + \epsilon\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial(\vec{r})^{\beta}}\frac{d(\vec{r})^{\beta}}{dt} = \big(\vec{u}(\vec{r})\big)^{\alpha} + \epsilon u^{\beta}\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \qquad (29)$$

A (28) jobb oldalát is *t* szerint deriváljuk:

$$\left(\frac{d\vec{\tilde{r}}}{dt}\right)^{\alpha} = \big(\vec{u}(\vec{\tilde{r}})\big)^{\alpha} = \big[\vec{u}\big(\vec{r} + \epsilon\vec{a}(\vec{r})\big)\big]^{\alpha} \approx \big(\vec{u}(\vec{r})\big)^{\alpha} + \epsilon a^{\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \qquad (30)$$

ahol a 2. lépésben (28)-at használtam, a 3. lépésben pedig a Taylor-sorfejtést, amelyben az ϵ-ban lineáris tagot hagytam csak meg. Ebben a speciális példában tehát - amelyben a (28) teljesül -, a (29) jobb oldala egyenlő a (30) jobb oldalával:

$$\left(\vec{u}(\vec{r})\right)^{\alpha} + \epsilon u^{\beta}\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \left(\vec{u}(\vec{r})\right)^{\alpha} + \epsilon a^{\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \tag{31}$$

tehát

$$u^{\beta}\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - a^{\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0. \tag{32}$$

A (32) bal oldalán látható kommutátor-kifejezést definíció szerint az $\vec{u}$ és az $\vec{a}$ vektorok *Lie-zárójelének* hívjuk, ami maga is egy kontravariáns vektor:

$$[\vec{u},\vec{a}]^{\alpha} \equiv u^{\beta}\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - a^{\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}. \tag{33}$$

A 'Lie-zárójel' másik neve: ***az $\vec{a}$ vektortér $\vec{u}$ szerinti Lie-deriváltja*** (ami *ebben* a példában zérus).

$$(\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{a})^{\alpha} \equiv [\vec{u},\vec{a}]^{\alpha} = u^{\beta}\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - a^{\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \tag{34}$$

vagy elegánsabban, a komponens-jelölést elhagyva:

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{a} \equiv [\vec{u},\vec{a}]. \tag{35}$$

Egy kontravariáns $\vec{a}$ vektor Lie-deriváltja tehát maga is kontravariáns vektor. (Általában is igaz, hogy bármilyen tenzor $\vec{u}$ szerinti Lie-deriváltja maga is ugyanolyan rendű tenzor.) Be lehet ugyanis látni közvetlen, algebrai úton, hogy a (34) jobb oldalán álló, parciális deriváltakat tartalmazó kifejezés más koordinátákra való áttéréskor úgy transzformálódik, mint egy kontravariáns vektor, dacára annak, hogy a parciális deriválás művelete önmagában nem tenzorképző művelet. Ezek után, mivel tudjuk, hogy a (34) jobb oldala tenzor (azon belül kontravariáns vektor), a parciális deriváltakat nyugodtan átírhatjuk kovariáns deriváltakra:

$$(\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{a})^{\alpha} = u^{\beta}\nabla_{\beta}a^{\alpha} - a^{\beta}\nabla_{\beta}u^{\alpha} \tag{36}$$

és ennek segítségével a komponens-jelölést elhagyásával a (35)-hez hasonló, alternatív vektoriális formában is megfogalmazhatjuk a Lie-zárójelet, ill. a Lie-deriváltat:

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{a} \equiv [\vec{u},\vec{a}] = \vec{u}\cdot\nabla\vec{a} - \vec{a}\cdot\nabla\vec{u} \tag{37}$$

