1. Feladatok munkavégzés és konzervatív erőterek tárgyköréből. Munkatétel

Munkavégzés, teljesítmény

1.1. Feladat: (HN 6B-8) **Órai kidolgozásra 1. feladat** Egy rúgót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

Megoldás: Két megnyúlás van. Az első $\Delta l = l_1 - l_0 = 10$ cm, amelyre felírható, hogy

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \tag{1.1.1}$$

Innen a k rugóállandó értéke kifejezhető

$$k = \frac{2W}{(\Delta l)^2} = 800\,\mathrm{N/m}. \tag{1.1.2}$$

A további $l_2 = 10$ cm nyújtáshoz szükséges munkavégzés

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(l_2 + \Delta l)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 12\,\mathrm{J}. \tag{1.1.3}$$

1.2. Feladat: (HN 6B-10) Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az $F = -kx^3$ törvény szerint változik, ahol $k = 200$ N/m^3. Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

Megoldás: A rugó végét $F'(x) = kx^3$ erővel kell húznunk, így a munka definíciója alapján az általunk végzett munka:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx = \int_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} kx^3\,dx = \left[\frac{1}{4}kx^4\right]_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} = 0,4\mathrm{J} \tag{1.2.1}$$

integrállal számolható ki.

1.3. Feladat: (HN 6B-27) * A 200 N súlyú gyerek nyugalmi helyzetben lévő, 3 m-es kötelű hintán ül. A gyerek barátja húzza oldalra, hogy a hinta kötele 36^0-os szöget alkosson a függőlegessel. Határozzuk meg mekkora munkára volt ehhez szükség! A feladatot a munka definíciójának felhasználásával oldja meg!

Megoldás: Jelölje K a kötélerőt, α a kötél függőlegessel bezárt szögét, m a gyerek tömegét. Első lépésként azt a szögfüggő erőt kell meghatározni, amellyel a barátja F erővel vízszintes irányban húzza. Mivel egyensúlyi állapotokon keresztüli mozgásról van szó az erőkre felírhatjuk, hogy a függőleges komponensekre

$$K\cos\alpha = mg, \tag{1.3.1}$$

a vízszintes komponensekre

$$K\sin\alpha = F. \tag{1.3.2}$$

Innen az F erő:

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{1.3.3}$$

A vízszintes irányú elmozdulás két szöghöz $\alpha+\mathrm{d}\alpha$ és az α szögekhez tartozó tartozó x koordináták különbsége, azaz

$$\mathrm{d}x = l\sin(\alpha+\mathrm{d}\alpha) - l\sin\alpha = l\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha, \tag{1.3.4}$$

ahol felhasználtuk, hogy kis szögekre érvényesek a

$$\cos(\mathrm{d}\alpha) = 1, \tag{1.3.5}$$

$$\sin(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}\alpha \tag{1.3.6}$$

közelítések. Az elemi munka kifejezése

$$\mathrm{d}W = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot l\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = mgl\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha. \tag{1.3.7}$$

amellyel a teljes végzett munka:

$$W = \int_0^\alpha mgl\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = mgl(1-\cos\alpha). \tag{1.3.8}$$

1.4. Feladat: (HN 6B-39) **Órai kidolgozásra 2. feladat** Egy 48 km/h sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

Megoldás: A teljesítmény

$$P = \frac{dW}{dt}, \tag{1.4.1}$$

ahol a dW elemi munka

$$dW = \mathbf{F}\,d\mathbf{r}. \tag{1.4.2}$$

Ezt behelyettesítve a teljesítmény

$$P = \mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = 12000\,\mathrm{W}. \tag{1.4.3}$$

1.5. Feladat: (HN 6C-57) Egy testet a koordinátarendszer origójából egyenes vonalban állandó $\mathbf{F} = f_1\hat{\mathbf{x}} + f_2\hat{\mathbf{y}}$ ($f_1 = 2$N; $f_2 = 4$N) erővel az $\mathbf{r} = s_1\hat{\mathbf{x}} + s_2\hat{\mathbf{y}}$ ($s_1 = 1$m; $s_2 = 5$m) helyre viszünk. (Az egyenesvonalú egyenletes mozgás fenntartásához természetesen egyéb kényszererők is fellépnek.) Határozzuk meg az $\mathbf{F}$ erő munkáját

(a) közvetlenül az $\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$ skaláris szorzattal,

(b) az $|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$ szorzattal!

Megoldás:

(a) A munkát a skaláris szorzattal számolva

$$W = f_1 s_1 + f_2 s_2 = 22\,\mathrm{J} \tag{1.5.1}$$

adódik.

(b) Az erő nagysága $|\mathbf{F}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{20}$ N, míg az elmozdulás nagysága $|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{26}$ m. A két vektor által bezárt szög

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}}{|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|} = \frac{22}{\sqrt{20}\sqrt{26}}. \tag{1.5.2}$$

A kiszámolt értékeket összeszorozva $W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta = 22$ J.

1.6. Feladat: (HN 6C-58) **Órai kidolgozásra 3. feladat** Egy fiú a $m_0 = 3$ kg tömegű, $l_0 = 2$ m hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy a másik vége éppen a leér a földre.

