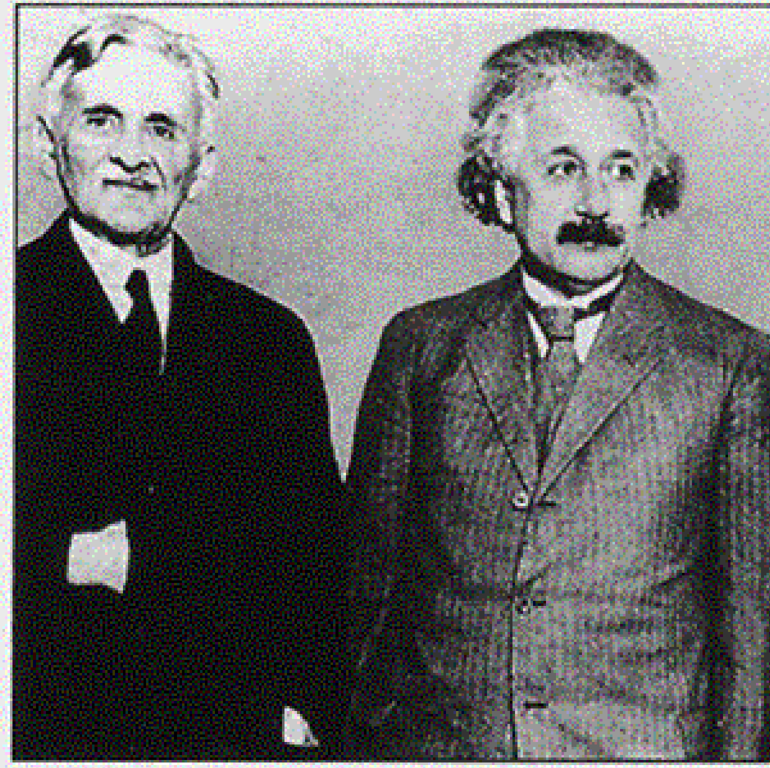
Modern fizika alkalmazásai a mérnöki gyakorlatban

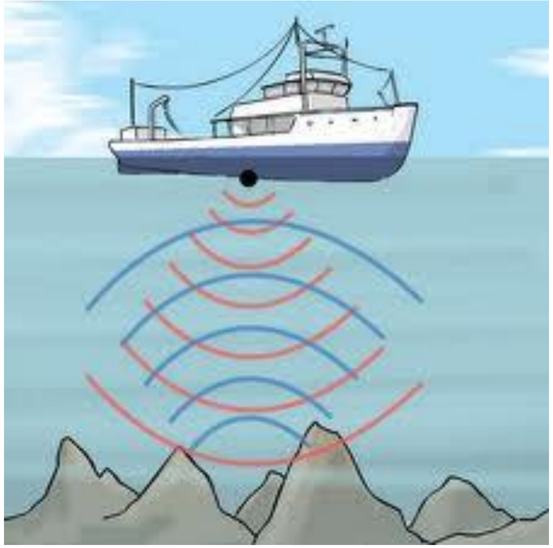
3. előadás

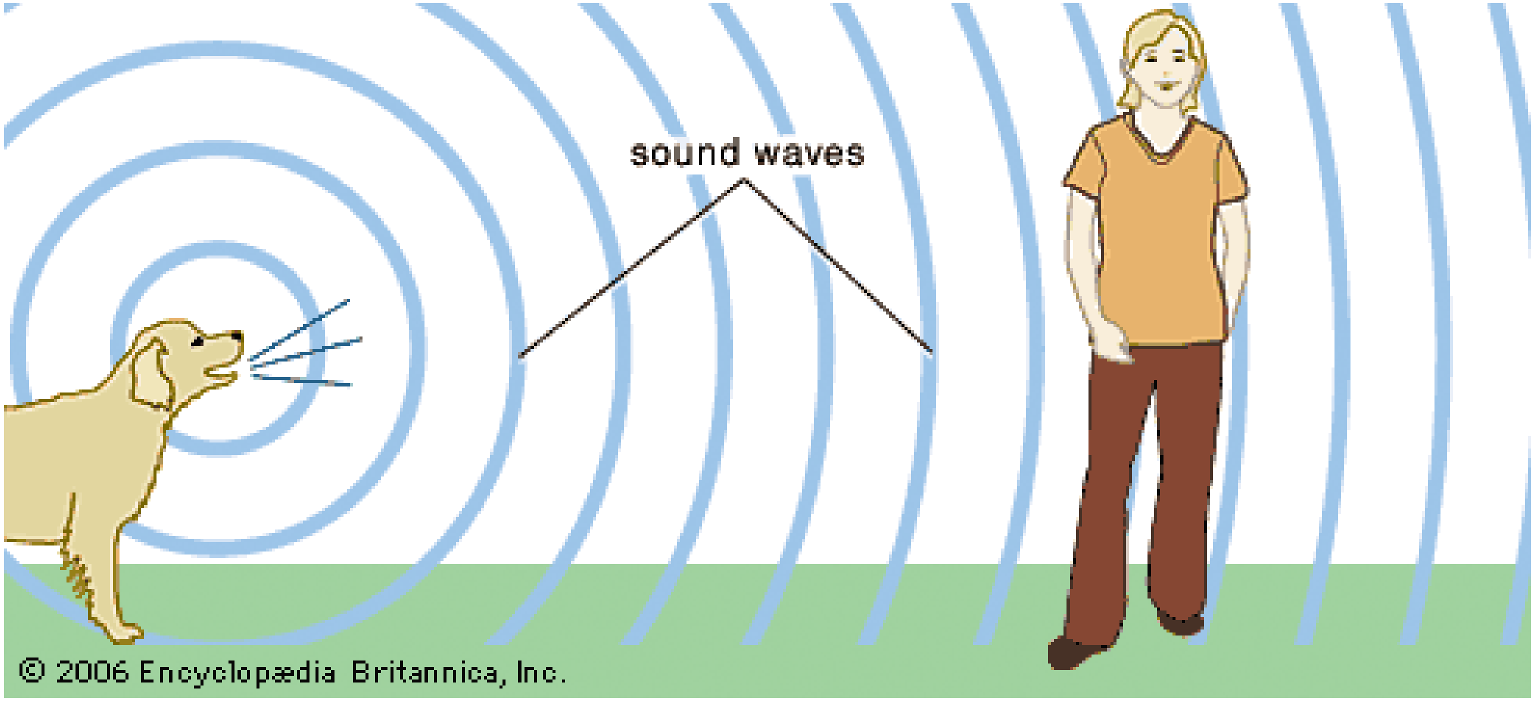
A speciális relativitás elmélete I.



