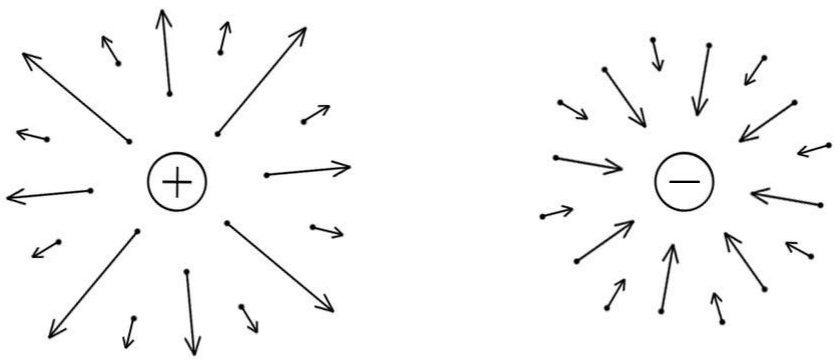
Fizika i

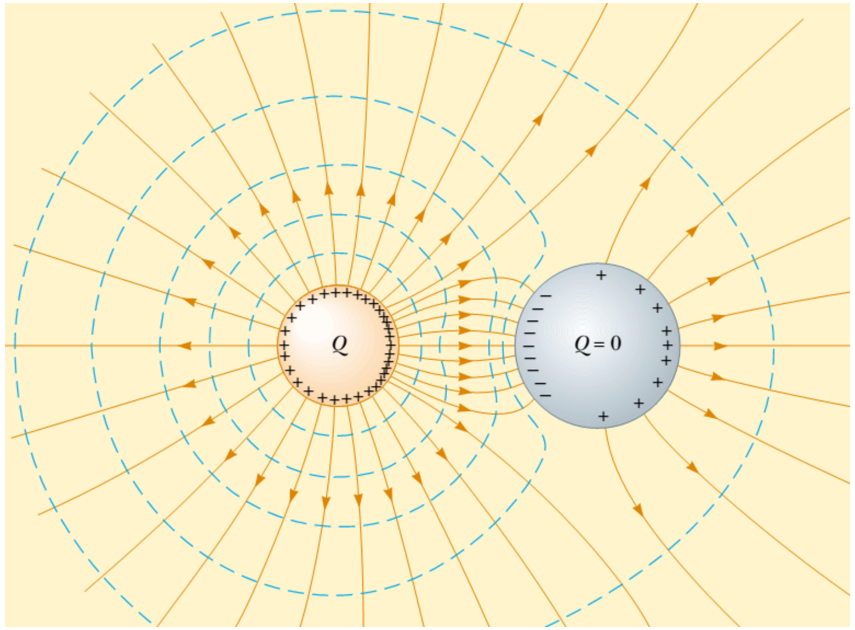
Elektrosztatika 2

Az elektromos erőtér

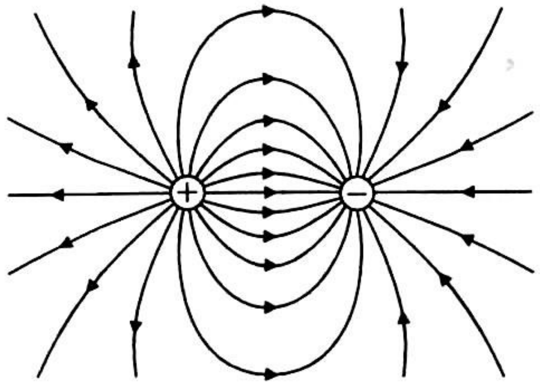
Térerősség vektorok



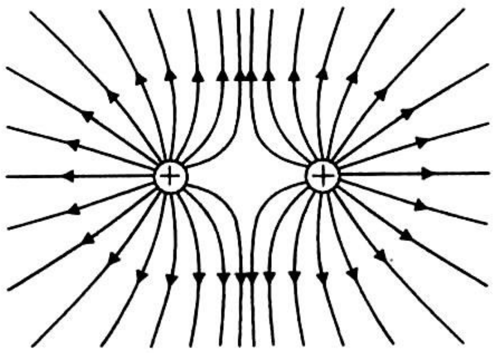
$$F = k\frac{q_1q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$



