Fizika feladatok - 2. gyakorlat

2014. szeptember 27.

0.1. Feladat: Órai kidolgozásra:
Mekkora az átlagsebessége annak pontnak, amely mozgásának első szakaszában v_1 sebességgel s_1 utat, második szakaszában v_2 sebességgel s_2 utat tesz meg?

Megoldás: Az átlagsebességet az összesen megtett útmennyiség és az ehhez szükséges teljes időtartam hányadosaként kapjuk meg: $\overline{v} = \frac{\sum_i s_i}{\sum_i t_i}$. Az eltelt időtartamok: $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$ és $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$. Így

$$\overline{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}. \tag{0.1.1}$$

0.2. Feladat: Két mozdony s_1 távolságból, egymáshoz képest v sebességgel közeledik egymás felé az egyenes vasúti pályán. Az egyik fényjelet ad, amely a szélvédőkről visszaverődik. Mekkora utat tesz meg a fény addig, amíg s_2 távolságra lesznek egymástól?

Megoldás: Az eltelt idő:

$$t = \frac{s_1 - s_2}{v}, \tag{0.2.1}$$

amely idő alatt a fény

$$s = ct = c\frac{s_1 - s_2}{v} \tag{0.2.2}$$

utat tesz meg.

0.3. Feladat: Egyenes vasúti pályán egy mozdony halad v sebességgel, s közben Δt ideig dudál. Milyen hosszúnak hallja a pálya mellett álló utas a dudaszót, ha a vonat nem halad el mellette?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a mozdony s távolságban van, amikor elkezd dudálni. A hangot

$$t_1 = \frac{s}{c} \tag{0.3.1}$$

idő elteltével hallja meg a megfigyelő. Ezt követően Δt idő múlva már csak $s - v\Delta t$ távolságban lesz a mozdony, amely ekkor befejezi a dudálást. A dudaszó vége a

$$t_2 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} \tag{0.3.2}$$

idő elteltével jut a megfigyelőhöz. A dudaszót a megfigyelő

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c - v}{c}\Delta t \tag{0.3.3}$$

hosszúnak hallja. *Megjegyzés:* Távolodó mozdony esetén a dudaszó

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s + v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c + v}{c}\Delta t \tag{0.3.4}$$

időtartamúnak hallatszik.

0.4. Feladat: Egy gépkocsi 54 km/h sebességről 5 m/s^2 lassulással egyenletesen lefékez. Mekkora a teljes fékút?

Megoldás: Jelölések: $v_0 = 54$ km/h $= 15$ m/s és $a = 5$ m/s^2. A sebesség, mint az idő függvénye

$$v(t) = v_0 - at, \tag{0.4.1}$$

amellyel a megállásig eltelt idő

$$t = \frac{a}{v_0} = 3 \text{ s}. \tag{0.4.2}$$

A teljes fékút

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 22,5 \text{ m}. \tag{0.4.3}$$

0.5. Feladat: Egy tömegpont az x tengely mentén mozog -4 m/s^2 állandó gyorsulással. Az $x = 0$ helyen a sebessége 20 m/s, az időt itt kezdjük mérni. Mikor lesz a test először az $x = 18$ m helyen?

Megoldás: Jelölések: $v_0 = 20$ m/s, $a = -4$ m/s^2. A tömegpont helye, mint az idő függvénye

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{0.5.1}$$

Ezt az egyenletet kell megoldani t-re az $x = 18$ m helyettesítés mellett:

$$18 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{0.5.2}$$

Az egyenlet gyökei: $t_1 = 1$ s és $t_2 = 9$ s, amelyek közül az első felel meg a kérdésnek.

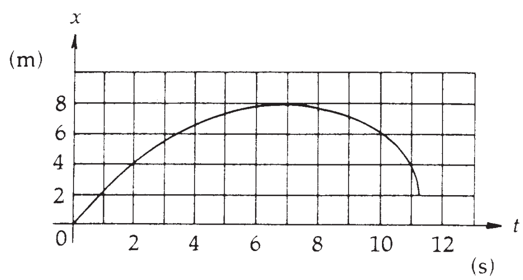
0.6. Feladat: (HN 2B-18) Egy futó a 100 m-es vágtaszámot $10,3$ s-os eredménnyel nyerte meg. Egy másik futó $10,8$ s-os idővel futott be. Feltéve, hogy az atléták az egész távon egyenletesen futottak, határozzuk meg, hogy milyen távol volt a második futó a céltól, amikor a győztes átszakította a célszalagot!

Megoldás: Az adatokat jelöljük a következő módon: $s = 100$ m; $t_1 = 10,3$ s; $t_2 = 10,8$ s. A másodikként célba érkező futó sebessége

$$v = \frac{s}{t_2} = 9,26 \text{ m/s} \tag{0.6.1}$$

volt. Mivel a hátránya $t = t_2 - t_1 = 0,5$ s volt, így $d = vt = 4,63$ m-re volt a célvonaltól.

0.7. Feladat: (HN 2B-19) A . ábra egy egyenesvonalú pályán mozgó részecske út-idő grafikonját mutatja. a, Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a $t_1 = 2$ s és $t_2 = 5$ s időintervallumra! b, Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége? c, Mekkora a $t = 10$ s időpontban a pillanatnyi sebesség?