Einstein and Michelson
A 1931 photo shows Einstein (right) with Michelson during a meeting in Pasadena, California.

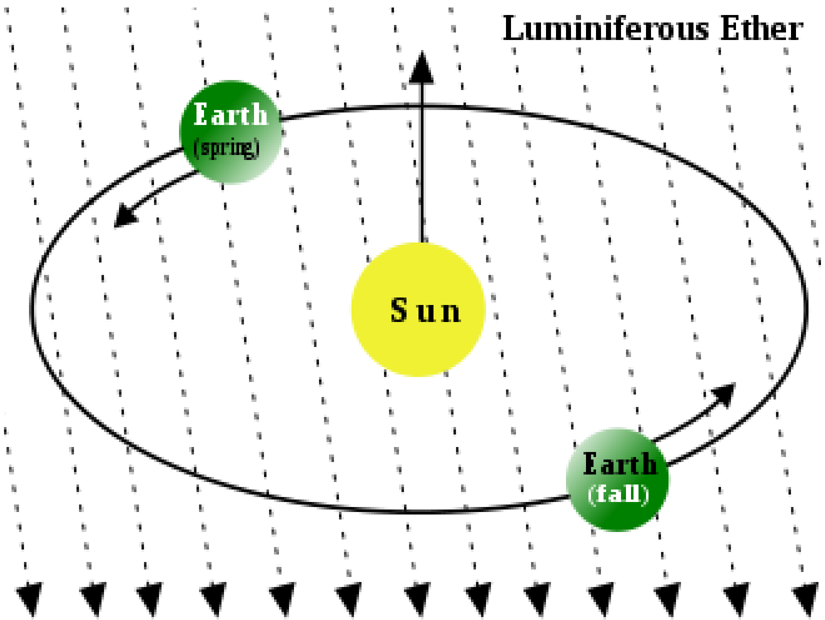
Van-e ÉTER ???

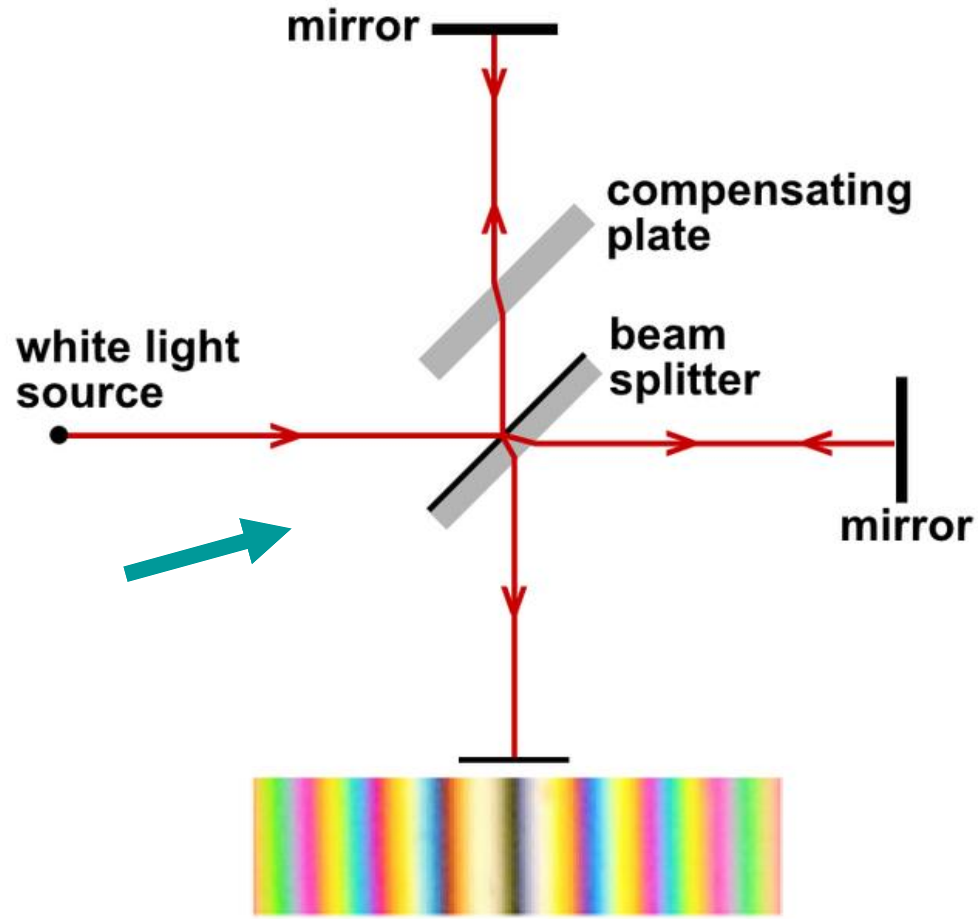




Mekkora sebességgel mozog a Föld az éterhez képest ???

