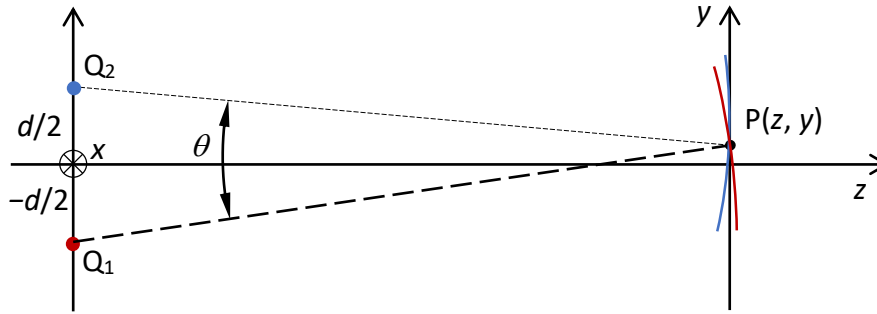


## 7. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2019-11-06

### Két gömbhullám interferenciája paraxiális közelítésben

Polarizáció: x-irányú, skalár közelítés.



$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (1)$$

$$E_{1,2} \equiv \frac{E_0}{R_{1,2}} e^{ikR_{1,2}} ; k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2)$$

$$\delta = kR_1 - kR_2 \quad (3)$$

$$R_1 = \sqrt{z^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + x^2} \quad (4)$$

$$R_2 = \sqrt{z^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2} \quad (5)$$

Feltevések:  $d, y, x \ll z$ . Emiatt (2) nevezőjében  $R \approx z$ , azaz  $I_1 \approx I_2$ . A fázis meghatározása:

$$R_1 = z \sqrt{1 + \left(\frac{y+d/2}{z}\right)^2 + \frac{x^2}{z^2}} \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{y+d/2}{z}\right)^2 + \frac{x^2}{z^2} \right] \right) = z + \frac{(y+d/2)^2}{2z} + \frac{x^2}{2z} \quad (6)$$

$$R_2 \approx z + \frac{(y-d/2)^2}{2z} + \frac{x^2}{2z} \quad (7)$$

$$\delta = k \left( \frac{(y+d/2)^2}{2z} - \frac{(y-d/2)^2}{2z} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2yd}{2z} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{yd}{z} \quad (8)$$

Megállapítás: nincs x-függés! Az interferenciacsíkok alakja ( $\delta = \text{const.}$ ):

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{yd}{z} \equiv m \cdot 2\pi ; m \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

$$y \approx m\lambda \frac{z}{d} = \frac{m\lambda}{\tan \theta} \approx \frac{m\lambda}{\theta} \quad (10)$$

Alkalmazás pl. Young-féle kétréses kísérlet (hullámfrontosztás), nyíró-interferométer (amplitúdóosztás).

## Fizeau-interferométer tárgyalása kéthullám interferenciával

Egy  $n$  törésmutatójú  $d$  vastagságú plánpárhuzal lemezről visszavert EM sugárzást kéthullám interferenciával közelíthetjük, ha a felületi reflektancia kicsi. Beeső síkhullám esetén a fáziskülönbség (ld. előadás):

$$\delta = k_0 \cdot 2nd \cdot \cos \theta + \pi \quad (11)$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots \quad (12)$$