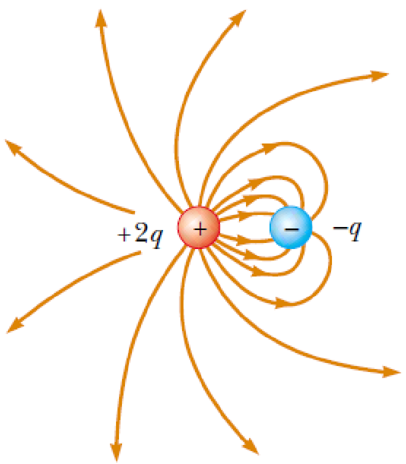
Erővonalak

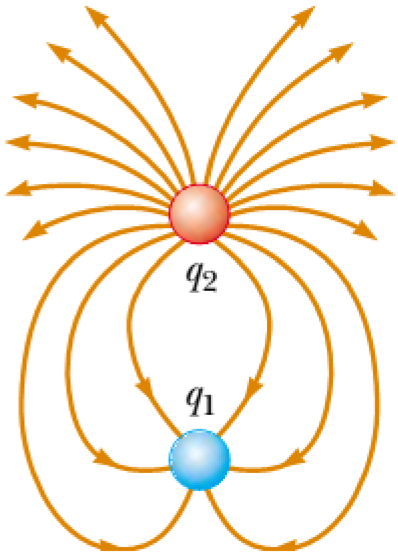


a.

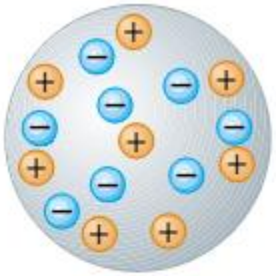


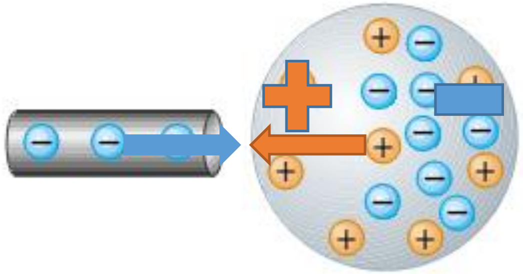
b.