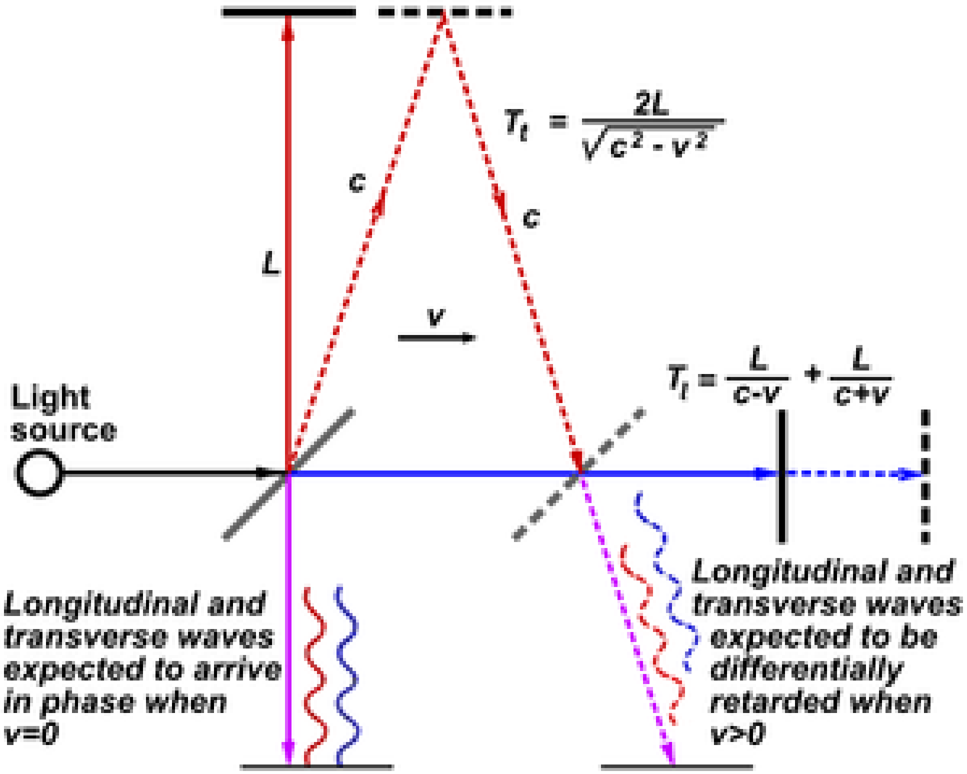
A 19. században hittek az éter létezésében.





***Nobel díj* fizikából 1907-ben:**
Albert Michelson,
Edward Morley

A Michelson-Morley kísérlet alapötlete I.



$$t_2 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2l}{c(1 - v^2/c^2)}$$

$$t_1 = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

A Föd a Nap körül kb. 30 km/s-s sebességgel kering.

A Michelson-Morley kísérlet alapötlete II.

$$t_2 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2l}{c(1-v^2/c^2)}$$

$$t_1 = \frac{l}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{l}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\ell}{c(1-v^2/c^2)} - \frac{2\ell}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \Delta s = c\Delta t = \frac{2\ell}{(1-v^2/c^2)} - \frac{2\ell}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

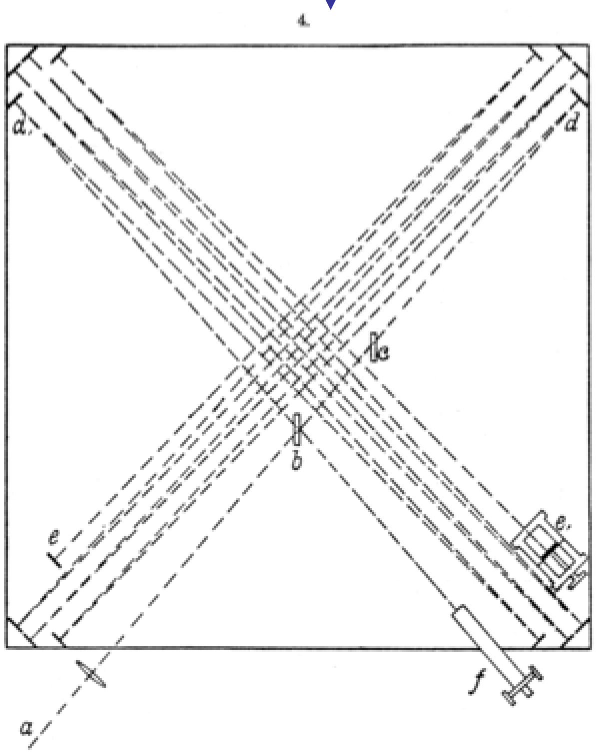
Ha elfordítjuk az elrendezést 90°-al:

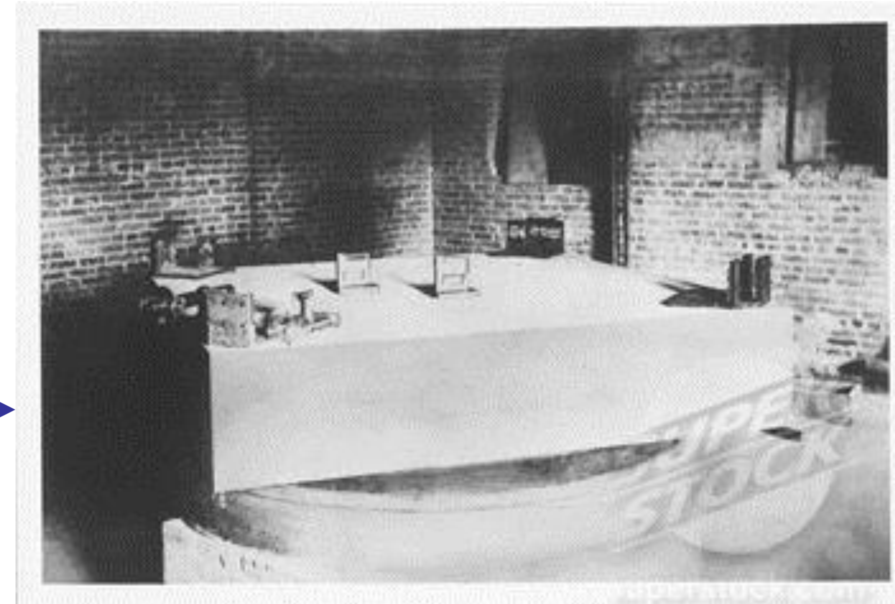
$$\Delta t' = t_1 - t_2 = \frac{2\ell}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{2\ell}{c(1-v^2/c^2)} \Rightarrow \Delta s' = c\Delta t' = \frac{2\ell}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{2\ell}{(1-v^2/c^2)}$$