Megoldás: a, A grafikonról leolvasható, hogy a $t_1 = 2$ s időpillanatban $x_1 = 4$ m a helykoordináta, valamint $t_2 = 5$ s időpillanatban $x_2 = 7$ m. Az átlagsebesség – a megtett út osztva az eltelt idővel –

$$v_{tl} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1 \text{ m/s}. \qquad (0.7.1)$$

b, A mozgás sebessége ott zérus, ahol a görbéhez húzott érintő meredeksége zérus. Ez jó közelítéssel láthatóan a

$$t' = 7 \text{ s} \qquad (0.7.2)$$

időpillanatban van. c, A $t = 10$ s-beli sebesség meghatározása a pontbeli érintő kiszámolását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a ponthoz nagyon közeli értékeket kellene leolvasni. Mivel elég nagy a leolvasási pontatlanság – a megértés lényegét pedig nem érinti – az érintő meghatározását úgy végezzük el, hogy vesszük a $t_9 = 9$ s-hoz és $t_{11} = 11$ s-hoz tartozó $x_9 = 7$ m és $x_{11} = 4$ m helykoordinátákat, és kiszámoljuk a

$$v_{10} = \frac{x_{11} - x_9}{t_{11} - t_9} \sim -2 \text{ m/s}. \qquad (0.7.3)$$

meredekséget. A negatív előjel arra utal, hogy a pont az origó felé mozog. A mozgás irányának megváltozása a $t' = 7$ s időpillanatban történt.

0.8. Feladat: (HN 2B-26) Egy gépkocsi sebessége 9 s alatt 4 m/s-ról egyenletesen 7 m/s-ra növekszik. a, Mekkora a kocsi gyorsulása? b, Ezután az autó 12 s alatt egyenletesen lassulva megáll. Mekkora a gyorsulás ezen a szakaszon? c, Összesen mekkora utat tett meg a 21 s alatt az autó? d, Mekkora az átlagsebessége?

Megoldás: Adatok: $t_1 = 9$ s, $v_1 = 4$ m/s, $v_2 = 7$ m/s és $t_2 = 12$ s. a, A mozgás első szakaszára érvényes gyorsulás

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_1} = \frac{1}{3} \text{ m/s}^2. \tag{0.8.1}$$

b, A sebesség időbeli változása

$$v(t) = v_2 + a_2 t_2, \tag{0.8.2}$$

amellyel a megállás tényét is figyelembe véve a

$$0 = 7 + 12a_2 \tag{0.8.3}$$

egyenlet írható fel. Ebből a második szakaszon elért gyorsulás

$$a_2 = -\frac{7}{12} \text{ m/s}^2. \tag{0.8.4}$$

c, A megtett út az első szakaszra

$$x_1 = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 39,5 \text{ m}, \tag{0.8.5}$$

a másodikra

$$x_2 = v_2 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 42 \text{ m}, \tag{0.8.6}$$

így az összesen megtett út $81,5$ m. d, Az átlagsebesség

$$\overline{v} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = 3,88 \text{ m/s}. \tag{0.8.7}$$

0.9. Feladat: (HN 2A-32) Függőlegesen felfelé hajítunk egy labdát 12 m/s sebességgel. Hol van, mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik a, 1 s és b, 2 s időpontban az elhajítás után?

Megoldás: A függőleges felfelé hajításra vonatkozó sebesség-idő és hely-idő összefüggések:

$$v(t) = v_0 - gt \tag{0.9.1}$$

és

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{0.9.2}$$

Behelyettesítés után: a, $v(1\text{ s}) = 2$ m/s felfelé (a pozitív előjel ezt mutatja); $y(1\text{ s}) =$ 7 m; b, $v(1\text{ s}) = -8$ m/s lefelé (a negatív előjel ezt mutatja); $y(1\text{ s}) = 4$ m.

0.10. Feladat: (HN 2B-33) 50 m mély kútba követ ejtünk. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva halljuk a kő csobbanását! A hang terjedési sebessége 330 m/s.

Megoldás: A h mélységű kút aljára

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{0.10.1}$$

idő alatt ér le a kő. A h utat a hang

$$t_2 = \frac{h}{c} \tag{0.10.2}$$

idő alatt teszi meg. Így összesen

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c} = 3,31 \text{ s} \tag{0.10.3}$$

idő múlva hallható a csobbanás.

0.11. Feladat: (HN 2B-35) Feldobunk egy érmét 4 m/s sebességgel. Mennyi idő alatt ér fel 0,5 m magasra. Miért kapunk két eredményt?