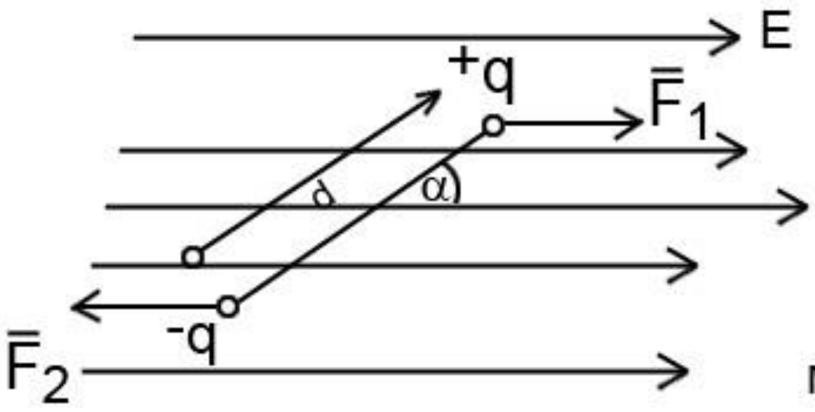


Dipólusok





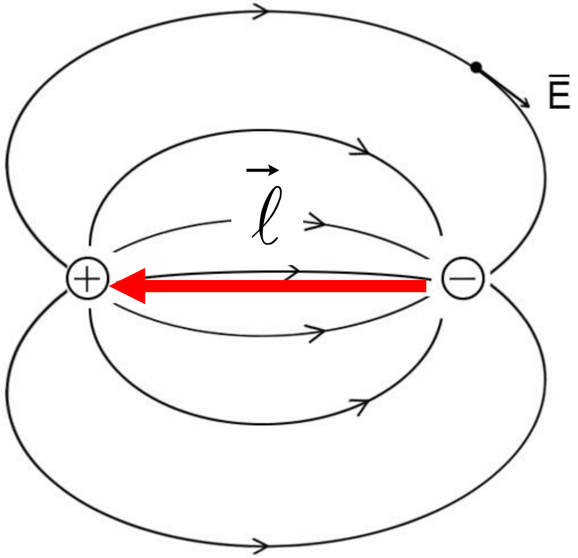
Dipólus homogén elektromos térben



$$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = F = qE$$

$$M = 2 \cdot \frac{d}{2} \sin\alpha \cdot qE$$

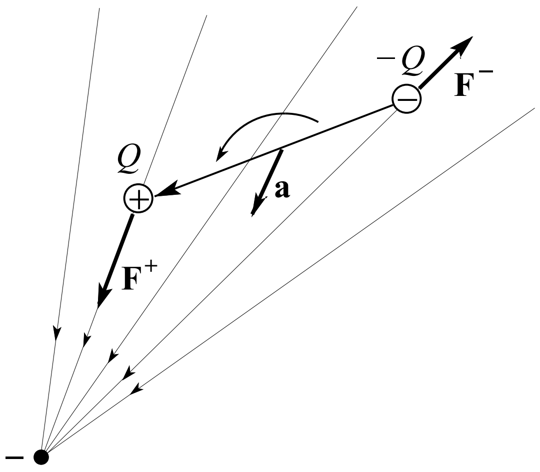
$$M = dqE\sin\alpha = pE\sin\alpha \longrightarrow \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$



Elektromos dipólmomentum:

$$\vec{p} = q\vec{\ell}$$

Dipólus inhomogén elektromos térben



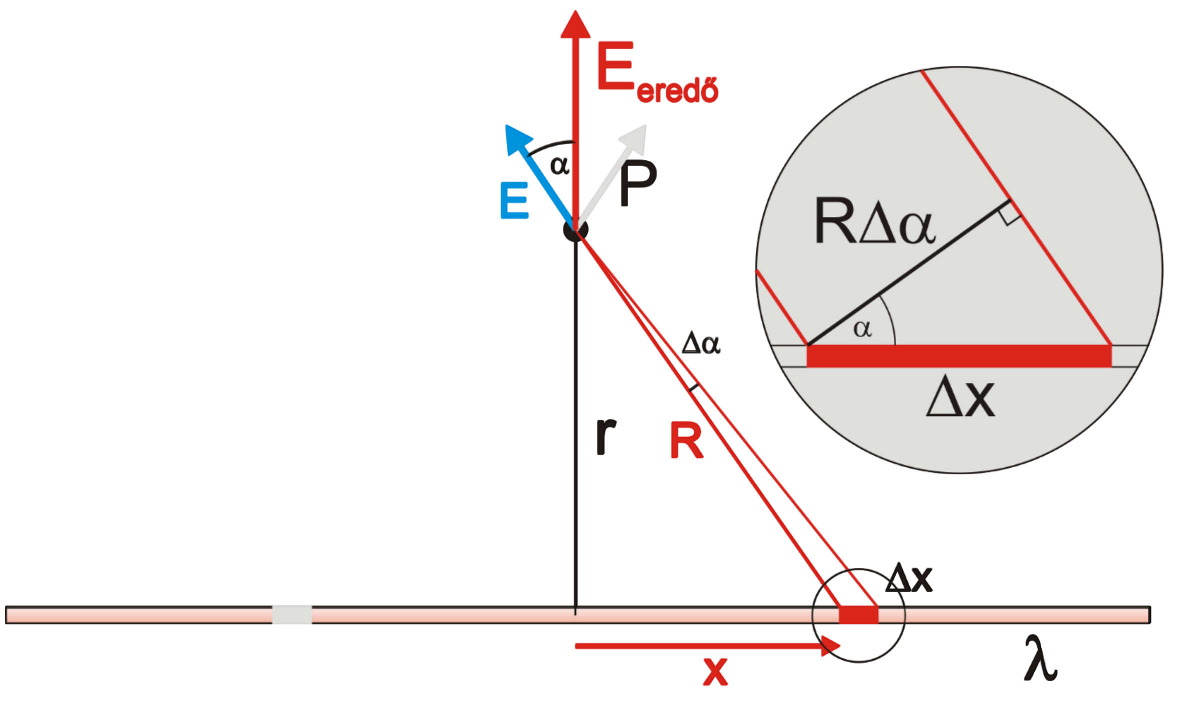
Töltéssűrűség

lineáris: $$\lambda = \frac{q}{\ell} \quad \left(\text{ill.} \quad \lambda = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} \right)$$

felületi: $$\sigma = \frac{q}{A} \quad \left(\text{ill.} \quad \sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} \right)$$

térfogati: $$\rho = \frac{q}{V} \quad \left(\text{ill.} \quad \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \right)$$