Nézzük meg még egyszer a (28) egyenletet! Azzal, hogy ezt az egyenletet minden időpontra megköveteljük, azt írjuk elő, hogy az az $\vec{a}$ vektor, amit az $\vec{u}$ sebességterű áramlás sodort az $\vec{r}$ helyről az $\vec{\tilde{r}}$ helyre, megegyezzen azzal az $\vec{a}$ vektorral, ami már eredetileg (az $\vec{a}$ vektortér elemeként) az $\vec{\tilde{r}}$ helyen van. A mesterkélt példánkban ezért lesz az $\vec{a}$-nak $\vec{u}$ szerinti Lie-deriváltja zérus, de ez csak ebben a példában van így. Viszont ebből megérthettük, *mit csinál a Lie-deriválás művelete: az $\vec{a}$ vektortér $\vec{\tilde{r}}$ pontban levő elemét <u>összehasonlítja</u> azzal az $\vec{a}$ vektorral, amit az $\vec{u}$ folyadékáramlás sodort az $\vec{r}$ helyről az $\vec{\tilde{r}}$ helyre.* Hogyan sodor el egy folyadékáramlás egy vektort?? Speciális példánkban ezt úgy vizualizáltuk, hogy az áramlás a folyadékrészecskéket (a sokaság pontjait) sodorja el, a vektorunk pedig két közeli folyadékrészecskét összekötő szakasszal volt definiálva.

Nézzük az általános, precíz tárgyalást. Itt Hraskó tárgyalásmódjára építek, csak 'fuvallat' szó helyett a folyadékáramlási képet használom, ill. szemléletesebb jelöléseket alkalmazok. [Látni fogjuk, hogy ebben a kicsit formaibb tárgyalásban lényegében ugyanarról van szó, mint Friedmannál. Csak ott, az $\vec{a}$ vektormező speciális volta miatt a (28) egyenlet idő szerinti deriválásával kapott (29) és (30) kifejezések - kicsit konfúz módon - mintegy fordított logika szerint működnek, mint alább a (41), (42) kifejezések fognak.]

Azzal a kijelentéssel kezdjük, hogy adva van két kontravariáns vektormező, $\vec{a}$ és $\vec{u}$, és az $\vec{u}$-t egy olyan vektortérnek képzeljük el, amely a sokaság minden pontját infinitezimális időtartam alatt egy másik közeli pontba sodorja:

$\vec{r} \quad \to\to\to \quad \tilde{\vec{r}} \equiv \vec{r} + \epsilon\vec{u}(\vec{r})$,
komponens-alakban:
$x^{\alpha} \;\; \to\to\to \quad \tilde{x}^{\alpha} \equiv x^{\alpha} + \epsilon u^{\alpha}(x)$ (38)

ahol ϵ nagyon kicsi. Itt hangsúlyozzuk, hogy a fenti összefüggés *nem koordináta-transzformáció, hanem 'ponttranszformáció', amely az adott koordinátarendszerben helyezi át a sokaság pontjait*. (Ezt a matematikai kijelentést fejeztük ki sokkal szemléletesebben fentebb azzal, hogy a sokaságot folyadéknak képzeltük el, az $\vec{u}$ pedig a folyadék sebességtere, tehát leírja, hogy a folyadékrészecskék hogyan sodródnak odébb. Tehát a 'ponttranszformáció' azt jelenti, hogy maguk a sokaság pontjai sodródnak odébb. Ebben a szemléletes képben, ahol $\vec{u}$ sebességteret jelent, ϵ, mint a (38)-ből látható, egy infinitezimális időtartamként fogható fel.) Ha a folyadékra valamilyen görbét is odaképzelünk, amelyet úgy kapunk, hogy konkrét folyadékrészecskéket kötünk össze a képzeletünkben, akkor az áramlás *egy-egy ilyen görbét is odébbsodor.* Például egy $x^{\alpha}(\lambda)$ paraméteres alakban megadott görbe λ paraméterű pontját az áramlás (38) szerint az

$\tilde{x}^{\alpha}(\lambda) \equiv x^{\alpha}(\lambda) + \epsilon u^{\alpha}\big(x(\lambda)\big)$ (39)

koordinátájú pontba sodorja. A görbe *érintővektora* az eredeti λ paraméterű pontban $a^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}$ volt, ezt a folyadékáramlás az új pontban (39) szerint az