(a) Határozzuk meg, hogy miként változik a gyerek által kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel s távolsággal lejjebb ereszti!

(b) A $W = \sum_i \mathbf{F}_i\Delta\mathbf{s}_i$ összegzés vagy a $W = \int \mathbf{F}d\mathbf{s}$ integrál felhasználásával számítsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez, míg a teljes láncot a földre ereszti!

Megoldás:

(a) Jelölje $\lambda = \frac{m_0}{l_0}$ a hosszegységenkénti tömeget. Az s távolsággal lejjebb eresztett lánc azon részének tömege, amelyet még tartani kell:

$$m(s) = m_0 - \lambda s = m_0 - \frac{m_0}{l_0}s. \tag{1.6.1}$$

Az ehhez szükséges erő:

$$F(s) = \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0}s\right)g, \tag{1.6.2}$$

amely felfele mutat.

(b) (α) A gyerek által végzett munka a görbe alatti terület kiszámolásával. Mivel az $F(s)$ erő az s távolság lineáris függvénye, így az $F(s)$ egyenes, valamint az x és az y tengely által határolt derékszögű háromszög területét kell kiszámolni. A háromszög alapja l_0, a magassága $F(s=0) = m_0 g$, így a terület $\frac{1}{2}m_0 g l_0$. Figyelembe véve, hogy az elmozdulás a ható erővel ellentétes előjelű a végzett munka:

$$W = -\frac{1}{2}m_0 g l_0. \tag{1.6.3}$$

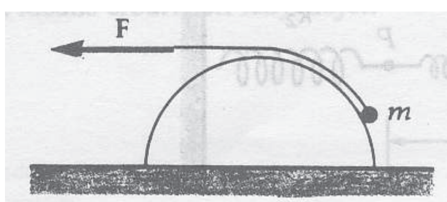
(β) A gyerek által végzett munka integrállal:

$$W = -\int_0^{l_0} F(s)\,ds = -\int_0^{l_0}\left(m_0 - \frac{m_0}{l_0}s\right)g\,ds = -\frac{1}{2}m_0 g l_0. \tag{1.6.4}$$

1.7. Feladat: (HN 6C-59) * A 1. ábrán látható súrlódásmentes félhenger aljáról a tetejére húzunk fel egy m tömegű testet a henger tetején átvetett kötél segítségével.

(a) Határozzuk meg a kötélerőt a hely függvényében!

(b) Az $\int \mathbf{F}d\mathbf{s}$ integrál segítségével határozzuk meg azt a munkát, ami a testnek a henger aljáról a tetejéig való egyenletes sebességű felhúzásához szükséges! A henger sugara R.



1. ábra.

Megoldás:

(a) Jelölje φ a tömegponthoz húzott sugár és az x tengely által bezárt szöget. Az mg súlyerő mindig y irányú, az ébredő N támaszerő kifele mutató radiális irányú, a K kötélerő érintő irányú. Így v sebességű mozgatás esetén a radiális komponensekre az

$$ma_{cp} = m\frac{v^2}{R} = mg\sin\varphi - N, \tag{1.7.1}$$

míg az erintő irányú komponensekre az

$$ma_t = K - mg\cos\varphi \tag{1.7.2}$$

összefüggések állnak fenn.

(α) Amennyiben a v sebesség állandó, azaz az a_t tangenciális gyorsulás zérus, így az utóbbi egyenletből a kötélerő:

$$K(\varphi) = mg\cos\varphi. \tag{1.7.3}$$

(β) Ha a tangenciális gyorsulás nem zérus $a = \frac{dv}{dt} \neq 0$, úgy a kötélerő

$$K(\varphi) = mg\cos\varphi + ma_t = mg\cos\varphi + m\frac{dv}{dt} \tag{1.7.4}$$

(b) Az elmozdulás a henger felületén (a keresztmetszetet tekintve a kör kerületén) lehetséges, amely kis dφ szög esetén

$$ds = R\mathrm{d}\varphi. \tag{1.7.5}$$

A végzett munkát a $W = \int F_s \mathrm{d}s$ definíció alapján számoljuk.

(α) Abban az esetben amikor egyenletes mozgást feltételünk a

$$W = \int_0^{90^0} K(\varphi)R\mathrm{d}\varphi = \int_0^{90^0} mgR\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = mgR, \tag{1.7.6}$$

integrál adja. Ez az eredmény várható volt, hiszen ez a helyzeti energia megváltozását adja.

(β) Ha figyelembe vesszük, hogy a sebesség nem feltétlenül állandó, akkor a végzett munka a (1.7.4) második tagjának integráltjával

$$W' = \int m\frac{dv}{dt}\mathrm{d}s \tag{1.7.7}$$

több. Mivel d$s = v$dt, így

$$W' = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}v\mathrm{d}t = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \tag{1.7.8}$$

ahol t_1 a kezdeti, t_2 a végső időpont, míg v_1 a kezdő-, v_2 a végsebesség. Így az összes végzett munka a nem egyenletes sebességű esetben

$$W = mgR + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{1.7.9}$$

1.8. Feladat: (HN 6C-73) * A 4 kg tömegű, nyugalomban lévő testet a rá ható változó erő az $x = 2t - 3t^2 + t^3$ függvény szerint mozgat. (Az x-et méterben, a t-t másodpercben mérjük.) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez ez az erő a mozgás első három másodpercében!