Lineáris töltéseloszlás tere



$$E = k\frac{\Delta Q}{R^2} = k\frac{\lambda \Delta x}{R^2}$$

$$E_{eredő} = \sum \Delta E cos\alpha$$

$$R = \frac{r}{cos\alpha} \qquad \Delta x = \frac{R\Delta\alpha}{cos\alpha}$$

$$E_{eredő} = \sum k\frac{\lambda R\Delta\alpha}{R^2 cos\alpha}cos\alpha = \sum k\frac{\lambda\Delta\alpha}{R}$$

$$E_{eredő} = k\lambda\sum\frac{cos\alpha}{r}\Delta\alpha$$

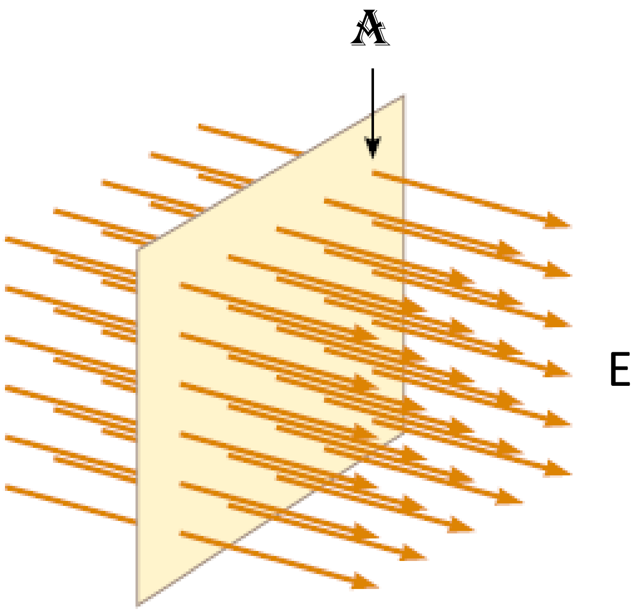
$$E_{eredő} = \frac{k\lambda}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\alpha\, d\alpha$$

$$E_{eredő} = \frac{k\lambda}{r}[sin\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

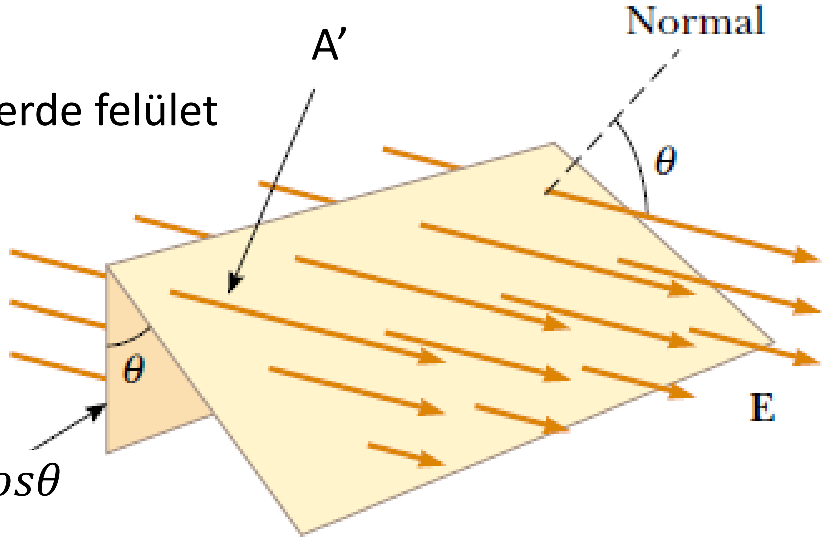
$$E_{eredő} = \frac{2k\lambda}{r}$$

Az elektromos fluxus

Az erővonalak sűrűsége (egységnyi, merőleges felületen áthaladó erővonalak száma) arányos a térerősség nagyságával.