Megoldás: Az emelkedés út-idő függvénye:

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{0.11.1}$$

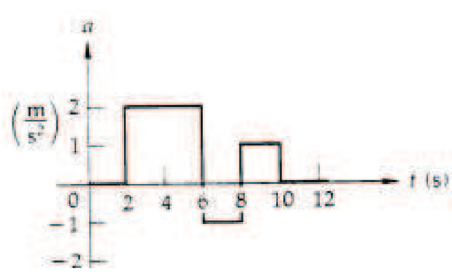
Az adatokat behelyettesítve a

$$0 = 5t^2 - 4t + 0,5 \tag{0.11.2}$$

másodfokú egyenlet adódik, amelynek megoldásai a $t_1 = 0,155$ s és a $t_2 = 0,644$ s. Azért van két megoldás mert az első időpont után még tovább emelkedik, s a lefele esésnél a második időpontban ugyancsak $0,5$ m magasan lesz.

0.12. Feladat: (HN 2C-54) **Órai kidolgozásra:**

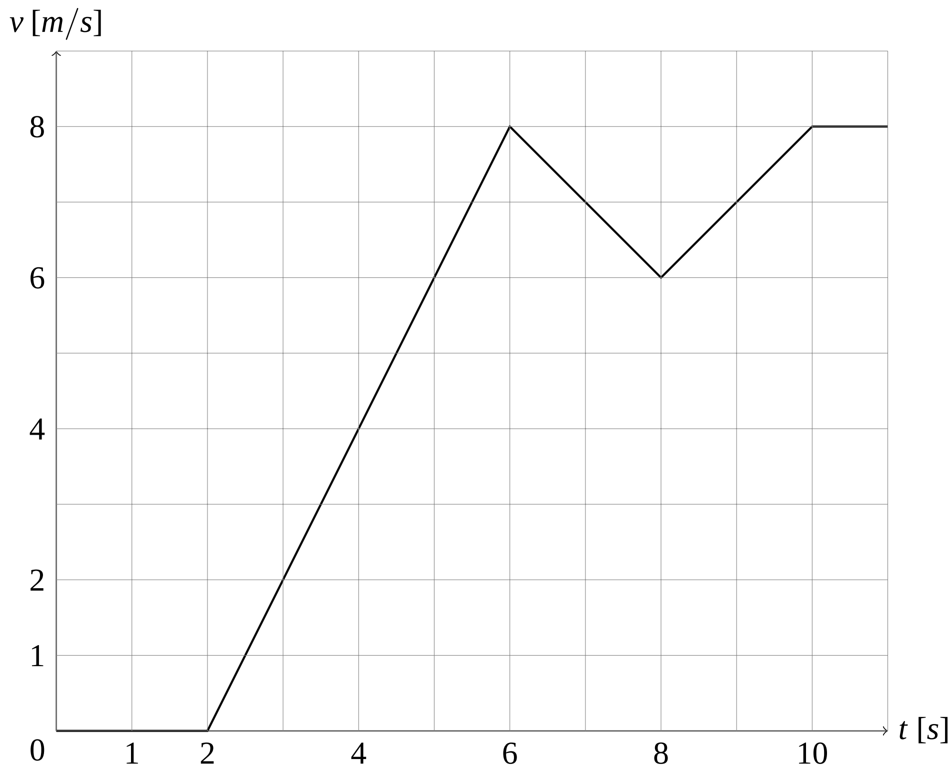
Egy, az origóból induló test a 1. ábra szerinti gyorsulással egyenesvonalú mozgást végez. Rajzoljuk meg a mozgás sebesség-idő és hely-idő függvényvényeket!