$\tilde{a}^{\alpha}(\lambda) \equiv \frac{d\tilde{x}^{\alpha}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dx^{\alpha}(\lambda)}{d\lambda} + \epsilon\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{dx^{\beta}(\lambda)}{d\lambda} = a^{\alpha}(\lambda) + \epsilon\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}a^{\beta}(\lambda)$ (40)

érintővektorrá sodorja át. [Figyeljük meg, hogy $\tilde{\vec{a}}$ itt *pontosan* ugyanazt a szerepet tölti be, mint a fenti, Friedman-féle példában, ahol tényleges közeli folyadékpontokat összekötő vektorként értelmeztük.] Mivel a görbe érintővektora a kontravariáns vektor prototípusa, biztosak lehetünk benne, hogy a (40) egyenlet egyben azt a szabályt is leírja, hogy *bármilyen* $\vec{a}$ kontravariáns vektort egy $\vec{u}$ sebességtérrel jellemzett folyadékáramlás milyen $\tilde{\vec{a}}$ kontravariáns vektorba 'sodorja el'. A (40) képlettel leírt $\tilde{\vec{a}}$ vektor az $\tilde{\vec{r}}$ pontban van, tehát jelölhetjük $\tilde{\vec{a}}\big(\tilde{\vec{r}}\big)$-mal, és (40) alapján komponens-alakban így írhatjuk - most már elvonatkoztatva bármilyen λ-paraméterű görbétől:

$$\tilde{a}^\alpha(\tilde{\vec{r}}) = a^\alpha(\vec{r}) + \epsilon \frac{\partial u^\alpha(\vec{r})}{\partial x^\beta} a^\beta(\vec{r}) \tag{41}$$

Ezt a vektort közvetlenül összehasonlíthatjuk azzal a vektorral, amely az eredeti (nem odébbsodort) $\vec{a}$ vektormező elemeként van jelen az $\tilde{\vec{r}}$ pontban! Erre a vektorra a következőt írhatjuk fel:

$$a^\alpha(\tilde{\vec{r}}) = a^\alpha\left(\vec{r} + \epsilon\vec{u}(\vec{r})\right) = a^\alpha(\vec{r}) + \epsilon u^\beta(\vec{r}) \frac{\partial a^\alpha(\vec{r})}{\partial x^\beta} \tag{42}$$

ahol Taylor-sorfejtést alkalmaztam, és az ϵ-ban lineáris tagot hagytam meg, a magasabb fokúakat nem.

A **Lie-deriváltat** ezek után (komponens-alakban) a

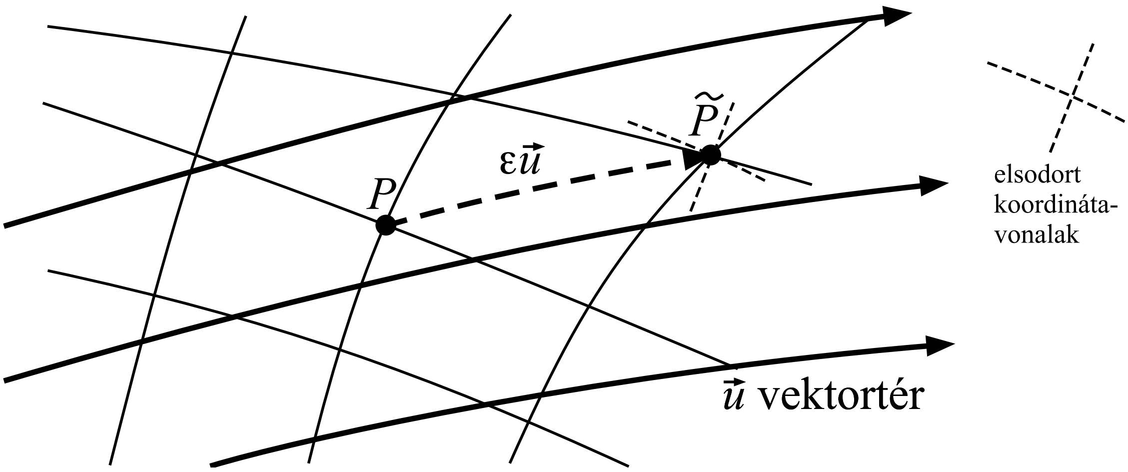
$$(\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{a})^\alpha \equiv \frac{a^\alpha(\tilde{\vec{r}}) - \tilde{a}^\alpha(\tilde{\vec{r}})}{\epsilon} \tag{43}$$