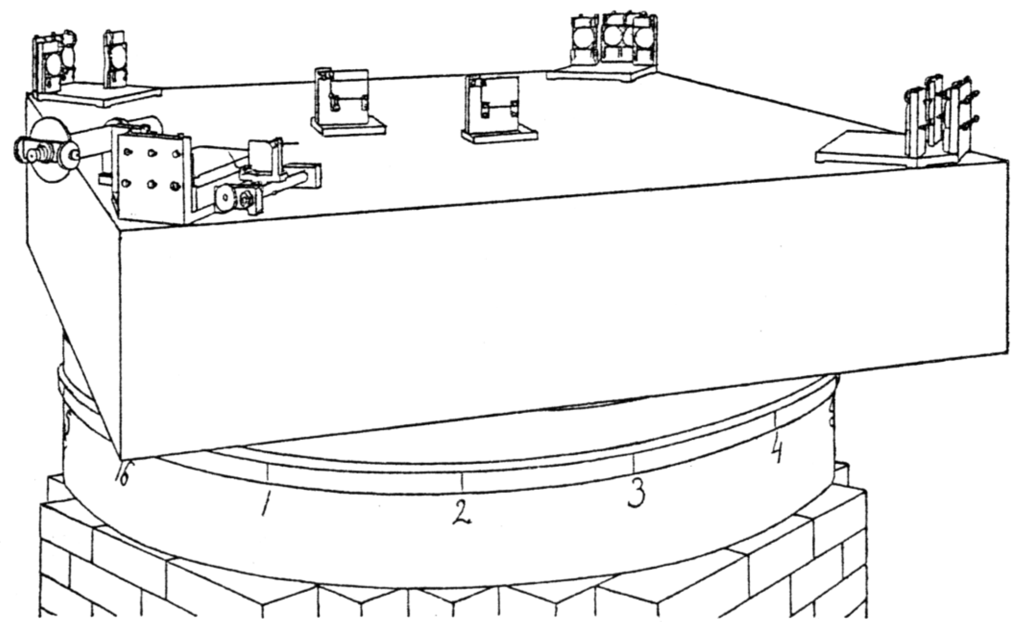
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s \quad \text{és} \quad \Delta\varphi' = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s' \Rightarrow \theta = \Delta\varphi - \Delta\varphi' \neq 0$$

A Michelson-Morley Kísérlet elrendezése:

Az interferométer karjainak hossza: 11 m.



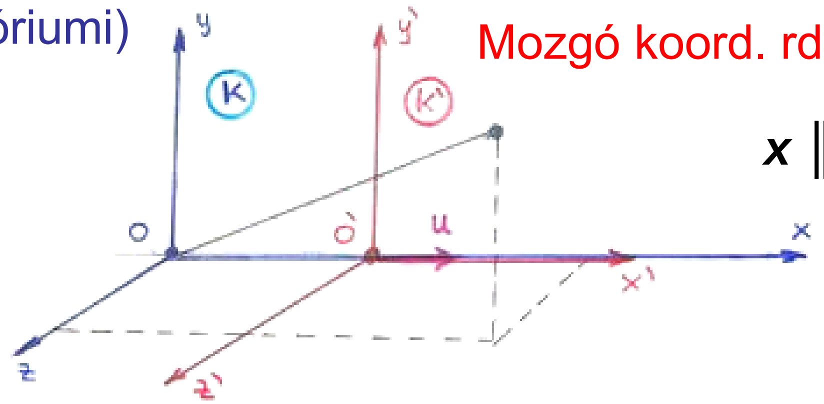




A leghíresebb negatív eredménnyel elvégzett kísérlet; $\theta = 0\,!!!$ ***Éter???***

Koordinátarendszerek

Nyugvó (laboratóriumi) koord. rdsz.



Mozgó koord. rdsz.

x ‖ ***x'*** és ***y*** ‖ ***y'*** és ***z*** ‖ ***z'***

Galilei-transzformáció: $x' = x - ut$

$y' = y$

$z' = z$

az órák ugyanúgy járnak $t' = t$

$\dot{x}' = \dot{x} - u$ $\quad \text{ahol}: \ \dot{x}' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx'}{dt}$

$\ddot{x}' = \ddot{x}$

$\dot{y}' = \dot{y} \qquad \ddot{y}' = \ddot{y}$

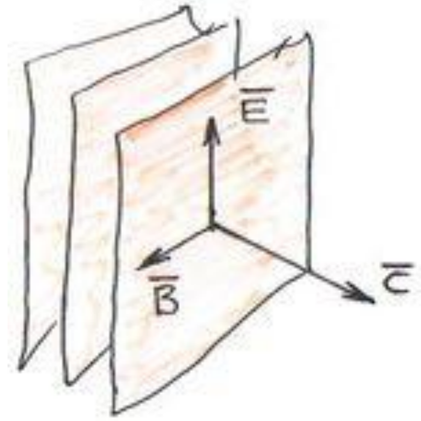
$\dot{z}' = \dot{z} \qquad \ddot{z}' = \ddot{z}$

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} \leftrightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$$

A mechanika törvényei minden inerciarendszerben ugyanazok (azaz egyforma matematikai alakban fogalmazhatók meg).

Galilei féle relativitási elv

A speciális relativitáselmélet posztulátumai (Einstein-posztulátumok)



Maxwell (elméletileg), Hertz (kísérletileg) igazolta: EMH létezése

A Galilei_transzformáció nem működik!
(c’ ≠ c + u vagy c’ ≠ c - u , nem hullámegyenlet!)

Einstein-posztulátumok:

1. a Természettörvények minden inerciarendszerben ugyanolyan alakúak,
2. bármilyen fizikai hatás maximum *c* sebességgel terjedhet.