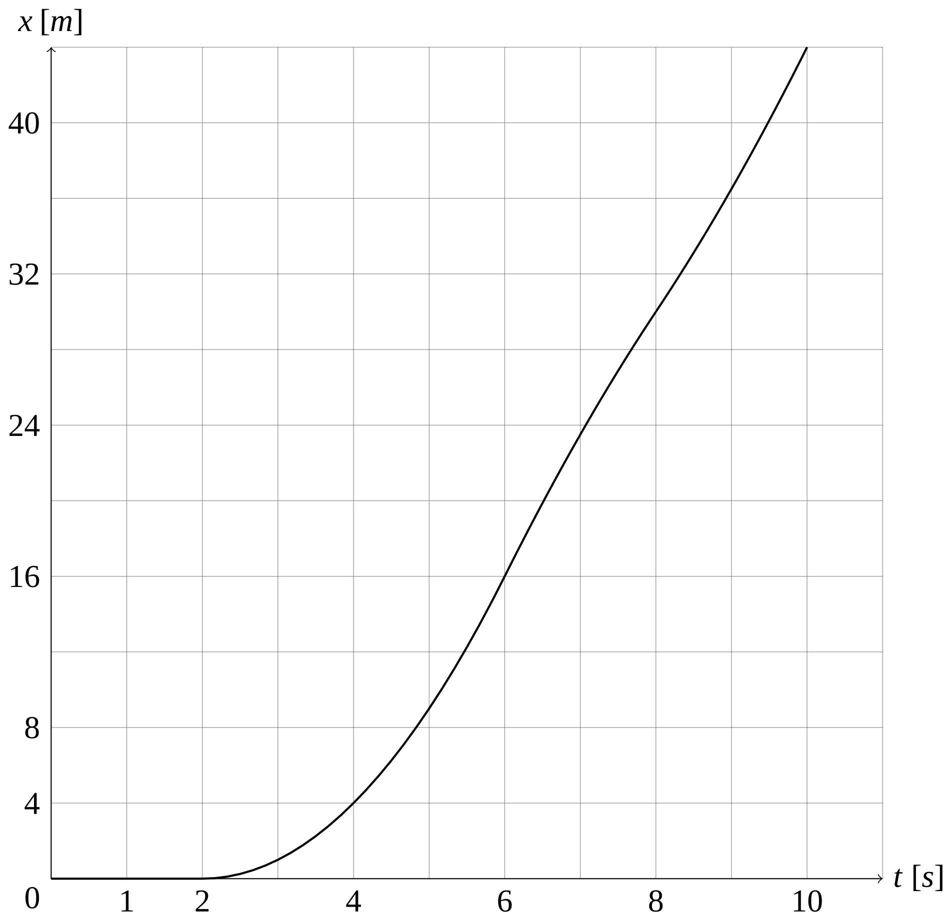


1. ábra.

Tüntessük fel a $t = 2,\ 6,\ 8$ és 10 s időpontokhoz tartozó sebesség és helykoordináták értékét.

Megoldás: A feladat megoldása során a görbe alatti területeket kell kiszámolni. Így kapható a gyorsulás grafikonjából a sebesség időfüggése, ebből pedig a hely-idő függvény. A két grafikon:





t [s]	2	4	6	8	10
v(t) [m/s]	0	4	8	6	8
x(t) [m]	0	4	16	30	44

0.13. Feladat: (HN 2C-66) Egy leejtett kődarab útjának a talajra érkezés előtti utolsó harmadát $1,0$ s alatt teszi meg. Milyen magasról esett le a kő?

Megoldás: Jelölések: h az ejtés magassága; t a teljes esési idő; $t_0 = 1$ s az utolsó harmadhoz tartozó idő. A kinematikai összefüggések alapján a h magasságból való esésre

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \tag{0.13.1}$$

a $\frac{2}{3}h$ magasságból való esésre

$$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \tag{0.13.2}$$

áll fenn. A h eliminálásával a t-re az alábbi másodfokú egyenlet adódik

$$0 = \frac{1}{6}gt^2 - gtt_0 + \frac{1}{2}gt_0^2. \tag{0.13.3}$$

Ennek két megoldása van: $t_1 = 5,45$ s és $t_2 = 0,55$ s. A második megoldás fizikailag nem értelmes. A t_1 esési időhöz tartozó magasság:

$$h = 148,51 \text{ m}. \tag{0.13.4}$$

0.14. Feladat: * (HN 2B-40) **Órai kidolgozásra:**

Egy, az x tengelyen mozgó részecske sebesség-idő függvényét a $v(t) = 4+2t-3t^2$ függvény adja meg. A $t = 0$ időpillanatban a részecske az $x = 8$ m helyen van. a, Mi az egyes együtthatók mértékegysége? b, Határozzuk meg a mozgás gyorsulás-idő függvényét! c, Határozzuk meg a mozgás hely-idő függvényét! d, Mekkora a részecske legnagyobb sebessége a $+x$ irányban?

Megoldás: a, $A = 4$ m/s, $B = 2$ m/s^2, $C = 3$ m/s^3: $v(t) = A+Bt-Ct^2$. b, A gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, azaz

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = B-2Ct = 2-6t. \tag{0.14.1}$$

c, A kezdeti $t = 0$ s időpillanatban a részecske koordinátája $x = 8$ m. A hely-idő függvény a sebesség idő szerinti integrálásával kapható meg a kezdeti feltételek illesztése mellett. Ezt a

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t \tag{0.14.2}$$

összefüggésbol kiindulva a

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^{t} (A + Bt - Ct^2)\mathrm{d}t \tag{0.14.3}$$

határozott integrál kiszámolásával kaphatjuk. Ennek eredménye

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^{t} (A + Bt - Ct^2)\mathrm{d}t = \left[At + \frac{1}{2}Bt^2 - \frac{1}{3}Ct^3\right]_{t_0=0}^{t}, \tag{0.14.4}$$

ahonnan a hely

$$x(t) = x_0 + At + \frac{1}{2}Bt^2 - \frac{1}{3}Ct^3 = 8 + 4t + t^2 - t^3. \tag{0.14.5}$$

d, A sebesség akkor a legnagyobb, amikor a gyorsulás zérus. Ez a $t = 1/3 = 0,33$ s időpillanatban lesz. Ekkor a sebesség $v = 4,33$ m/s.

0.15. Feladat: ***** (HN 2B-41) Az x tengelyen mozgó részecske helyzetét az $x(t) = 2 + 3t - 4t^2$ függvény adja meg. a, Mi az egyes együtthatók dimenziója? b, Vezessük le a sebesség-idő és c, gyorsulás-idő függvényt! d, Határozzuk meg továbbá a részecske maximális x irányú elmozdulását e, és azt az időpontot, amikor ez bekövetkezik!