képlettel *definiáljuk*. Ez a definíció nagyon szemléletes (az eredetileg ott levő vektort összehasonlítjuk az odasodort vektorral). (41)-et és (42)-t behelyettesítve a definíciós képletbe ezt kapjuk:

$$(\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{a})^\alpha = u^\beta(\vec{r}) \frac{\partial a^\alpha(\vec{r})}{\partial x^\beta} - a^\beta(\vec{r}) \frac{\partial u^\alpha(\vec{r})}{\partial x^\beta} \tag{44}$$

ami pontosan megegyezik a fenti (34) képlettel, tehát innentől kezdve itt is ugyanúgy fel lehet írni a (33), (35), (36), (37) alakokat. Figyeljük meg, hogy bár a definícióban a (41) és (42) kivonásakor két $\tilde{\vec{r}}$**-**pontbeli $\vec{a}$ vektort hasonlítottuk össze, a végső képletben csak az eredeti $\vec{r}$ pontban levő $\vec{a}$ és $\vec{u}$ vektorok szerepelnek.

Most nézzünk egy másik levezetést a Lie-derivált képletére, Stephani alapján. Nagyon érdekes, hogy ennek bizonyos elemei szöges ellentétben állnak az előző tárgyalásmóddal. Az előbb hangsúlyoztuk, hogy a (38) nem koordinátatranszformáció - a probléma során semmilyen koordinátarendszer-váltás nem történik -, hanem 'ponttranszformáció', azaz magukat a sokaság pontjait sodorja odébb az elképzelt áramlás. A Stephani-tárgyalásmódban ennek az ellenkezőjét képzeljük: itt is van a sokaságon definiálva egy $\vec{a}$ vektormező, és itt is van egy $\vec{u}$ 'sodródási mező', csakhogy itt *nem* azért tudjuk az $\vec{a}$ vektormező P pontbeli és (azennek infinitezimális közelében levő) $\tilde{P}$ pontbeli elemét összevetni, mert az $\vec{a}(P)$-t az áramlással elsodortatjuk a $\tilde{P}$ pontba, hanem minden $\vec{a}$ vektor marad a helyén, a sokaság pontjai is maradnak a helyükön, csak képzeletben az $\vec{u}$ 'sodródási mező' *minket (a 'megfigyelőt')* sodor el a P pontból a $\tilde{P}$ pontba, és *miközben sodródunk, magunkkal visszük a P pontbeli lokális koordinátavonalakat a $\tilde{P}$ pontba*! (Ld. az alábbi ábrát.) Itt tehát az $\vec{a}$ vektormezőt nem sodorjuk odébb, de mivel a $\tilde{P}$ pontban lokálisan most már az a koordinátarendszer is rendelkezésre áll, ami a P-ben van, így az $\vec{a}(\tilde{P})$ vektor komponenseit ebben az odatolt koordinátarendszerben leolvasva már jogosan tudjuk ezeket a komponenseket az $\vec{a}(P)$ vektor komponenseivel összevetni, hiszen 'ugyanarra a koordinátarendszerre vonatkoznak'! Nézzük a részleteket.