Megoldás: A test sebessége, mint az idő függvénye:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2 - 6t + 3t^2. \tag{1.8.1}$$

A 3. másodpercben a sebesség $v(3\mathrm{s}) = 11$ m/s. A végzett munka – figyelembe véve, hogy a test nyugalomból indult –

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = 242\,\mathrm{J}. \tag{1.8.2}$$

1.9. Feladat: (HN 6C-75) Az m tömegű test a nehézségi erő hatására szabadon esik. Mutassuk meg, hogy h távolság megtétele alatt a nehézségi erő átlagos teljesítménye: $P_{\text{átl}} = m\sqrt{g^3h/2}$!

Megoldás: Az eső test sebessége $v = gt$, kinetikus energiája

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2. \tag{1.9.1}$$

A h magasságból történő eséshez tartozó idő $t = \sqrt{2h/g}$. A teljesítmény – a behelyettesítések elvégzése után –

$$P = \frac{E}{t} = m\sqrt{\frac{g^3h}{2}}. \tag{1.9.2}$$

Ez igazolja a feladat állítását.

Munkatétel

1.10. Feladat: (HN 6B-23) A 2. ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes 27 N nagyságú erővel tolunk fel egy 20^0-os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180.

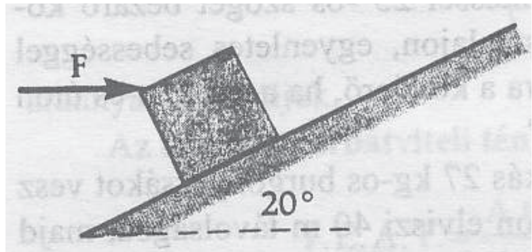
(a) Mekkora a test gyorsulása?

(b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé!

(c) Válaszoljunk a (b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $F = 27$ N; $\alpha 20^0$ és $\mu = 0,180$.

(a) A mozgásegyenletek felírásához bontsuk fel az F erőt lejtőirányú, felfele mutató ($F\cos\alpha$)



2. ábra.

és lejtőre merőlegesen lefele mutató ($F \sin\alpha$) komponensekre. A felfele mozdulást pozitív előjelűnek tekintve a lejtő irányú mozgásegyenlet

$$ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N. \tag{1.10.1}$$

A N támaszerő a

$$0 = N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha \tag{1.10.2}$$

egyenletből fejezhető ki. A két egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{m} - g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 6{,}74\,\mathrm{m/s^2}. \tag{1.10.3}$$

(b) Az s út megtétele utáni sebesség

$$v = \sqrt{2sa} = 6{,}36\,\mathrm{m/s}. \tag{1.10.4}$$

(c) A testre ható lejtőirányú (felfele mutató) eredő erő

$$F' = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{1.10.5}$$

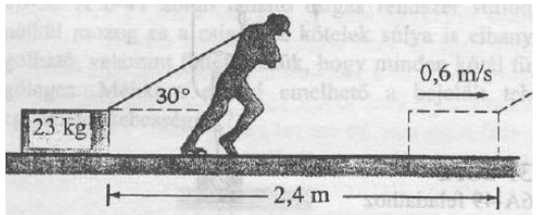
amelynek munkája változtatja meg a test mozgási energiáját

$$\frac{1}{2}mv^2 = F's = (F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)\,s. \tag{1.10.6}$$

Innen a v sebesség

$$v = 6{,}36\,\mathrm{m/s}. \tag{1.10.7}$$

1.11. Feladat: (HN 6B-28) **Órai kidolgozásra 4. feladat** A 3. ábrán látható ember nyugalmi helyzetből indulva 2,4 m távolságra húz el egy 23 kg-os ládát az érdes ($\mu = 0{,}5$) padlón. A láda végsebessége 0,6 m/s. A munkatétel alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt



3. ábra.

fejtett ki az ember?

Megoldás: A testre ható erő – ez végzi a gyorsítást – vízszintes komponense:

$$F\cos\alpha - \mu N, \tag{1.11.1}$$

ahol N az asztaltól a testre ható támaszerő:

$$N = mg - F\sin\alpha. \tag{1.11.2}$$

A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W, \tag{1.11.3}$$

ahol W a testen végzett munka, v_1 a kezdeti, v_2 végsebesség. A munka kifejezése most

$$W = (F\cos\alpha - \mu N)s, \tag{1.11.4}$$

ahol az $s = 2,4$ m a megtett út. Figyelembe véve, hogy $v_1 = 0$, a fenti kifejezésekből a hatóerőre

$$F = \frac{\mu mgs + \frac{1}{2}mv_2^2}{s(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = 104,6\mathrm{N} \tag{1.11.5}$$

adódik.