Ha

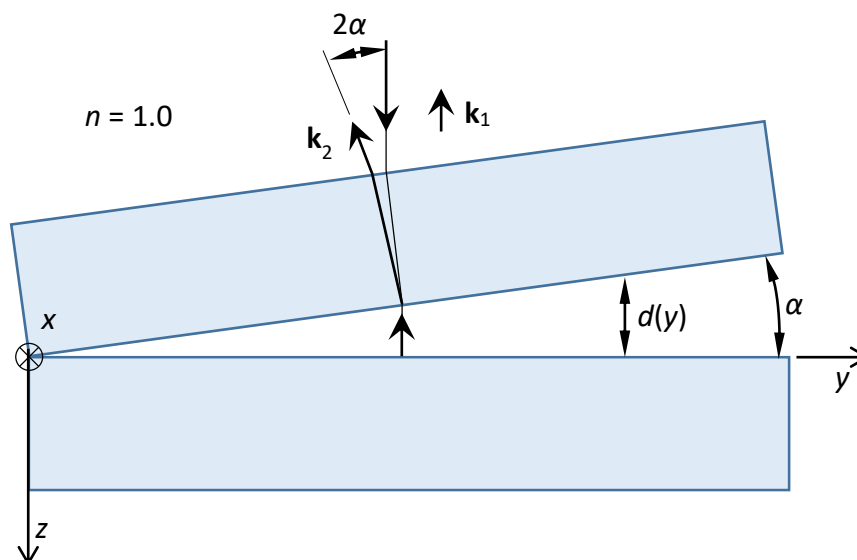
$$\frac{\theta^2}{2} \ll 1 \rightarrow |\theta| \ll \sqrt{2} \text{ rad} = 81^\circ \rightarrow \theta < 8^\circ \quad (13)$$

akkor  $\cos \theta \approx 1$ . Ezzel:

$$\delta \approx k_0 \cdot 2nd + \pi, \quad (14)$$

vagyis igen jó közelítéssel úgy számolhatunk, mintha a beesési szög zérus lenne.

A fenti struktúrában legyen  $n = 1.0$ , azaz levegő, az alsó és felső határfelületet pedig két síkpárhuzamos üveglap biztosítsa. Ha a lemezek közötti légrés vastagsága nem állandó, hanem kissé ékes (azaz lineárisan változik), akkor az ún. Fizeau-interferométerhez jutunk, ld. ábra.



a két felületről visszavert síkhullámok nem lesznek teljesen párhuzamosak egymással. Az előadáson ezt az esetet is megvizsgáltuk:

$$\delta = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \Delta\varphi \quad (15)$$

A felső üveglapon mindkét interferáló síkhullám egyaránt áthalad, emiatt az általa okozott fáziskülönbség konstans, így a vizsgálat szempontjából figyelmen kívül hagyhatjuk. Úgy is képzelhetjük, mintha a vastagsága közel nulla lenne. A különbségi vektor mindig az  $y$ - $z$  síkban marad, tehát  $x$ -függés itt sincs:

$$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = k_0((\sin 2\alpha)\hat{\mathbf{y}} - (1 - \cos 2\alpha)\hat{\mathbf{z}}), \quad (16)$$

Ha  $\alpha$  elegendően kicsi, a  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  vektor közel párhuzamos az  $y$ -iránnyal. A hiba vizsgálatának menete tehát tökéletesen analóg (13)-al, csak itt

$$2\alpha < 8^\circ, \text{ azaz } \alpha < 4^\circ \quad (17)$$

$$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \approx k_0(\sin 2\alpha)\hat{\mathbf{y}} \approx k_0 2\alpha \cdot \hat{\mathbf{y}} \quad (18)$$

Ha  $\mathbf{r} = y\hat{y}$ , akkor

$$\delta = k_0 2\alpha \cdot y + \Delta\varphi \quad (19)$$

Mivel ahol  $y = 0$  ott nulla az optikai úthosszkülönbség, vagyis ekkor  $\Delta\varphi = \pi$ , tehát:

$$\delta = k_0 2\alpha \cdot y + \pi \quad (20)$$

Az interferenciacsíkok helyzete:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2\alpha \cdot y + \pi = m \cdot 2\pi ; m \in \mathbb{N}^+ \quad (21)$$

$$y = \frac{m \cdot 2\pi - \pi}{2\alpha} \frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{2m-1}{4\alpha} \lambda_0 \quad (22)$$

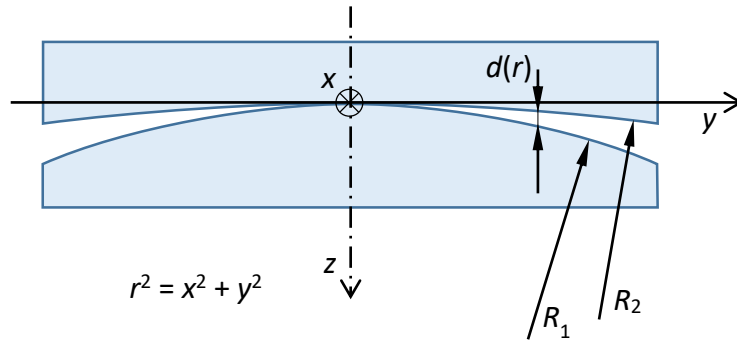
Mivel  $2\alpha$  igen kicsi, a következő összefüggés is megfigyelhető:

$$\alpha \approx \frac{d(y)}{y} \quad (23)$$

$$\delta(y) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2d(y) + \pi . \quad (24)$$

Alkalmazás: tipikusan felületalak mérés.