1. → ***c* = *c’***

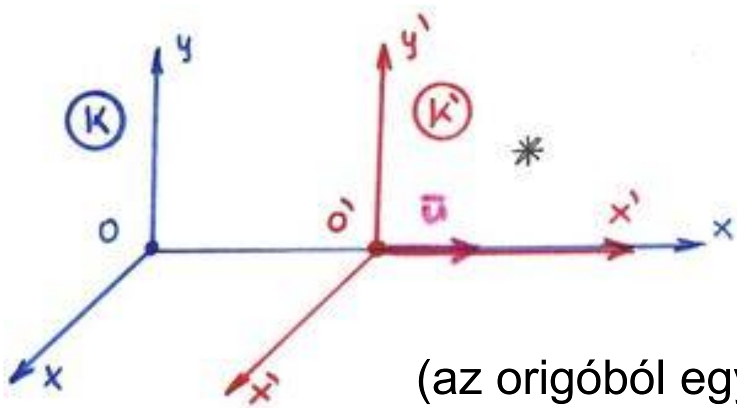
A speciális relativitáselmélet: $(x, y, z, t) \leftrightarrow (x', y', z', t)$ és $\vec{F} \leftrightarrow \vec{F}'$

Lorentz-transzformáció I.

Hendrik Antoon Lorentz és Henri Poincaré → transzformáció

⇓

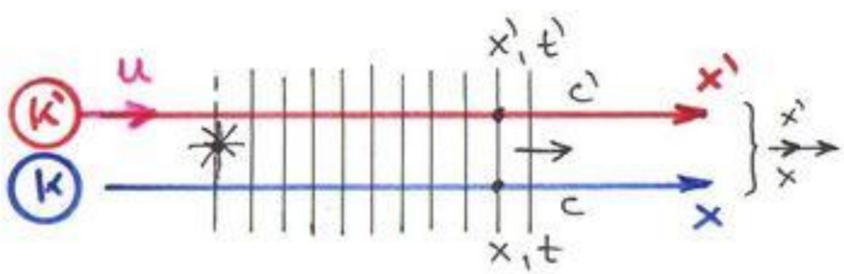
a Maxwell-egyenleteket változatlanul hagyja



$$t = t' = 0 \leftrightarrow O = O'$$

(az origóból egyszerre induló fényjelekkel → órák szinkronizálása)

(sztenderd elrendezés)



$$t = \frac{x}{c} \quad \text{és} \quad t' = \frac{x'}{c}$$

(nem ugyanazt mérik!)

Galilei-transzformáció ↔ ***c* = *c***' ???

Másik transzformáció kell! ←

$$\frac{x'}{c} = \frac{x}{c} - \frac{u}{c} t \quad \Rightarrow \quad t' = t\left(1 - \frac{u}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t \neq t'}} \;\textbf{!!}$$

Lorentz-transzformáció II.

A korrespondencia-elv:

…egy adott jelenségre vonatkozó „új” törvénynek határesetben mindig vissza kell adnia a „régit”!

Vissza kell kapnunk a Galilei-transzformációt, ha:

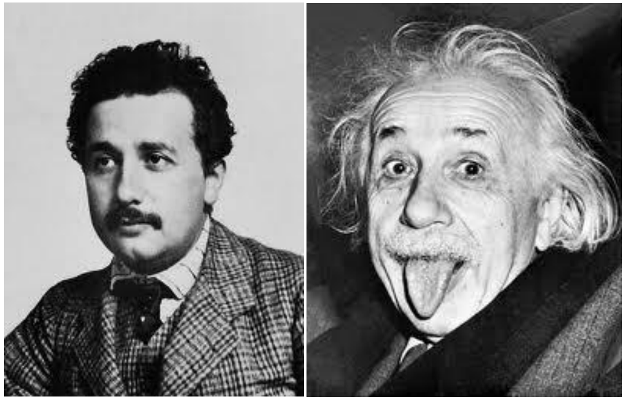
$$\frac{u}{c} << 1 \quad \text{, vagy is} \quad c \to \infty \quad \Rightarrow \quad t = t'$$

---

c* = *c’ → mechanika ??? ⇒ új transzformáció (Einstein)

$$x' = \Gamma(x - ut) \quad \text{és} \quad x = \Gamma(x' + ut') \quad \text{és} \quad t \leftrightarrow t'$$

$$\lim_{u \to 0} \Gamma = 1$$



Lorentz-transzformáció III.

$$t=\frac{x}{c} \quad \text{és} \quad t'=\frac{x'}{c}$$

$$x'=\Gamma(x-ut) \quad \text{és} \quad x=\Gamma(x'+ut')$$

$$x'=\Gamma x\left(1-\frac{u}{c}\right) \quad \text{és} \quad x=\Gamma x'\left(1+\frac{u}{c}\right)$$

$$xx'=\Gamma^2 xx'(1-\frac{u}{c})(1+\frac{u}{c}) \;\Rightarrow\; \Gamma=\frac{1}{\sqrt{1\text{-}\frac{u^2}{c^2}}}$$

A korrespondencia elv tényleg teljesül:

$$\lim_{c\to\infty}\Gamma=1 \quad (u<<c)$$

Hogyan transzformálódik az idő?

$$\left.\begin{aligned} x'&=\Gamma(x-ut)\\ x&=\Gamma(x'+ut')\end{aligned}\right\} \; x=\Gamma^2(x-ut)+\Gamma ut'$$

$$t'=\Gamma t+\frac{x}{u}\frac{1-\Gamma^2}{\Gamma}$$

$$t'=\Gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)$$

$$\lim_{u\to 0} t'=t$$

Lorentz-transzformáció IV.

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

K → K' $\xrightarrow{u \;\to\; -u}$ K' → K

$$x' = \Gamma(x - ut) \qquad x = \Gamma(x' + ut')$$

$$t' = \Gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \qquad t = \Gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

Lineáris kapcsolat!!!