1.12. Feladat: (HN 8B-29) Egy 5 g tömegű 700 m/s sebességű golyó behatol egy rögzített fakockába és megáll benne. Tegyük fel, hogy a fakocka $8\cdot10^3$ N nagyságú állandó erőt fejt ki a golyóra, míg az meg nem áll. Határozzuk meg

(a) mennyi idő alatt áll meg a golyó?

(b) milyen mélyen hatol be a fába?

(c) mennyi munkát végez a fakocka, amíg a golyó meg nem áll?

(d) mennyivel változik meg a golyó mozgási energiája?

Megoldás: A koordinátarendszer tengelye mutasson balról jobbra. Jelöljük az adatokat: $m = 5$ g;

$v_0 = 700$ m/s (tételezzük fel, hogy a golyó balról jobbra halad) és így $F = -8 \cdot 10^3$ N.
(a) Először a golyó gyorsulását számoljuk, amely

$$a = \frac{F}{m} = -1,6 \cdot 10^6 \,\mathrm{m/s^2}. \tag{1.12.1}$$

A megállásig eltelt idő a $v(t) = 0 = at + v_0$ összefüggésből

$$t = \frac{v_0}{-a} = 4,375 \cdot 10^{-4} \,\mathrm{s}. \tag{1.12.2}$$

(b) A kiszámolt adatok felhasználásával a megtett út

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0,153 \,\mathrm{m}. \tag{1.12.3}$$

(c) A fakocka által végzett munka

$$W = F \cdot s = -1225 \,\mathrm{J}. \tag{1.12.4}$$

(d) A golyó kinetikus energiájának megváltozása

$$\Delta E_k = W = -1225 \,\mathrm{J}. \tag{1.12.5}$$

1.13. Feladat: A d vastagságú deszkába m tömegű v_0 sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék v sebessége, ha
(a) a deszkában állandó a ható F erő,
(b) a deszkában a behatolási mélységtől függő $F(x) = cx^2$ erő fékezi? (A c konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W, \tag{1.13.1}$$

ahol W a testen végzett munka. Ami az a, esetben:

$$W = -Fd, \tag{1.13.2}$$

és a b, esetben:

$$W = -\int_0^d cx^2 dx = -\frac{1}{3} c d^3. \tag{1.13.3}$$

Ezekkel a sebességek: a,

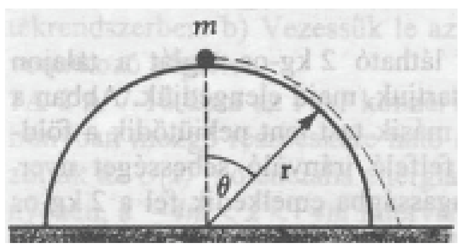
$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - Fd\right)}, \tag{1.13.4}$$

és b,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{3}cd^3\right)}. \tag{1.13.5}$$

Munkavégzés konzervatív erőtérben. Potenciális energia

1.14. Feladat: (HN 7B-18) **Órai kidolgozásra 5. feladat** Egy kicsiny, m tömegű test a sima, r sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetéből kissé kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. Mekkora a függőlegessel bezárt szög , amikor a test elhagyja a gömb



4. ábra.

felszínét?

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen a félgömb alján. Így a helyzeti energia mozgás kezdetén $E_{p_1} = mgr$, a kinetikus energia $E_{k_1} = 0$ mivel a test áll. A felülettől történő elválás pillanatában: $E_{p_2} = mgr\cos\theta$, a mozgási energia $E_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2$. A mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, így a mechanikai energia megmaradó mennyiség, azaz írhatjuk:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \tag{1.14.1}$$

Behelyettesítés után:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta. \tag{1.14.2}$$

A körmozgás feltétele:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\theta - N, \tag{1.14.3}$$

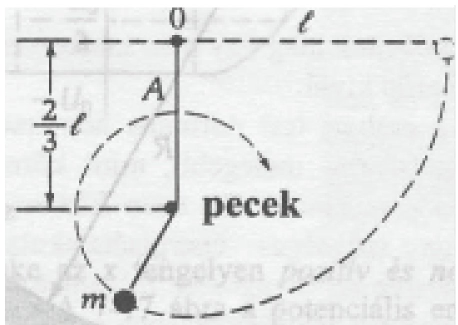
ahol a jobboldal első tagja a súlyerő radiális komponense, az N a támaszerő. Az elválás pillanatában:

$$N = 0. \tag{1.14.4}$$

Az egyenletek megoldása:

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \theta = 48^0. \tag{1.14.5}$$

1.15. Feladat: (HN 7B-21) Egy m tömegű testet l hosszúságú kötélre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. Az O felfüggesztési ponttól $2/3l$ távolságban kicsiny pöcköt helyeztünk el, melybe a kötél lengése során beakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy $1/3l$ sugarú függőleges körpályára tér át. Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az A pontban,



5. ábra.

ami a pöcök elérése utáni legmagasabb helye a testnek!