### Newton-gyűrűk tárgyalása kéthullám interferenciával



$$R_{1,2}^2 = r^2 + (z - R_{1,2})^2 \rightarrow z = R_{1,2} - \sqrt{R_{1,2}^2 - r^2} \quad (25)$$

Ha  $r \ll R_{1,2}$ , akkor (13) feltétel automatikusan teljesül, valamint (ld. Taylor-soros közelítés):

$$z \approx \frac{r^2}{2R_{1,2}} \quad (26)$$

$$d(r) = \frac{r^2}{2R_1} - \frac{r^2}{2R_2} = \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (27)$$

(17) feltétel teljesüléséhez a két felület által (lokálisan) bezárt szögnek kell kicsinek lennie:

$$\alpha \approx \frac{dd}{dr} = r \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) < 4^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = 0.07 \quad (28)$$

Mivel  $r \ll R_{1,2}$  ez is automatikusan teljesül. Nézzük meg a két legfontosabb, speciális esetet:

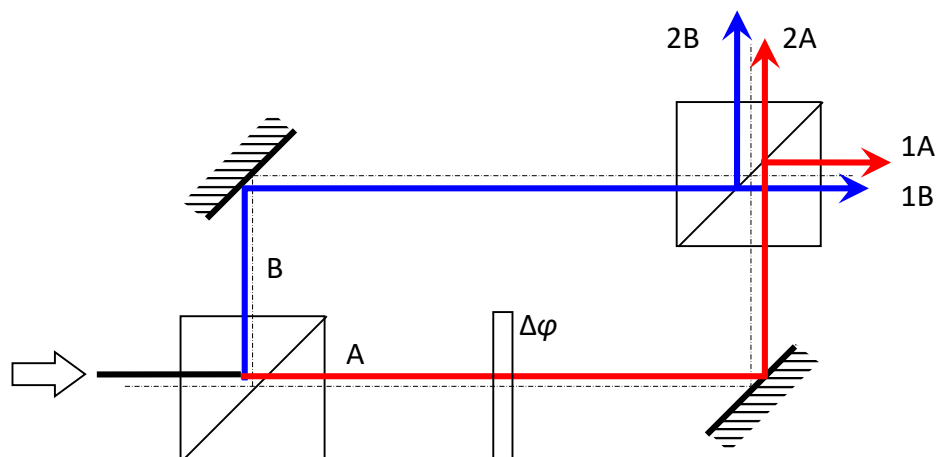
a) Ha  $R_1 \approx R_2$  és  $R_2 \equiv R_1 + \Delta R$ . Alkalmazás: próbaüveg optikai felületek teszteléséhez.

$$d(r) = \frac{r^2}{2} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \approx \frac{r^2 \Delta R}{2 R_1^2}. \quad (29)$$

b) Ha  $1/R_2 = 0$  megkapjuk a klasszikus Newton-gyűrűket:

$$d(r) = \frac{r^2}{2 R_1}. \quad (30)$$

## Mach-Zehnder interferometer tárgyalása kéthullám interferenciával



$$\delta_1 = \Phi_{1A} - \Phi_{1B} = \left(0 + \Delta\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (n \cdot d - 1.0 \cdot d) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (n - 1)d . \quad (31)$$

$$\delta_2 = \Phi_{2A} - \Phi_{2B} = (0 + \Delta\varphi + 0) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (n - 1)d - \pi . \quad (32)$$

Ez egyutas (single-pass) interferométer! Alkalmazás: gázok törésmutatójának mérése, optikai jelfeldolgozás, adattárolás.