A fenti ábráról leolvasható, hogy ha a P pont koordinátái x^α, akkor a $\tilde{P}$ pont koordinátái:

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \epsilon u^\alpha\left(x^\beta\right) \qquad (45)$$

(vö. (38)!).
Ide sodorja el a 'megfigyelőt' a P-ből a 'folyadékáramlás', és ide viszi ő magával a P-beli koordinátarendszert. Ez a $\tilde{P}$ pontban egy olyan koordinátatranszformációnak felel meg, melynek új, vesszős koordinátái - amelyek az odasodrásból származnak - a következőképpen fejezhetők ki az eredetileg ott levő vesszőtlen koordinátákkal:

$$x^{\alpha\prime} = x^\alpha - \epsilon u^\alpha\left(x^\beta\right) \qquad (46)$$

mint az a fenti ábra alapján könnyen végiggondolható. Hogy a kontravariáns vektorok transzformációs együtthatóját megkapjuk, vegyük (46) mindkét oldalának parciális deriváltját x^β szerint:

$$\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \epsilon\frac{\partial u^\alpha(P)}{\partial x^\beta} \qquad (47)$$

A $\tilde{P}$ pontban tehát ott van az $\vec{a}\left(\tilde{P}\right)$ vektor, amelynek komponenseit a vesszős és a vesszőtlen koordinátákkal is felírhatjuk, és a kettő között a kontravariáns vektorok transzformációs szabálya teremt kapcsolatot:

$$a^{\alpha'}\left(\tilde{P}\right) = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}a^\beta\left(\tilde{P}\right) = \left(\delta^\alpha_\beta - \epsilon\frac{\partial u^\alpha(P)}{\partial x^\beta}\right)\cdot a^\beta\left(x^\gamma + \epsilon u^\gamma(P)\right) =$$

$$= \left(\delta^\alpha_\beta - \epsilon\frac{\partial u^\alpha(P)}{\partial x^\beta}\right)\left[a^\beta(P) + \epsilon u^\gamma(P)\frac{\partial a^\beta(P)}{\partial x^\gamma}\right] =$$

$$= a^\alpha(P) + \epsilon u^\gamma(P)\frac{\partial a^\alpha(P)}{\partial x^\gamma} - \epsilon a^\beta(P)\frac{\partial u^\alpha(P)}{\partial x^\beta} \qquad (48)$$

ahol a 2. egyenlőségnél felhasználtam (47)-et és (45)-öt, a 3. egyenlőségnél Taylor-sorfejtést írtam fel, az ϵ-ban lineáris tagot megtartva, végül a gömbölyű és szögletes zárójelben levő

tagokat beszorozva és az ϵ-ban ismét csak a lineáris tagokat megtartva kaptam a végeredményt.
Mivel $a^{\alpha'}(\tilde{P})$ a vektortér $\tilde{P}$ pontban levő elemének a α-komponense, de egy "olyan koordinátarendszerben leolvasva, mint amilyen a P pontban is van", értelmesen vonhatjuk ki belőle $a^{\alpha}(P)$-t, a vektortér P pontbeli elemének α-komponensét (a P pontbeli koordinátarendszerben leolvasva). Ezt a különbséget ϵ-nal elosztva kapjuk, definíció szerint, **a vektortér $\vec{u}$ szerinti Lie-deriváltját a P pontban**:

$$(\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{a})^{\alpha} \equiv \frac{a^{\alpha'}(\tilde{P})-a^{\alpha}(P)}{\epsilon} \tag{49}$$

A (43)-mal összevetve látható, hogy a kétféle definíció a Lie-deriváltra formálisan nem egészen ugyanaz. A (49) jobb oldalát (48) alapján átírva adódik, hogy:

$$(\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{a})^{\alpha} = u^{\beta}(P)\frac{\partial a^{\alpha}(P)}{\partial x^{\beta}} - a^{\beta}(P)\frac{\partial u^{\alpha}(P)}{\partial x^{\beta}} \tag{50}$$

ami viszont a (44)-mal pontosan megegyező alak, tehát 'megnyugodhatunk'. (A jobb oldal első tagjában az összegzőindexet átírtam γ-ról β-ra.)