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen az A pont magasságában. Így a mechanikai energia megmaradás tétele miatt egyszerűen

$$mg\frac{1}{3}l = \frac{1}{2}mv^2. \tag{1.15.1}$$

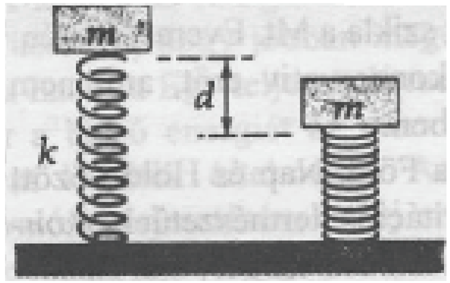
Másrészt a pecek körüli körmozgásra az A pontban az

$$m\frac{v^2}{\frac{1}{3}l} = K + mg \tag{1.15.2}$$

összefüggés írható, ahol K a kötélerő. A két egyenletből

$$K = mg. \tag{1.15.3}$$

1.16. Feladat: (HN 7A-10) **Órai kidolgozásra 6. feladat** Egy m tömegű tégla úgy van felerősítve, hogy a k rugóállandójú rugót éppen csak érinti. A téglát ekkor elengedjük nyugalmi helyzetéből. Határozzuk meg, hogy milyen d távolságra jut el a tégla az elengedés után!



6. ábra.

Megoldás: Mivel a mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, a mechanikai energia megmarad. Azaz a kezdeti kinetikus energia E_{k_1} és potenciális energia E_{p_1} összege egyenlő a tekintett mozgás végi kinetikus E_{k_2} és potenciális energia E_{p_2} összegével:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \tag{1.16.1}$$

Mivel a test kezdetben és az alsó helyzetben is áll, így $E_{k_1} = 0$ és $E_{k_2} = 0$. A helyzeti energia zérus pontját a talajra helyezve $E_{p_1} = mgh$, ahol h a tégla talajtól való távolsága. Az E_{p_2} a tégla alsó helyzethez tartozó helyzeti energiájából és a rugalmas energiából áll, azaz $E_{p_2} = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2$. A fenti egyenletbe helyettesítve:

$$mgh = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2. \tag{1.16.2}$$

Ebből a d összenyomódás mértéke:

$$d = \frac{2mg}{k}. \tag{1.16.3}$$

(*Megjegyzés:* Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha pl. a felső helyzetet választjuk a potenciális energia zérus pontjának.)

1.17. Feladat: A völgy fölött h magasságban átvezető viaduktról gumiköteleken ugrálnak alá (bungee jumping). Milyen L hosszúságúnak válassza az m tömegű ugró a k direkció erejű gumikötelet, hogy a talajt éppen érintse? (Az ugró kiterjedése legyen pontszerű.)

Megoldás: Az ugró a mozgás elején és a talaj érintése pillanatában áll, így mozgási energiája mindkét esetben zérus. Így a kezdeti mgh helyzeti energia – a völgy alját zérus szintnek véve – a gumikötélben tárolódó rugalmas energiává alakul, azaz:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-L)^2. \tag{1.17.1}$$

Itt a $h-L$ a gumikötél megnyúlása. Az egyenlet megoldása:

$$L = h \pm \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \tag{1.17.2}$$

Innen a fizikailag értelmes megoldás, így a kezdeti (beállítandó) hossz:

$$L = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \tag{1.17.3}$$

1.18. Feladat: * Az m_0 tömegű l_0 hosszúságú lánc a földön hever. A végét elkezdjük állandó v_0 sebességgel emelni. a, Mekkora erőt kell ehhez kifejteni? b, Mekkora a végzett összes munka, amikor a kötél vége éppen elhagyja a talajt?

Megoldás: a, Tekintsük a közbenső t időpontot, amikor már v_0t hossz felemelkedett és v_0 sebességű. E pillanatban az m tömegű darabnak a helyzeti energiája:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}mgh = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_0}{l_0}v_0t}_{m}\,g\,\underbrace{v_0t}_{h} \tag{1.18.1}$$

tömegű darabra. Másrészt ennek az m tömegű darabnak a kinetikus energiája:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0tv_0^2. \tag{1.18.2}$$

A teljes energia:

$$E(t) = \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0^2t^2g + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0^3t, \tag{1.18.3}$$

amelyből a $P(t)$ teljesítmény:

$$P(t) = \frac{dE}{dt} = \frac{m_0}{l_0}v_0^2tg + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0^3. \tag{1.18.4}$$

A $P(t) = F\,v$ összefüggésből a láncra

$$F(t) = \frac{P(t)}{v_0} = \frac{m_0}{l_0}v_0gt + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0^2 \tag{1.18.5}$$

erővel kell hatni. b, A végzett munka egyszerűen kiszámolható úgy, hogy a lánc tömegközéppontja $\frac{l_0}{2}$ magasságra emelkedett, másrészt a lánc sebessége v_0. A helyzeti energiája $\frac{m_0gl_0}{2}$, a mozgási energiája $\frac{1}{2}m_0v_0^2$, azaz

$$W = \frac{m_0gl_0}{2} + \frac{1}{2}m_0v_0^2. \tag{1.18.6}$$

Megjegyzés: E munka a következőképpen is kiszámolható. A felemeléshez szükséges idő: $t_f = \frac{l_0}{v_0}$. A munka $W = \int F\,dx = \int F\,v\,dt$ alapján:

$$W = \int_0^{\frac{l_0}{v_0}} \left(\frac{m_0}{l_0}v_0gt + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0}v_0^2\right)v_0dt = \frac{m_0gl_0}{2} + \frac{1}{2}m_0v_0^2. \tag{1.18.7}$$

Energiatétel

1.19. Feladat: Egy 60 kg-os láda 4 m magasról lecsúszik egy a vízszintessel 30^0-os szöget bezáró lejtőn. Mekkora a súrlódási erő munkája ezalatt, ha a láda 5 m/s sebességet ér el?