Esemény (téridő koordináták): $\mathrm{K}:\ (x,t)$ és $\mathrm{K}':(x',t')$

Ha két esemény történt: $\mathrm{K}:\ \Delta x = x_2 - x_1$ és $\Delta t = t_2 - t_1$

$\mathrm{K}':\ \Delta x' = x_2' - x_1'$ és $\Delta t' = t_2' - t_1'$

(A) $\Delta x' = \Gamma(\Delta x - u\Delta t)$

(B) $\Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$

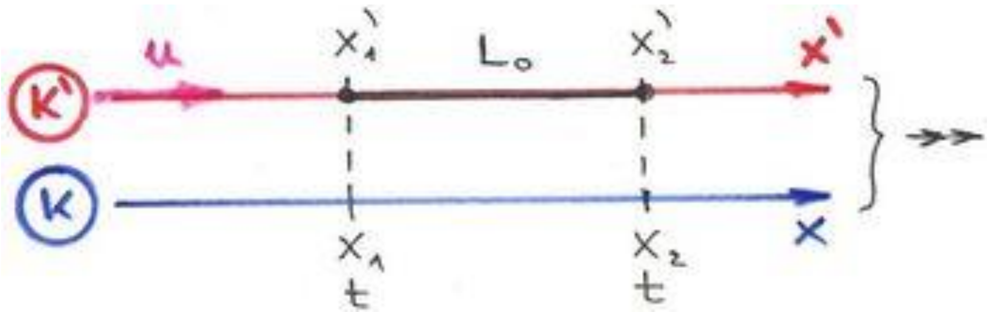
(C) $\Delta x = \Gamma(\Delta x' + u\Delta t')$

(D) $\Delta t = \Gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$

Hosszkontrakció

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

A nyugalomban lévő rúd hossza K′-ben: $\Delta x' = L_0$



Mérés: $\Delta t = 0$

(A) $\Delta x' = \Gamma(\Delta x - u\Delta t)$

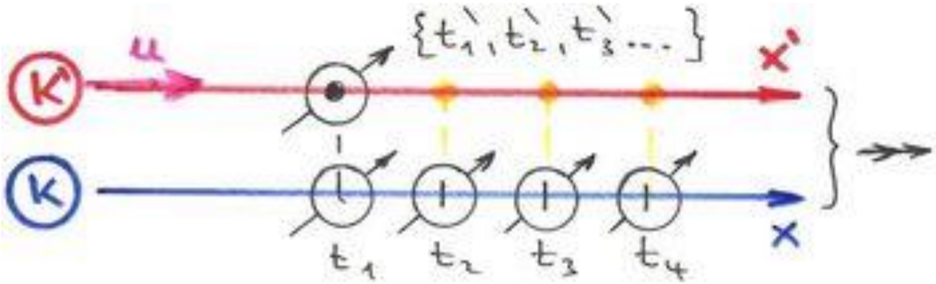
A rúd hossza K-ban: $L = L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$

Fordítva??

-
-
-

Az idődilatáció

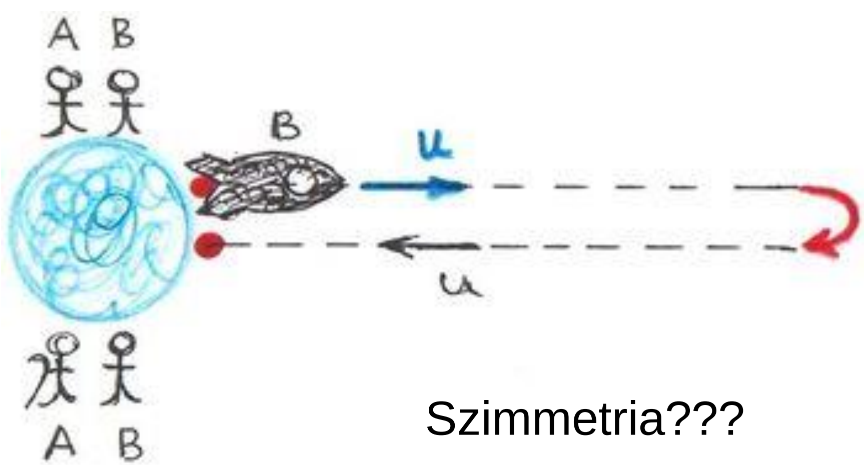
Egy óra K′ - ben nyugalomban van : $\Delta x' = 0$



$$\text{(D)} \quad \Delta t = \Gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$$

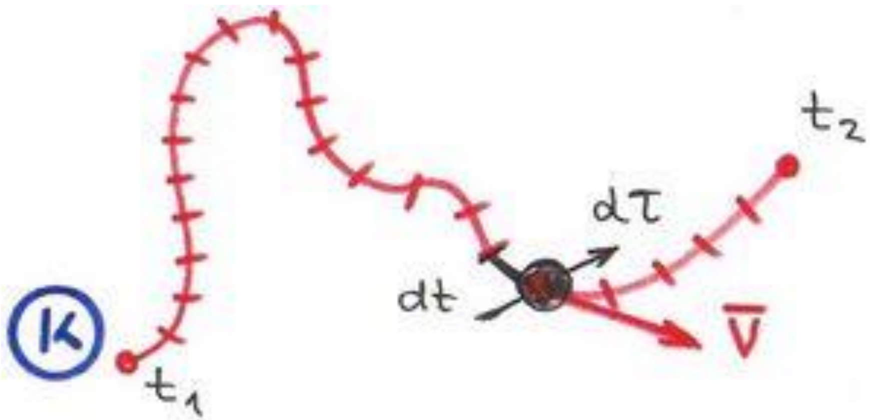
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Ikerparadoxon:



Szimmetria???

A sajátidő

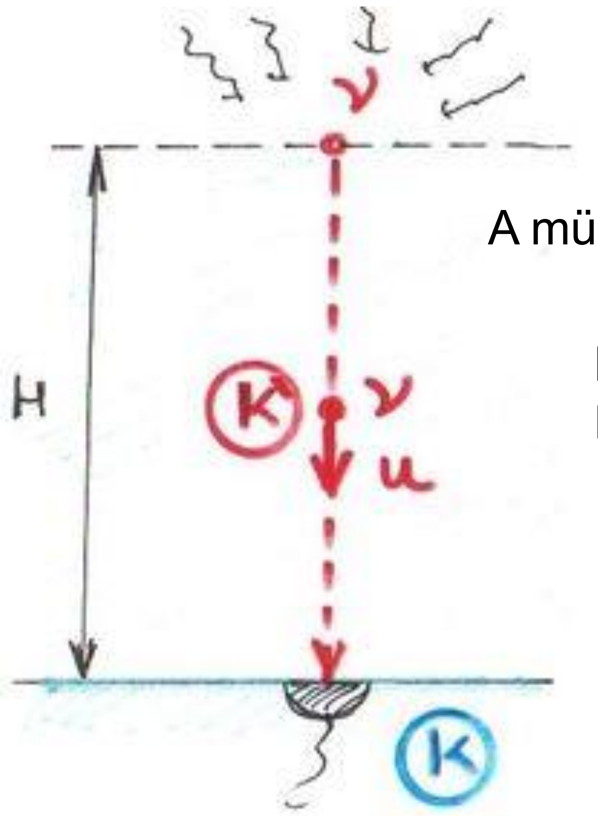


$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\tau_{12} = \int_{r_1}^{r_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-v^2/c^2}\,dt \le \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1$$

Sajátidő: bármely inerciarendszerből számítva ugyanaz

A mű-mezon (müon) bomlása



A müon instabil részecske, amely $\tau \approx 2.2\ \mu s$ alatt elbomlik.