Megoldás: a, [2] =m; [3] =m/s; [4] =m/s^2 b, A sebesség a hely idő szerinti deriváltja, azaz

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3 - 8t. \tag{0.15.1}$$

c, A gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, azaz

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -8. \tag{0.15.2}$$

d, és e, A maximális elmozdulás akkor következik be, amikor a test megáll ($v = 0$). Ebből az eltelt idő

$$t = \frac{3}{8}\ \mathrm{s}, \tag{0.15.3}$$

az elmozdulás

$$x = \frac{51}{16}\ \mathrm{m}. \tag{0.15.4}$$

0.16. Feladat: ***** A folyó partját jelentse az x tengely. A víz a parttal párhuzamosan folyik, az x irányú sebesség függ a parttól való távolságtól, amely legyen most lineáris függvény

$$v_x(y) = ky, \tag{0.16.1}$$

ahol $0 < k$ egy $1/\mathrm{s}$ dimenziójú konstans paraméter. Az összefüggés kifejezi, hogy a parton a víz lényegében áll, és befelé haladva egyre nagyobb a sodrás. A parton lévő úszó a parttól d távolságra lévő stéghez szeretne úszni. Mekkora távolsággal előbb kell a vízbe mennie, ha a folyásirányra merőlegesen állandó u sebességgel fog úszni? Milyen a lesz a pályagörbe alakja?

Megoldás: a, Az úszó a parttól az idő függvényében

$$y(t) = ut \tag{0.16.2}$$

távolságra van. Közben az x irányú sebessége is folyamatosan változik a

$$v_x(t) = ky = kut \tag{0.16.3}$$

összefüggésnek megfelelően. Ez lényegében egy állandó gyorsulású mozgás, ahol $a_x = ku$. A sodródás ideje

$$t_s = \frac{d}{u}, \tag{0.16.4}$$

így az a távolság, amellyel „előrébb” kell a vízbe mennie – a behelyettesítések után –

$$x = \frac{1}{2}a_x t_s^2 = \frac{1}{2}kut_s^2 = \frac{1}{2}\frac{kd^2}{u}. \tag{0.16.5}$$

b, A pályagörbe meghatározásához válasszunk olyan koordinátarendszert, hogy a stég a

$$\left(\frac{1}{2}\frac{kd^2}{u}, d\right) \tag{0.16.6}$$

koordinátájú pontban legyen. Ekkor az origóból indulva éppen ehhez a ponthoz jut. Az $x(t) = \frac{1}{2}kut^2$ összefüggésből fejezzük ki az időt

$$t = \sqrt{\frac{2x}{ku}}, \tag{0.16.7}$$

és helyettesítsük be az $y(t) = ut$ egyenletbe. Ekkor a pályagörbére az

$$y(x) = \sqrt{\frac{2ux}{k}} \tag{0.16.8}$$

összefüggést kapjuk, ami egy „fektetett” parabola egyenlete.

0.17. Feladat: (HN: 3B-21) 25 m magas hídról vízszintes irányban hajítunk el egy követ. A kő becsapódási helyét 45°-os irányban látjuk. a, Mekkora sebességgel hajítottuk el a követ? b, Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódott a kő a vízbe?

Megoldás: a, Ha a kő becsapódási helyét a vízszinteshez képest lefelé 45°-os szög alatt látjuk, akkor az azt jelenti, hogy annyit ment vízszintesen mint lefelé. A becsapódás x koordinátája $x = 25$ m. Legyen a magasság zérus helye az eldobás szintje. Ekkor a kinematikai egyenletek:

$$x(t) = v_0 t \tag{0.17.1}$$

és

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{0.17.2}$$

A becsapódás pillanatában:

$$25 = v_0 t \tag{0.17.3}$$

és

$$-25 = -gt. \tag{0.17.4}$$

Az két egyenletből a hajítás idejére $t = 2,236$ s, az eldobás sebességére $v_0 = 11,18$ m/s adódik. b, A sebességkomponensek:

$$v_x(t) = v_0 \tag{0.17.5}$$

és

$$v_y(t) = -gt \tag{0.17.6}$$

A $t = 2,236$ s időt behelyettesítve: $\mathbf{v} = (11,18,\ 22,36)$ m/s. Innen a becsapódás α szögére:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = 2. \tag{0.17.7}$$

Innen $\alpha = 63,44°$.

0.18. Feladat: Egy labdát egy 35m magas torony tetejéről, a vízszinteshez képest 25 fokos szög alatt ferdén felfelé hajítunk el $v_0 = 80$ m/s kezdősebességgel. a, Határozzuk meg a földetérés idejét! b, Határozzuk meg, hogy milyen messze ér földet a labda a toronytól! c, Határozzuk meg a labda becsapódási sebességének nagyságát és irányát!