Megoldás: Jelölések: $m = 60$ kg, $h = 4$ m, $\alpha = 30^0$ és $v = 5$ m/s. A mechanikai energia megmaradást "elrontó" disszipatív erő munkáját a következőképpen tudjuk figyelembe venni:

$$U_{p_2} + E_{k_2} = U_{p_1} + E_{k_1} + W, \tag{1.19.1}$$

ahol végső potenciális és kinetikus energiát összegét (mechanikai energia) úgy kapjuk, hogy a kezdeti potenciális és kinetikus energiához hozzáadjuk a súrlódási végzett munkát. Mivel a kezdeti mechanikai energia nagyobb mint a végső, biztosak lehetünk benne, hogy W negatív. A potenciális energia zérus szintjét a lejtő aljára a jelen esetre a következő egyenlet írható:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + W. \tag{1.19.2}$$

Az adatok behelyettesítése után

$$W = -1650\,\mathrm{J}. \tag{1.19.3}$$

1.20. Feladat: Az α hajlásszögű, μ súrlódási együtthatójú lejtő alján felfelé lökünk v_0 sebességgel egy m tömegű testet. A test a mozgás tetőpontját elérve visszacsúszik. Mekkora lesz a sebessége a lejtő alján? A feladatot oldjuk meg a
(a) dinamikai egyenletek megoldásával és
(b) az energiatétel felhasználásával!

Megoldás:
(a) A felfele mozgásnál legyen a koordinátatengely irányítása pozitív a felfele irányban. Ekkor a test lejtőirányú mozgásegyenlete

$$ma_{fel} = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{1.20.1}$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{fel} = -g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \tag{1.20.2}$$

A felfele mozgás ideje a $0 = v_0 + a_{fel}t$ egyenletből

$$t_{fel} = \frac{v_0}{-a_{fel}}, \tag{1.20.3}$$

amellyel a idő alatt a megtett út

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{1.20.4}$$

A lefele csúszásnál fordítsuk meg a koordinátatengelyt, a pozitív irányítás mutasson lefele. Ekkor a mozgásegyenlet

$$ma_{le} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{1.20.5}$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{le} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \tag{1.20.6}$$

A lefele mozgás ideje a $v = a_{le}t$ egyenletből

$$t_{le} = \frac{v}{a_{le}}, \tag{1.20.7}$$

amely idő alatt a megtett s út

$$s = \frac{1}{2}a_{le}t^2 = \frac{v^2}{2a_{le}}. \tag{1.20.8}$$

E két egyenletből a sebesség a lejtő alján

$$v = \sqrt{2sa_{le}}. \tag{1.20.9}$$

Az s és a_{le} korábban kapott kifejezéseit behelyettesítve a sebességre a

$$v = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \tag{1.20.10}$$

eredmény adódik.

(b) Az energiatétel azt állítja, hogy a végső kinetikus és potenciális energia összege egyenlő a kezdeti kinetikus és potenciális energia összegével plusz a testen végzett munkával, azaz

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W. \tag{1.20.11}$$

A felfele mozgásnál $U_{p1} = 0$; $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2$; $U_{p2} = mgs\sin\alpha$; $E_{k2} = 0$ és $W = -\mu mgs\cos\alpha$. Egy egyenletbe összeírva

$$mgs\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgs\cos\alpha. \tag{1.20.12}$$

Ebből az s út

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{1.20.13}$$

A lefele csúszásnál

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W, \tag{1.20.14}$$

ahol $U_{p1} = mgs\sin\alpha$; $E_{k1} = 0$; $U_{p2} = 0$; $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$ és $W = -\mu mgs\cos\alpha$. Egy egyenletbe írva

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs\sin\alpha - \mu mgs\cos\alpha. \tag{1.20.15}$$

Az s utat a (1.20.13) egyenletből behelyettesítve a sebességre a fentiekkel egyező

$$v = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \tag{1.20.16}$$

eredményt kapjuk.

2. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből

Centrifugális erő

2.1. Feladat: (HN 13B-20) Egy népszerű vidámparki mutatványnál a látogatók egy függőleges tengely körül forgó henger belső falának támaszkodnak a 7. ábrának megfelelően. Ezután a padlót lesüllyesztik, és hagyják, hogy a látogatók a centrifugális erőtől a falhoz "odaszögezve" és a súrlódási erő következtében a lecsúszásztól védve a falon maradjanak. A henger R sugarának, az ω szögsebességnek és a g nehézségi gyorsulásának függvényében határozzuk meg azt a legkisebb μ nyugalmi súrlódási együtthatót, amely a lecsúszást megakadályozza. A feladatot forgó vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!