--

Hogyan írhatjuk fel egy $f(\vec{r})$ skalármező $\vec{u}$ vektormező szerinti Lie-deriváltját? A skalár egykomponensű mennyiség, egy adott $\vec{r}$ pontban egy adott, jól definiált szám, amelynek értéke független attól, milyen koordinátarendszert használunk annak a pontnak a kijelölésére. (Vö. ezt azzal, amikor egy vektor komponenseit akarjuk leolvasni; ott nagyon is számít, milyen lokális koordinátabázisra vonatkoztatjuk azokat a komponenseket.) Ezért amikor a folyadékáramlás az $\vec{r}$ pontból az $\tilde{\vec{r}}$ pontba sodorja a skalármező $\vec{r}$-beli elemét, akkor erre az odasodort értékre egyszerűen írhatjuk, hogy

$$\tilde{f}(\tilde{\vec{r}}) = f(\vec{r}) \tag{51}$$

(Vö. ezt a (41)-es összefüggéssel!) Ezt a skalár számot közvetlenül összehasonlíthatjuk azzal a skalár értékkel, amely az eredeti (nem odébbsodort) f skalármező elemeként van jelen az $\tilde{\vec{r}}$ pontban. Ez utóbbi értékre a következőt írhatjuk fel, Taylor-sorfejtéssel (vö. (42)):

$$f(\tilde{\vec{r}}) = f(\vec{r}+\epsilon\vec{u}(\vec{r})) = f(\vec{r}) + \epsilon u^{\beta}(\vec{r})\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x^{\beta}} \tag{52}$$

A Lie-deriváltnak a korábbiakkal konzisztens definíciója ebben az esetben (vö. (43)):

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}f \equiv \frac{f(\tilde{\vec{r}})-\tilde{f}(\tilde{\vec{r}})}{\epsilon}$$

Tehát a skalármező Lie-deriváltjára a következő képlet adódik (vö. (44)):

$$\mathcal{L}_{\vec{u}}f = u^{\beta}(\vec{r})\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x^{\beta}} \tag{53}$$

--

Hogyan írhatjuk fel egy $\underline{b}(\vec{r})$ kovariáns vektormező $\vec{u}$ vektormező szerinti Lie-deriváltját? Az eredményt nem vezetem le, pl. Hraskónál szerepel az érthető levezetés. [A levezetés azon az ötleten alapszik, hogy ha egy kovariáns vektormezőnek a skalárszorzatát képezzük egy kontravariáns vektormezővel, akkor már tudjuk, hogy az eredményül kapott skalármező Lie-deriváltjára a (53) képlet lesz érvényes.] A kovariáns vektormező Lie-deriváltjára a következő képlet adódik (vö. (44)):

$$\left(\mathcal{L}_{\vec{u}}\underline{b}\right)_\alpha = u^\beta(\vec{r})\frac{\partial b_\alpha(\vec{r})}{\partial x^\beta} + b_\beta(\vec{r})\frac{\partial u^\beta(\vec{r})}{\partial x^\alpha} \tag{54}$$

--

Általános $\boldsymbol{T}$ tenzormező Lie-deriváltjára ezek után már kitalálható a szabály [nem vezetem le; a levezetésnek az az alapötlete, hogy megfelelő számú kontravariáns és kovariáns vektor szorzatára alkalmazzuk a szorzat deriválásának Leibnitz-szabályát]. Egy kétszeresen kontravariáns és egyszeresen kovariáns tenzor konkrét példáján bemutatva (a képletben minden mennyiség az $\vec{r}$ pontban van értelmezve, ezt most már külön nem jelölöm):

$$(\mathcal{L}_{\vec{u}}\boldsymbol{T})^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = u^\delta\frac{\partial T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}}{\partial x^\delta} - T^{\delta\beta}{}_{\gamma}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\delta} - T^{\alpha\delta}{}_{\gamma}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\delta} + T^{\alpha\beta}{}_{\delta}\frac{\partial u^\delta}{\partial x^\gamma} \tag{55}$$

---

5. MIT JELENT A KILLING-VEKTOR?

(Ezt a részt Poissontól adaptálom.)