Megoldás: Jelölések: $h = 35$ m, $\alpha = 25^0$. A labda helykoordinátái, mint az idő függvénye

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha \tag{0.18.1}$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 + h. \tag{0.18.2}$$

A leesés ideje a

$$0 = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 + h \tag{0.18.3}$$

egyenletből határozhatjuk meg. A fizikailag értelmes megoldás

$$t = 7,67\,\mathrm{s}. \tag{0.18.4}$$

b, Ezt az időt a fenti első egyenletbe helyettesítve kapjuk a becsapódás távolságát, amely

$$d = x(t = 7,67) = v_0 t \cos\alpha = 556,1\,\mathrm{m}. \tag{0.18.5}$$

c, A sebesség komponensei:

$$v_x(t = 7,67) = v_0 \cos\alpha = 72,5\,\mathrm{m/s} \tag{0.18.6}$$

és

$$v_y(t = 7,67) = v_0 \sin\alpha - gt = -42,9\,\mathrm{m/s}. \tag{0.18.7}$$

A sebesség nagysága

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 84,2\,\mathrm{m/s}. \tag{0.18.8}$$

A becsapapódás szöge

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{v_y}{v_x} = -30,61^0. \tag{0.18.9}$$

0.19. Feladat: A talajról a vízszintessel 30°-os szöget bezáró szögben 50 m/s nagyságú kezdősebességgel kilövünk egy lövedéket. A lövedék a pályája síkjára merőleges, függőleges falba csapódik. Milyen magasan van a becsapódás helye, ha a fal 80 m távolságra van a kilövés helyétől?

Megoldás: Jelölések: $\alpha = 30°$, $v_0 = 50$ m/s, $d = 80$. A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes és függőleges komponense

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha, \tag{0.19.1}$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{0.19.2}$$

Az eldobott test helykoordinátái $(x(t),\ y(t))$, ahol

$$d = x(t) = v_0 t \cos\alpha, \tag{0.19.3}$$

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2. \tag{0.19.4}$$

A 0.19.3 egyenletből a repülési időt kifejezve

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha} = 1,85\,\mathrm{s} \tag{0.19.5}$$

adódik. Ezt az időt behelyettesítve a 0.19.4 egyenletbe

$$h = y = 29,14\,\mathrm{m} \tag{0.19.6}$$

emelkedési magasság adódik.

0.20. Feladat: (HN: 3C-29) **Órai kidolgozásra:**
A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg egy a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt, v_0 kezdősebességgel kilőtt lövedék röppályájának egyenletét és az R lőtávolságot!

Megoldás: Az elhajított test gyorsulás vektora $\mathbf{a} = (0, -g)$, a $t = 0$ kezdőpillanathoz tartozó sebesség vektora $\mathbf{v_0} = (v_0 \cos\theta,\ v_0 \sin\theta)$. A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes komponense

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta, \tag{0.20.1}$$

függőleges komponense

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt. \tag{0.20.2}$$

Az eldobott test helyvektora $\mathbf{r}(t) = (x(t),\ y(t))$, ahol

$$x(t) = v_0 t \cos\theta, \tag{0.20.3}$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2. \tag{0.20.4}$$

A pálya egyenletét úgy kapjuk, hogy a fenti két egyenlet egyikéből kifejezzük az időt, és behelyettesítjük a másik egyenletbe:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}, \tag{0.20.5}$$

ezt követően:

$$y(x) = x \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}. \tag{0.20.6}$$

Ez egy lefele nyíló parabolát ír le, amely átmegy az origón. A hajítási szögtől függő lőtávolságot az $y(x) = 0$-ra történő megoldás adja, amely

$$R = x(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \tag{0.20.7}$$

0.21. Feladat: (HN: 3C-30) **Órai kidolgozásra:**

A ferde hajítás röppálya egyenletének differenciálásával mutassuk meg, hogy a maximális lőtávolságot $\theta = 45°$ kilövési szög esetén érjük el!

Megoldás: A hajítási távolság mint a θ kilövési szög függvénye:

$$x(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \tag{0.21.1}$$

A függvénynek szélsőértéke (esetünkben maximuma) van, ha

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0, \tag{0.21.2}$$

azaz a differenciálás muveletét elvégezve:

$$0 = 2\frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta. \tag{0.21.3}$$

Innen $\theta = 45°$.

0.22. Feladat: (HN: 3C-32) **Órai kidolgozásra:**

Határozzuk meg, hogy milyen θ kilövési szög esetén lesz egy lövedék D lőtávolsága egyenlő a H emelkedési magassággal?

Megoldás: A lövedék helyvektora mint az idő függvénye:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t),\ y(t)) = \left(v_0 t\cos\theta,\ v_0 t\cos\theta - \frac{1}{2}gt^2\right). \tag{0.22.1}$$

Az idő eliminálásával megkapható a mozgás pályája:

$$y(x) = x\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta}. \tag{0.22.2}$$

A hajítási távolság az $y = 0$ feltétel melletti megoldáskor adódik:

$$(x =)D = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta. \tag{0.22.3}$$

Az emelkedés magasságát az $y(\frac{D}{2}) = H$ feltétel adja meg, azaz

$$(y =)H = \frac{D}{2}\mathrm{tg}\,\theta - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{4v_0^2\cos^2\theta}. \tag{0.22.4}$$

A feladat szövegének megfelelően $D = H$ – az előző két egyenletet egymással egyenlővé téve – feltételből a

$$\cos\theta = \frac{1}{4}\sin\theta \tag{0.22.5}$$

trigonometriai egyenlet adódik. Ennek fizikailag értelmes megoldása:

$$\theta = 76^\circ. \tag{0.22.6}$$

0.23. Feladat: (HN: 3C-38) Egy szöcske vízszintes irányban legfeljebb 1 m távolságra tud elugrani. Feltételezve, hogy az elugráshoz szükséges idő elhanyagolható, határozzuk meg, hogy vízszintes úton mekkora maximális sebességgel halad a szöcske, ha mindig a maximális távolságba ugrik!