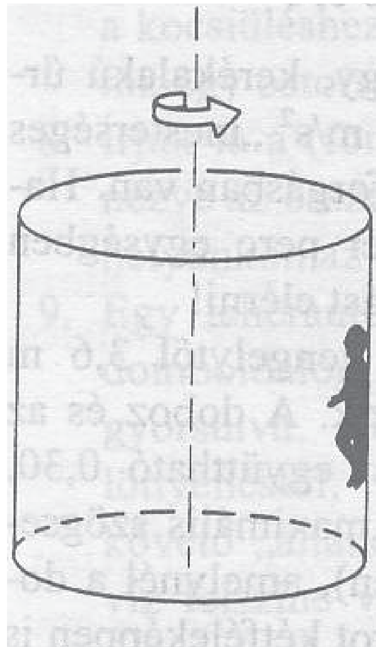
Megoldás: A forgó vonatkoztatási rendszerben a falhoz "odaszögezett" látogatóra négy erő hat. A centrifugális erő (tehetetlenségi erő), amely radiálisan kifelé mutat és nagysága $F_{cf} = mR\omega^2$. A falon radiálisan befelé mutat az N támaszerő, amelynek nagysága pontosan $mR\omega^2$. Függőlegesen lefelé hat az mg súlyerő, ezzel ellentétesen az F_s súrlódási erő, és a kettő egymással egyenlő. Az fentieket matematikalag összefoglalva:

$$mg = F_s = \mu N = \mu mR\omega^2, \tag{2.1.1}$$

ahonnan

$$\mu = \frac{g}{R\omega^2}. \tag{2.1.2}$$

2.2. Feladat: **Órai kidolgozásra 7. feladat** Egy $M = 1,499 \cdot 10^{25}$ kg tömegű, $R = 10000$ km sugarú bolygó északi sarkán $k = 100$ N/m direkciós erejű rugóra $m = 1$ kg tömegű testet lógatunk. A bolygó $\omega = 10^{-4}$ 1/s szögsebességgel forog.



7. ábra.

(a) Mekkora a rugó megnyúlása?

(b) Ezt követően a mérést az egyenlítőn megismételjük. Mennyi ekkor a rugó megnyúlása?

Megoldás:

(a) A bolygó északi sarkán végzett mérés során

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = k\Delta x, \tag{2.2.1}$$

ahol Δx a rugó megnyúlása, amely

$$\Delta x = \gamma \frac{mM}{kR^2} = 0,1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{mm}. \tag{2.2.2}$$

(b) Az egyenlítőn figyelembe kell vennünk a centrifugális erőt, amellyel az egyenlet úgy módosul, hogy

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - mR\omega^2 = k\Delta x'. \tag{2.2.3}$$

Innen a $\Delta x'$ megnyúlás

$$\Delta x' = \gamma \frac{mM}{kR^2} - \frac{mR\omega^2}{k} = 0,099\,\mathrm{m} = 99\,\mathrm{mm}, \tag{2.2.4}$$

azaz a rúgó megnyúlása 1 mm-rel kevesebb.

2.3. Feladat: (HN 14C-39) Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl középpontjától r távolságra lévő helyen h magasságból egy tárgyat ejtenek a padlóra. A mozgást a ringlispíl vonatkoztatási rendszeréből vizsgálva mutassuk meg, hogy az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság jó közelítéssel $\omega^2 rh/g$. Milyen feltételezésekkel kell élni a feladat megoldása során?

Megoldás: A tárgy

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{2.3.1}$$

idő alatt esik. A forgó vonatkoztatási rendszerben az

$$a_{cf} = r\omega^2 \tag{2.3.2}$$

centrifugális gyorsulása lesz, amely kifele mutató radiális irányú. E gyorsulással az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_{cf} (\Delta t)^2 = \frac{\omega^2 rh}{g}. \tag{2.3.3}$$

A forgás közbeni szögelfordulás

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t. \tag{2.3.4}$$

Ha azt tekintjük, hogy a test az álló rendszerből nézve érintő irányban $r\omega$ sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az elejtés után, akkor az ehhez tartozó elmozdulás

$$\Delta x = r\omega\Delta t. \tag{2.3.5}$$

Az ehhez az elmozduláshoz tartozó α központi szög

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{r} = \omega\Delta t. \tag{2.3.6}$$

Ahhoz, hogy φ és α közelítőleg megegyezzenek egymással, az $\omega\Delta t << 1$ feltétel teljesülése szükséges.

Coriolis-erő

2.4. Feladat: (HN 14C-30) **Órai kidolgozásra 8. feladat** Írjuk le, hogyan tudna egy személy a forgásban lévő ringlispíl lapján járni úgy, hogy a rá ható Coriolis-erő és a centrifugális erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú legyen! (A ringlispíl forogjon az óra járásával ellentétesen.)