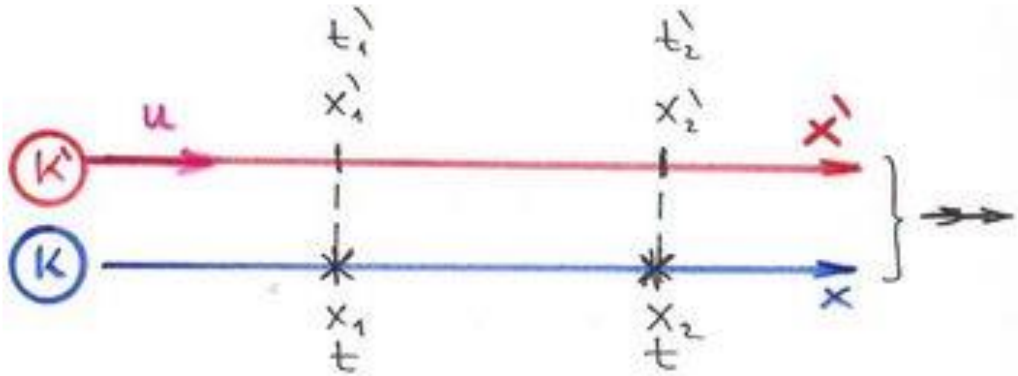
Ezek a részecskék a Föld felső légkörében,
H = 4700 m magasan keletkeznek

$$v_\mu = \frac{H}{\tau} \approx 7c$$

$$H = u\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = u\tau$$

$$u \approx 0.99c$$

Az egyidejűség relativitása



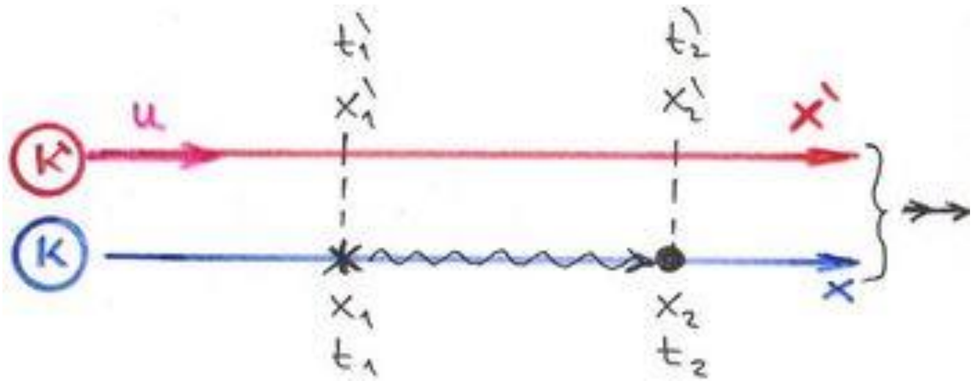
$$t_1 = t_2 \;\rightarrow\; \Delta t = 0$$

$$\text{(B)}\;\; \Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$$

$$t_2' - t_1' = \Delta t' = \Gamma\left(-\frac{u}{c^2}\Delta x\right) = \frac{-\dfrac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

Az *egyidejűség* is relatív fogalom, nincsen „abszolút” egyidejűség !!!

Az ok-okozat relativisztikus tárgyalása



$$t_2 > t_1 \;\Rightarrow\; \Delta t > 0$$

ok okozat

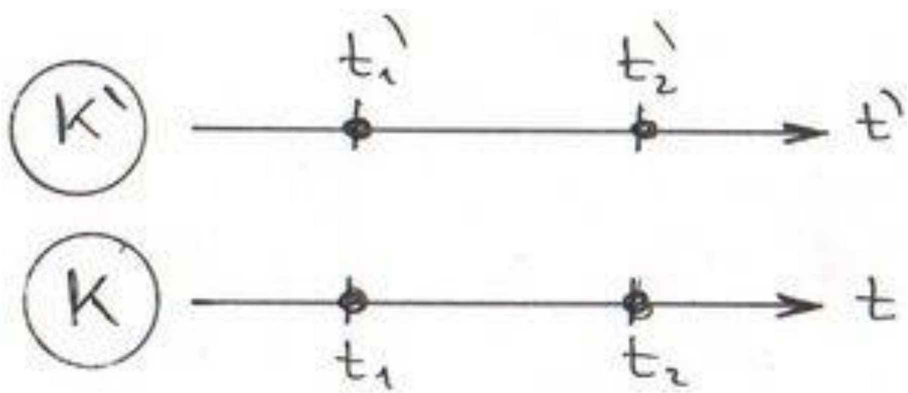
Az ok-okozat sorrend megfordulhat-e a másik koordinátarendszerből nézve?

$$\text{(B)}\;\; \Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right) \longrightarrow \Delta t' = \Gamma \Delta t\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

$$\text{Ha } \Delta t' < 0 \;\rightarrow\; \left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) < 0 \;\rightarrow\; c^2 < u\frac{\Delta x}{\Delta t}$$ ellentmondás

Az ok-okozat sorrend (kauzalitás) nem cserélődhet fel!