Megoldás: A vízszintes hajítási távolság mint a sebesség nagyság, nehézségi gyorsulás és a szög függvénye a

$$D = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \tag{0.23.1}$$

összefüggéssel adható meg. Ennek akkor van maximuma, ha a szög $\theta = 45°$, így

$$D_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \tag{0.23.2}$$

Ebből az ugrás sebessége

$$v_0 = \sqrt{D_{max} g}. \tag{0.23.3}$$

Mivel a hajítási szög $\theta = 45°$, így

$$v = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{D_{max} g}{2}}. \tag{0.23.4}$$

0.24. Feladat: (HN 3C-39) Egy lövedéket θ kilövési szöggel lövünk ki. Határozzuk meg, hogy a lövedék röppályájának tetőpontja mekkora φ szög alatt látszik a kilövési pontból!

Megoldás: A korábbi feladatokban kiszámoltakból vegyük a hajítási pálya egyenletét

$$y(x) = x \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}, \tag{0.24.1}$$

és a hajítási távolságot

$$(x =) D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \tag{0.24.2}$$

A pálya szimmetriája miatt a röppálya tetőpontja az

$$x = \frac{D}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta \tag{0.24.3}$$

koordinátájú pontban van. Az ehhez tartozó $y = H$ emelkedési magasság:

$$H = y\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2\theta. \tag{0.24.4}$$

Az előző két összefüggésből:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\theta. \tag{0.24.5}$$

0.25. Feladat: Egy kocsi vízszintes pályán 30 m/s állandó sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A mozgó kocsiról egy lövedéket lőnek ki úgy, hogy miután a kocsi 80 m-t megtett, a lövedék visszaesik a kocsira. a, Mennyi a repülési idő? b, A kocsihoz képest mekkora relatív sebességgel és a vízszinteshez képest mekkora szög alatt kellett a lövedéket kilőni?

Megoldás: Jelölések: $s = 80$ m a kocsi által megtett út, $v = 30$ m/s a kocsi sebessége. a, A repülési idő

$$t = \frac{s}{v} = 2,67\,\mathrm{s}. \tag{0.25.1}$$

b, A lövedéknek a kocsihoz képest csak függőleges irányú sebessége lehetett. Mivel t idő múltán ismét a kocsin van lövedék, ezért fenn áll a

$$0 = vt - \frac{1}{2}gt^2, \tag{0.25.2}$$

amelyből a függeleges irányú sebességre

$$v_0 = \frac{1}{2}gt = 13,3\,\mathrm{m/s} \tag{0.25.3}$$

adódik.

0.26. Feladat: Egy lövedéket 330 m/s vízszintes irányú kezdősebességgel egy 80 m magas szikla tetejéről lőnek ki. a, Mennyi ideig tart, amíg a lövedék a Föld felszínére érkezik? b, A szikla aljától mekkora távolságban érkezik a Földre? c, Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódik a talajba?

Megoldás: a, A Földbe csapódás ideje

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4\,\mathrm{s}. \tag{0.26.1}$$

b, A szikla aljától

$$x = vt = 1320\,\mathrm{m} \tag{0.26.2}$$

távolságban érkezik a Földre. c, A becsapódáskori sebességkomponensek $v_x = 330$ m/s, $v_y = gt = 40$ m/s. Így a sebesség nagysága

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 332,4\,\mathrm{m/s}, \tag{0.26.3}$$

míg a becsapódás szöge

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{v_y}{v_x} = 6,9^0. \tag{0.26.4}$$

0.27. Feladat: Egy 30cm sugarú kerékre szíjat csévéltünk. Míg a kerék 2,0 1/s-os fordulatszámról egyenletesen lassulva leáll, 25 m szíj tekeredik le róla. a, A folyamat alatt hány fordulatot tesz meg? b, Mekkora a kerék szöglassulása?

Megoldás: Jelölések: $R = 30$ cm = 0,3 m, $f = 2,0$ 1/s, $s = 25$ m, a kezdeti szögsebesség $\omega_0 = 2\pi f = 12,56$ rad/s. a, A fordulatok N száma

$$N = \frac{s}{2R\pi} = 13,26, \tag{0.27.1}$$

amely

$$\varphi = 41,67\,\mathrm{rad} \tag{0.27.2}$$

szögelfordulást jelent. b, A forgásra vonatkozó kinematikai egyenletek egyrészt a szögesebesség időbeli változására

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \tag{0.27.3}$$

másrészt a szögelfordulásra

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \tag{0.27.4}$$

vonatkoznak. A megállást az $\omega = 0$ fejezi ki, ekkor $\varphi = 41,67$ rad. Tehát a

$$0 = \omega_0 + \beta t \tag{0.27.5}$$

és a

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \tag{0.27.6}$$

egyenletrendszert kell β-ra megoldani. A számolások elvégzése után

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\varphi} = -1,89\,\mathrm{rad/s^2} \tag{0.27.7}$$

a kerék szöglassulásának értéke.