Megoldás: Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl origótól való R távolságú pontjában a személyre radiális kifele mutató $F_{cf} = mR\omega^2$ centrifugális erő hat. Ahhoz, hogy a Coriolis-erő radiális befele mutató legyen, ahhoz az óra járásával egyezően, az R sugarú kör érintője irányában kell v sebességgel haladnia. A Coriolis erő nagysága $F_{Co} = 2m\omega v$. A kettő

$$F_{cf} = mR\omega^2 = 2m\omega v = F_{Co} \tag{2.4.1}$$

egyenlőségéből a sebességre a

$$v = \frac{R\omega}{2} \tag{2.4.2}$$

adódik.

2.5. Feladat: Egy forgótárcsa szélén álló ember eldob egy testet vízszintesen a függőleges forgástengely irányába 10 m/s kezdősebességgel. A tárcsa percenként 600-at fordul. Mekkora a tárcsa vonatkoztatási rendszerében a test pályájának kezdeti görbületi sugara?

Megoldás: Jelölések: v = 10 m/s és f = 600 1/perc = 10 1/s. A tárcsa szögsebessége $\omega = 2\pi f$ = 62,8 rad/s. A forgó rendszerben a testet a Coriolis-erő téríti el, amelyhez tartozó gyorsulás nagysága

$$a_{Co} = 2\omega v. \tag{2.5.1}$$

Az indulás pillanatában körpályán mozog a test, amely esetén gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{2.5.2}$$

A kettő egyenlőségéből a görbületi sugár

$$R = \frac{v}{2\omega} = 0,159\,\mathrm{m}. \tag{2.5.3}$$

2.6. Feladat: (HN 14C-33) A mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső a vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége 1,5 rad/s abban a pillanatban, amikor az 5 g tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből.

(a) A forgó rendszerben mekkora Coriolis-erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában?

(b) Milyen irányú ez az erő?

Megoldás: Jelölések: $\omega = 1,5$ rad/s; $m = 5$ g és $v = 500$ m/s.

(a) A puska csöve az óra járásának megfelelően fordul el, így az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor függőlegesen lefele mutat. A Coriolis-erő a $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor és a $\mathbf{v}$ sebességvektorokkal

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \tag{2.6.1}$$

amelynek nagysága – figyelembe véve, hogy $\boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{v}$ egymásra merőlegesek

$$F = 2m\omega v = 7,5\,\mathrm{N}. \tag{2.6.2}$$

(b) Az erő iránya jobbról balra mutat.

2.7. Feladat: (HN 14C-38) A percenként tízet forgó ringlispíl szélén álló kislány 10 m/s vízszintes kezdősebességgel labdát dob a forgástengely felé. Úgy látja, hogy a pályagörbe jobbra kanyarodik.
(a) Számítsuk ki a pályagörbe kezdeti vízszintes görbületi sugarát!
(b) Amikor a labdát dobó kislány a ringlispíl közepe felé néz, jobbra vagy balra látja elmozdulni a távoli tájat?

Megoldás: Jelölések: A fordulatszám $f = 10$ 1/perc $= 1/6$ 1/s, amellyel a szögsebesség $\omega = 2\pi f = 1,047$ rad/s; $v = 10$ m/s.
(a) A labda Coriolis-gyorsulása

$$a_{Co} = 2\omega v, \tag{2.7.1}$$

amely éppen az elkanyarodás

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{2.7.2}$$

gyorsulása. Itt r a pályagörbe görbületi sugara. A két gyorsulás egyenlőségéből

$$r = \frac{v}{2\omega} = 9,55\,\mathrm{m}. \tag{2.7.3}$$

(b) Mivel a pályagörbe jobbra kanyarodik, így a ringlispíl az óra járásával ellentétes irányban forog. Az ilyen irányban forgó rendszerből nézve a táj balról jobbra látszik mozogni.

2.8. Feladat: **Órai kidolgozásra 9. feladat** A Föld napi forgása következtében az eső testek kelet felé elhajlanak.
(a) Mekkora az Egyenlítőre szabadon eső test keleti irányú gyorsulása?

(b) Számítsuk ki, hogy a becsapódás pillanatában mekkora a keleti irányú sebessége annak a testnek, amely $h = 100$ m magasból esik szabadon az Egyenlítőre!

Megoldás:
(a) Az Egyenlítőn szabadon eső testnek a Coriolis-erő következményeként – figyelembe véve, hogy a Föld ω szögsebessége és a leeső test v sebessége egymásra merőleges –

$$a(t) = 2\omega v = 2\omega g t \tag{2.8.1}$$

keleti irányú gyorsulása van.
(b) A t időtartamú esés során az $a(t) = 2\omega g t$ egyenes alatti terület éppen a keleti irányú sebesség:

$$v(t) = \omega g t^2. \tag{2.8.2}$$

Más úton:

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t 2\omega g t\,\mathrm{d}t = \omega g t^2. \tag{2.8.3}$$

Az esés ideje 4,47 s, $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $g = 10$ m/s^2 adatokkal számolva:

$$v_{kelet} = 1.45 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s}. \tag{2.8.4}$$