Ha egy $\boldsymbol{T}$ tenzormező $\vec{u}$ vektormező szerinti Lie-deriváltja zérus, és $\vec{u}$ egy görbe érintővektoraként értelmezhető, akkor azt mondjuk, hogy a $\boldsymbol{T}$ a görbe mentén Lie-transzportálódik. Válasszuk ezek után a koordinátarendszerünket úgy, hogy az említett görbe az egyik - mondjuk a j-edik - koordinátavonallal egybeessen. (Görög betűvel az olyan indexeket jelöltem, amelyek 1-től a dimenziószámig bármilyen értéket felvehetnek, "futóindexek". Itt a konkrét koordináta jelölésére latin betűs indexet használok.) Ez azt jelenti, hogy a görbe mentén az összes x^α koordináta konstans ($\alpha \neq j$), egyedül x^j változik, és az $\vec{u}$ komponensei (emlékeztető: $u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$) ebben a koordinátarendszerben olyanok, hogy $u^j = 1$, az összes többi komponens nulla. $\vec{u}$ komponensei tehát mind konstansok, vagyis $\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\delta} = 0$, tehát (55) jobb oldalából csak az első tag marad meg, és az összegzésből ott is csak a $\delta = j$ járulék:

$$(\mathcal{L}_{\vec{u}}\boldsymbol{T})^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}}{\partial x^j} \qquad \text{(Lie-derivált a } j\text{-koordinátavonal mentén)} \tag{56}$$

Azt kapjuk tehát, hogy *ha* a tenzor *Lie-transzportálódik* egy j-koordinátavonal mentén, akkor $\frac{\partial T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}}{\partial x^j} = 0$. Megfordítva: ha egy tenzormező olyan, hogy az adott koordinátarendszerben a komponensei nem függnek az egyik koordinátától, akkor a tenzor Lie-deriváltja nulla lesz 'azon koordinátavonal mentén' (precízebben: az azon koordinátavonal érintővektora - mint vektortér - szerinti Lie-derivált lesz nulla).

Most ne akármilyen tenzornak, hanem konkrétan *a* $\boldsymbol{g}$ *metrikus tenzornak* tekintsük a Lie-deriváltját valamilyen $\vec{k}$ vektormező szerint:

$$\left(\mathcal{L}_{\vec{k}}\boldsymbol{g}\right)_{\alpha\beta} = k^{\mu}\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}\nabla_{\alpha}k^{\mu} + g_{\alpha\mu}\nabla_{\beta}k^{\mu} \tag{57}$$

ahol visszatértem a parciális derivált helyett a kovariáns derivált jelölésekre. (Ezt megtehettem; indoklás: (36) fölött). Korábban láttuk, hogy *a metrikus tenzor kovariáns deriváltja nulla* (ld. (17)). (57) tehát így írható:

$$\left(\mathcal{L}_{\vec{k}}\boldsymbol{g}\right)_{\alpha\beta} = g_{\mu\beta}\nabla_{\alpha}k^{\mu} + g_{\alpha\mu}\nabla_{\beta}k^{\mu} = \nabla_{\alpha}k_{\beta} + \nabla_{\beta}k_{\alpha} \tag{58}$$

ahol az utolsó, nagyon kompakt és elegáns alakot úgy kaptuk, hogy a (kovariáns deriválás szempontjából konstansnak tekinthető) metrikus tenzort bevittük a kovariáns derivált jel mögé, és a k kontravariáns indexét leszállítottuk vele.
Tegyük fel, hogy az adott koordinátarendszerben a metrikus tenzor komponensei nem függnek a j-koordinátától. Az (56) alatti bekezdés értelmében, ha ezek után a $\vec{k}$ vektormezőt úgy definiáljuk, hogy éppen a j-koordinátavonalak érintővektoraiból álljon, tehát $k^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{j}$, akkor a metrikus tenzor $\vec{k}$ szerinti Lie-deriváltja nulla lesz:

$$\left(\mathcal{L}_{\vec{k}}\boldsymbol{g}\right)_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}k_{\beta} + \nabla_{\beta}k_{\alpha} = 0 \tag{59}$$