A sebességek relativisztikus összegződése



Láttuk:

$$\text{(C)}\quad \Delta x = \Gamma(\Delta x' + u\Delta t')$$

$$\text{(D)}\quad \Delta t = \Gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$$

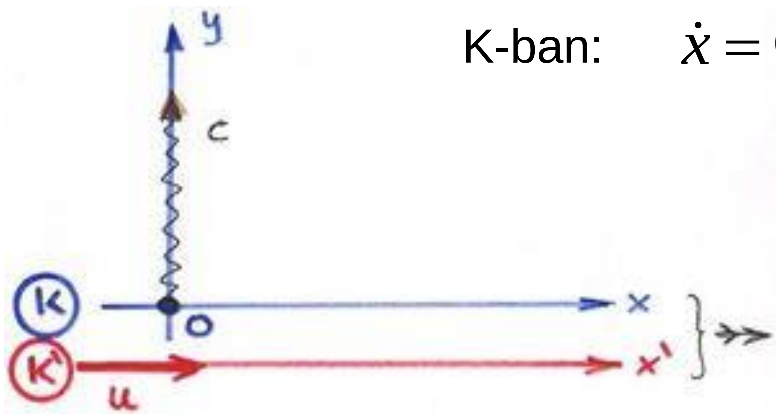
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Gamma(\Delta x' + u\Delta t')}{\Gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)} \longrightarrow \boxed{v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{u v_x'}{c^2}}}$$

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)} = \frac{v_y'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u v_x'}{c^2}}$$

és

$$v_z = \frac{v_z'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u v_x'}{c^2}}$$

Példa a sebesség-összeadásra I.



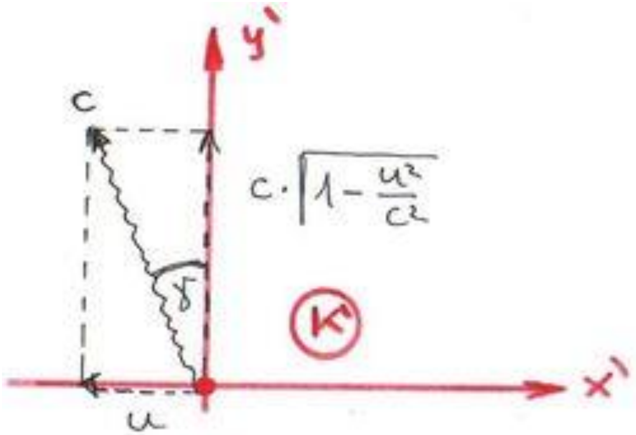
K-ban: $\dot{x}=0 \quad \dot{y}=c$

$$\dot{x}'=\frac{\dot{x}-u}{1-\frac{u\dot{x}}{c^2}}$$

$$\dot{y}'=\frac{\dot{y}}{\Gamma\left(1-\frac{u\dot{x}}{c^2}\right)}=\frac{c}{\Gamma}=c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$c'^2=u^2+c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=c^2$$

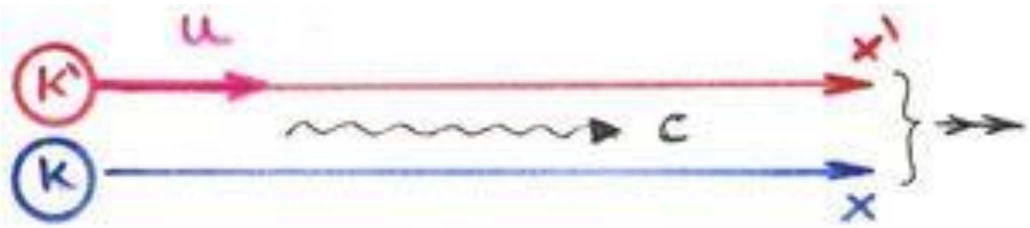
A fény a mozgó rendszerben is **c** sebességgel terjed, de az iránya egy kissé megváltozik.



Példa a sebesség-összeadásra II.

Indítsunk el egy fénysugarat a mozgó rendszer tengelye mentén.

$$\dot{x}' = c$$

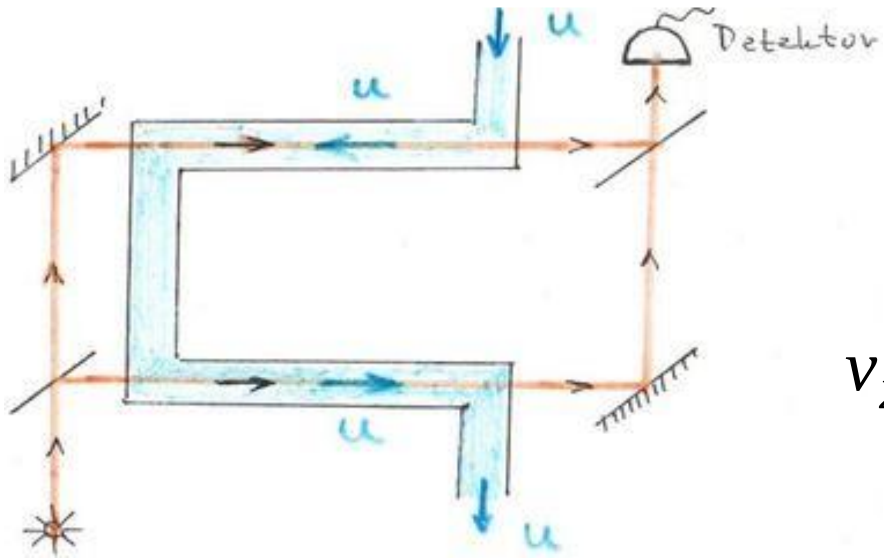


$$\dot{x} = \frac{\dot{x}' + u}{1 + \frac{u\dot{x}'}{c^2}} = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c}} = c$$

Példa a sebesség-összeadásra III.

Hippolyte Fizeau (1851)

Fény mozgása áramló folyadékban



$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u v'_x}{c^2}} \quad \text{, de} \quad \frac{u v'_x}{c^2} << 1$$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u v'_x}{c^2}} \approx (v'_x + u)\left(1 - \frac{u v'_x}{c^2}\right)$$

$$v_x \approx v'_x + u - \frac{u v'^2_x}{c^2} - \frac{u^2 v'_x}{c^2} \approx v'_x + u - \frac{u v'^2_x}{c^2}$$

$$v'_x = \frac{c}{n}$$

$$v_x \approx \frac{c}{n} + u - \frac{u}{n^2} = \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Fizeau mérési eredménye