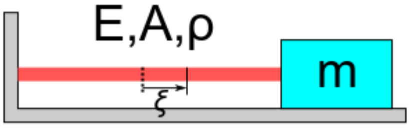
MECHANIKA 2	B) HF 06.

B 16.) feladat

Egy hajlékony húr lineáris tömegsűrűsége „ μ_0”, a húrt „F” erővel megfeszítettük. A húr nyugalomban a „z” tengelyen helyezkedik el. A feladat a húr transzverzális („x” és „y” irányú) mozgásainak vizsgálata. A rendszer Lagrange-sűrűsége két tagból áll, a mozgási energia sűrűségből, ill. a húr „ívhosszával” kifejezett potenciális energia tagból. (Lásd A11.) feladat!)
A kitérés most azonban két komponensű: $u_x(z,t)$ és $u_y(z,t)$.

a.) Írja fel a rendszer Lagrange-sűrűségét!
b.) Közelítse a Lagrange-sűrűségben szereplő gyökös kifejezést másodrendig! ($\partial_z u_i$ -kban negyedrendű tag jelenik meg!)
c.) Írja fel a rendszer mozgásegyenleteit!
d.) A Lagrange-sűrűség ismeretében határozza meg a $\pi_i(z,t)$ kanonikus impulzussűrűségeket!
e.) Határozza meg a rendszer Hamilton-sűrűségét!
f.) A $H = \int \mathcal{H}(z,t)dz$ Hamilton-funkcionál deriválásával írja fel a Hamilton-féle kanonikus egyenleteket!
g.) Mutassa meg, hogy a kanonikus egyenletek ekvivalensek a Lagrange-féle mozgásegyenletekkel!
h.) Adja meg a húr energiasűrűségének kifejezését, mint $\partial_t u_i$ és $\partial_z u_i$ függvényét!
i.) EXTRA! Adja meg az energia-áram kifejezését a modellben! Írja fel az energia kontinuitási egyenletét a modellben!

B 17.) feladat



Tekintsük az A12.) feladatban is látott elrendezést, amikor egy „m” tömegű téglát kötöttünk egy „E” Young-modulusú, „A” keresztmetszetű és „ρ” sűrűségű gumirúd végére. A rúd nyugalmi hossza „L”. A rúd hossziránya jelöli ki a „z” tengelyt.

A gumiszál pontjainak longitudinális kitérését jelölje $\xi(z,t)$, a tégla kitérését pedig $u(t)$.

A rendszer Lagrange-függvényét (funkcionálját) könnyen fel tudjuk írni:

$$L = \int_0^L dz\left(\frac{\rho A}{2}(\partial_t \xi)^2 - \frac{EA}{2}(\partial_z \xi)^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 .$$

Ha ebből az alakból naiv módon felírjuk a mozgásegyenleteket, nyilvánvalóan rossz eredményt kapunk, a tégla nem lesz a gumiszálhoz kötve. A $\xi(L,t) = u(t)$ kényszert ki kell rónunk!

a.) A Lagrange-függvény ismeretében írja fel a rendszer „S” hatás-funkcionálját! A kényszert egy Lagrange-multiplikátor segítségével vegye figyelembe!
b.) Írja fel a hatás δS variációját, amennyiben, ha a közeg ill. tégla kitérésének variációja $\delta u(t)$ és $\delta\xi(z,t)$.
c.) A szokásos módon, parciális integrálással érje el, hogy a hatás-funkcionálban ne jelenjenek meg a δu és $\delta\xi$ variációk deriváltjai! A $\delta\xi$ esetén vigyázzon a z = L-nél megjelenő peremtaggal!
d.) A legkisebb hatás elvét alkalmazva adja meg a rendszer mozgásegyenleteit! Ha jól számolt, az A12.) feladatban szereplő eredményt kellett kapnia.

B 18.) feladat

A gyakorlaton szerepelt az ún. sine-Gordon modell, ami egy igen speciális mechanikai rendszer (ingasor) folytonos határeseteként adódott. Mint kiderül, a modell ennél sokkal több helyen megjelenik, többek között a spinnel rendelkező kölcsönható részecskék egydimenziós kvantummodellje is a sine-Gordon modellre vezet. Az ilyen rendszerek vizsgálata az elmúlt évtizedekben sok fizikus érdeklődésének középpontjába került, mai napig igen „forró” terület.

Az idő, és hosszúságegyeségek megfelelő megválasztásával a rendszer Lagrange-sűrűsége az alábbi alakba írható:

$$\mathcal{L}(\varphi,\partial_t\varphi,\partial_x\varphi)=\frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2-\frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2+\cos(\varphi)-1.$$

a.) A Lagrange-sűrűség ismeretében vezesse le a rendszer mozgásegyenleteit!

b.) Keresse az egyenlet statikus megoldásait: Írja fel az időfüggetlen megoldásra vonatkozó differenciálegyenletet!

c.) Ha jól számolt, egy előjeltől eltekintve a matematikai inga mozgásegyenletével analóg differenciálegyenletet nyert. Mutassa meg, hogy ennek az egyenletnek lehetséges megoldása:

$$\varphi(x)=4\arctan(e^{x+\delta})\ ,$$

ahol δ valamilyen konstans.

d.) Adja meg a $\varphi(\pm\infty)$ határeseteket! Hányszor „csavarodik körbe” a φ-tér?

e.) EXTRA! Mutassa meg, hogy az a.)-ban kapott egyenlet (hasonlóan az előadáson szerepelt Klein-Gordon egyenlethez) Lorentz-invariáns! *(Az egyenletből látszik, hogy a fénysebesség a modellben $c = 1$.)*

A Lorentz-invarniancia bizonyításához mutassa meg, hogy feltéve $\varphi(x,t)$ megoldás, egy $v<c$ sebességű standard boost után nyert $\tilde{\varphi}(x,t)=\varphi\left(\tilde{x}(x,t),\tilde{t}(x,t)\right)$ függvény is megoldás. Itt $\tilde{x}(x,t)$ és $\tilde{t}(x,t)$ a megfelelő ($c = 1$) Lorentz-transzformációt jelölik.

f.) A c.) feladatban nyert statikus megoldás egy „álló” +1 csavarodású szoliton. Lorentz-transzformáció segítségével mutassa meg, hogy a „v” sebességgel a „+x” irányba haladó +1 csavarodású szoliton megoldás az alábbi alakú:

$$\varphi(x,t)=4\arctan\left(e^{\gamma(x-vt)+\delta}\right),$$

ahol $\gamma=\sqrt{1-v^2}$.

g.) A Lagrange-sűrűség ismeretében írja fel a rendszer energia-sűrűségét, mint φ, $\partial_t\varphi$ és $\partial_x\varphi$ függvényét!

h.) EXTRA! Az energia-sűrűség integrálásával adja meg egy „v” sebességgel haladó 1-csavarodású szoliton energiáját!

i.) EXTRA! A h.) feladat eredményét értelmezhetjük úgy, mintha a szoliton egy „relativisztikus” részecske volna. Mekkora a részecske tömege?