Az ilyen $\vec{k}$ vektormezőt **Killing-vektormezőnek** nevezzük, a (59) egyenletet pedig, amely az ilyen vektormezőkre teljesül, Killing-egyenletnek. Fontos látni, hogy a (59) egyenlet tenzor-egyenlet, tehát ha egy bizonyos koordinátarendszerben igaz, akkor akármilyen koordinátarendszerben igaz. Márpedig, mint láttuk, a (59) abban a speciális koordinátarendszerben igenis igaz, amelyben $\boldsymbol{g}$ nem függ az egyik koordinátától, $\vec{k}$ pedig az ezen koordinátához tartozó koordinátavonalak érintővektora. Nem mindig van a koordinátarendszer-választással olyan szerencsénk, hogy a $\boldsymbol{g}$-ről kiderül: valamelyik koordinátától nem függ. Azonban a (59) Killing-egyenlet ebben a koordinátarendszerben is működik: ha azt találjuk, hogy egy $\vec{k}$ vektormező eleget tesz ennek az egyenletnek, akkor az a $\vec{k}$ - bár ez esetben nem fog egybeesni egyetlen koordinátavonal érintőjével sem - Killing-mező lesz, azaz a $\boldsymbol{g}$ metrikus tenzor Lie-deriváltja $\vec{k}$ szerint nulla lesz.

A Killing-vektormező fogalma nagyon hasznos, mégpedig azért, mert **mozgásállandókat** lehet a segítségével találni. *A mozgásállandó olyan mennyiség, amely egy geodetikuson mozgó objektum világvonala mentén végig ugyanazt a számértéket veszi fel*. (Nem téridőben, hanem térben: a 'mozgásállandó' olyan mennyiség, amely egy geodetikus vonal mentén végig ugyanaz a szám.) Konkrétan: **ha egy $\vec{k}$ vektormező Killing-mező, akkor az $\vec{u}$ ·**

$\underline{\boldsymbol{k}}$ **skalárszorzat megmaradó mennyiség (mozgásállandó) a geodetikus mentén**. Itt $\vec{u}$ a világvonal érintővektora ($u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$, tehát pl. tömegpont esetén a négyessebesség), $\underline{k}$ pedig a $\vec{k}$ vektormező 'kovariáns változata' (ld. az (58) alatti bekezdést).
Az előző bekezdés vastaggal írt állítását most bizonyítjuk:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\vec{u}\cdot\underline{k}\right) = \frac{d}{d\lambda}(u^\alpha k_\alpha) = \nabla_\beta(u^\alpha k_\alpha)\frac{dx^\beta}{d\lambda} = \nabla_\beta(u^\alpha k_\alpha)u^\beta =$$

$$= k_\alpha u^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\alpha u^\beta \nabla_\beta k_\alpha = 0 \qquad (60)$$

Az első egyenlőségnél felhasználtam (16)-ot, azaz azt, hogy egy skalár mennyiség valamely koordináta szerinti parciális deriváltja ugyanaz, mint az ugyanazon koordináta szerinti kovariáns deriváltja. A második sorban álló egyenlőség bal oldalán az első tag a (27) geodetikus egyenlet miatt nulla, a második tag pedig azért, mert egy szimmetrikus tenzor ($u^\alpha u^\beta$) és egy antiszimmetrikus tenzor ($\nabla_\beta k_\alpha$) szorzata csak zérus tud lenni. [Azt, hogy $\nabla_\beta k_\alpha$ antiszimmetrikus tenzor, az (59) Killing-egyenletből látjuk.]

<u>IRODALOM:</u>

Thomas Moore: A General Relavitity Workbook
Eric Poisson: An Advanced Course in General Relativity
Hans Stephani: Relativity
John L. Friedman: Lie derivatives, forms, densities, and integration
Hraskó Péter: Általános relativitáselmélet és kozmológia