0.28. Feladat: Órai kidolgozásra:

Egy autó egyenletesen gyorsulva álló helyzetből 15 m/s-os sebességre tesz szert 20 s alatt. a, Ha egy kerekének sugara $1/3$ m, mekkora a szöggyorsulása? b, Hány fordulatot tett meg a kerék a folyamat alatt?

Megoldás: a, Az autó gyorsulása

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0,75\,\mathrm{m/s^2}. \tag{0.28.1}$$

Mivel $a = R\beta$, innen

$$\beta = 2,25\,\mathrm{rad/s^2}. \tag{0.28.2}$$

b, A szögelfordulás

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2 = 450\,\mathrm{rad}, \tag{0.28.3}$$

amelyből a fordulatok száma

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = 71,6. \tag{0.28.4}$$

0.29. Feladat: (HN: 4C-25) Egy versenyautó 210 km/h sebességgel mozog a 2 km kerületű körpályán, majd egy teljes kört megtéve egyenletesen lassítva megáll. a, Mekkora az autó tangenciális gyorsulása? b, Mekkora a cenctripetális gyorsulás 1 km-rel a megállás előtt? c, Mekkora ebben a pillanatban az eredő gyorsulás?

Megoldás: a, Az egyenletes kerületi (a_t tangenciális) gyorsulással a megállásig két összefüggés írható fel:

$$0 = v_0 - a_t t, \tag{0.29.1}$$

ahol v_0 kezdeti sebesség, valamint

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a_t t^2, \tag{0.29.2}$$

ahol s a megtett út. Ezekkel a tangenciális gyorsulás:

$$a_t = \frac{v_0^2}{2s} = 0,85 \mathrm{m/s^2}. \tag{0.29.3}$$

b, Abban a pillanatban, amikor az autó d távolságra van a megállástól, akkor már $s-d$ utat tett meg. Az ehhez szükséges idő az

$$s - d = v_0 t - \frac{1}{2} a_t t^2 \tag{0.29.4}$$

egyenletből kapható meg. A másodfokú egyenlet megoldásai $t_1 = 20$ s és $t_2 = 117$ s. Fizikailag az első gyök a helyes. Ekkor az autó sebessége $v = 41,3$ m/s. A pillnathoz tartozó centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 5,36 \mathrm{m/s^2}. \tag{0.29.5}$$

c, Az eredő gyorsulás:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = 5,43 \mathrm{m/s^2}. \tag{0.29.6}$$

0.30. Feladat: (HN: 4C-26) **Órai kidolgozásra:**

Egy 300 m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó 1,2 m/s^2 gyorsulással fékezni kezd. Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége 15 m/s. Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére!

Megoldás: A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{225}{300} = 0,75 \mathrm{m/s}^2, \tag{0.30.1}$$

ahol v a sebesség és R az út görbületi sugara. Az autó 1,2 m/s^2 gyorsulása a tangenciális gyorsulás, iránya a v sebességgel ellentétes. A tangenciális és centripetális gyorsulás egymásra merőleges:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a_t}{a_{cp}} = 1,6. \tag{0.30.2}$$

Így $\varphi = 58^0$.

0.31. Feladat: (HN: 4C-27) A fonálra kötött labdát 0,3 m sugarú, a talaj felett 1,2 m magasban levő, vízszintes síkú körpályán állandó sebességgel pörgetünk. A fonal hirtelen elszakad és a labda attól a ponttól 2 m távolságban ér talajt, amelyet úgy kapunk, hogy az elszakadás pillantában elfoglalt helyzetét függolegesen a talajra vetítjük. Mekkora volt a labda centripetális gyorsulása, amíg körmozgást végzett?

Megoldás: A kötél elszakadásának pillanátában a labda vízszintes irányú sebessége $v = R\omega$, és ezzel a sebességgel tesz meg $s = 0,3$ m utat, azaz

$$s = R\omega t. \tag{0.31.1}$$

Másrészt a $h = 1,2$ m magasságból szabadon esik, amelyre

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \tag{0.31.2}$$

írható. Az két egyenletből a centripetális gyorsulás kifejezhető, amely

$$a_{cp} = R\omega^2 = \frac{g s^2}{2hR} = 55,6 \mathrm{m/s}^2. \tag{0.31.3}$$

0.32. Feladat: (HN 4C-28) Egy lövedéket a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt v_0 sebességgel lövünk ki. Fejezzük ki a röppálya tetőpontjához tartozó görbületi kör R sugarát a v_0, θ és g függvényében!

Megoldás: A pálya tetőpontján a pályát érintő sebességkomponens $v = v_0 \cos\theta$, másrészt a gyorsulás, amely a centripetális gyorsulás is egyben: g. Így

$$a_{cp} = g = \frac{v^2}{R}, \tag{0.32.1}$$

amelyből az R görbületi sugár:

$$R = \frac{v^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g}. \tag{0.32.2}$$