Ferde felület

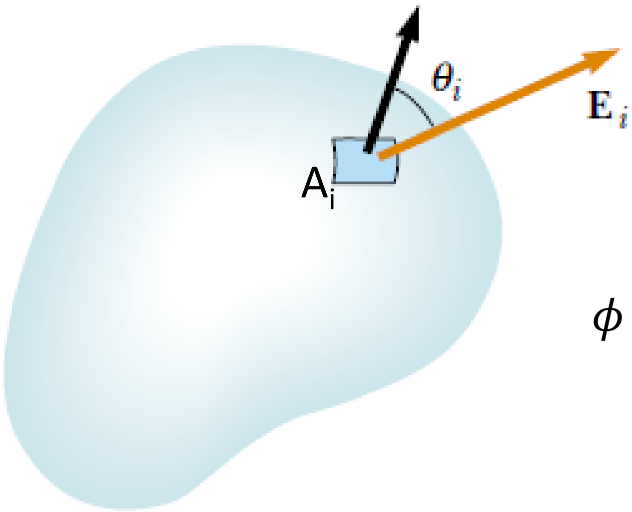


$A = A' cos\theta$

$\phi = EA' cos\theta$

$\phi = \bar{E}\bar{A}'$

Görbe felület



$\phi = \sum E_i A_i cos\vartheta_i$

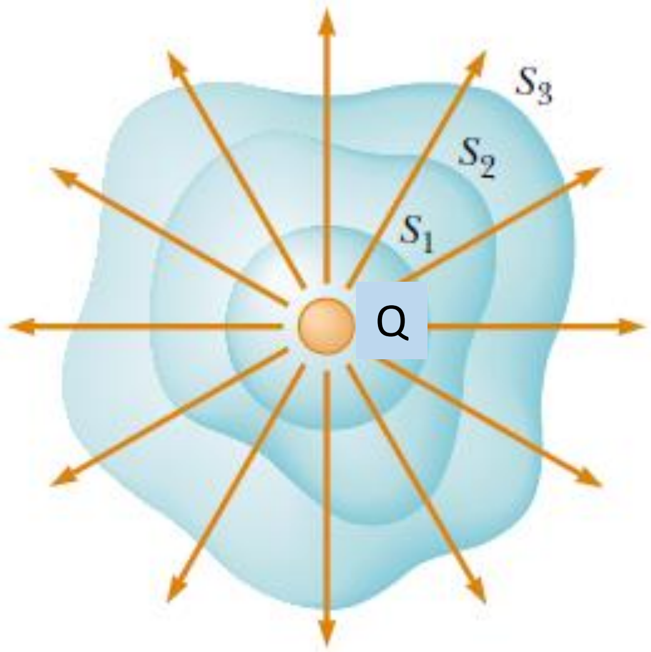
A nagyságú, merőleges felületen áthaladó erővonalak száma arányos a

$$\phi = EA$$

mennyiséggel.

$$[\phi] = \frac{Nm^2}{C}$$

Az elektromos Gauss törvény



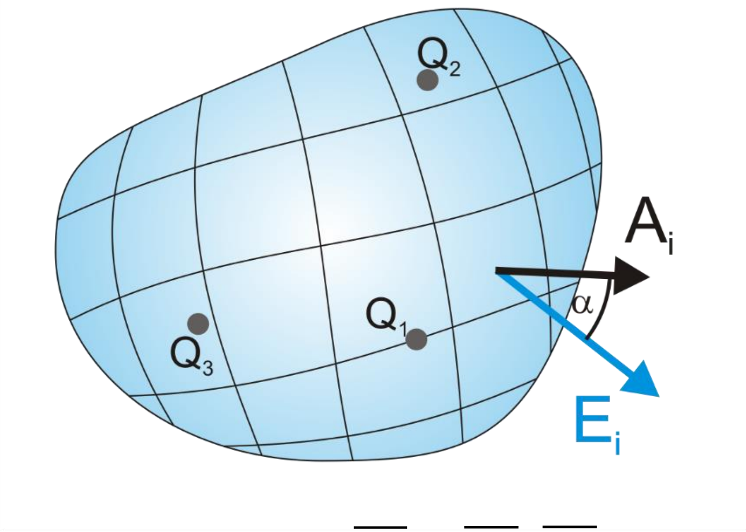
A fluxus az S_1 (gömb) felületen:

$$\phi_1 = E(r)\sum \Delta A_i$$

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}4r^2\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

A fluxus ugyanakkora a többi zárt felületen is, mivel
Az áthaladó erővonalak száma ugyanaz

Általánosítás szuperpozícióval:



$$\overline{E}_i = \overline{E_i^1} + \overline{E_i^2} + \overline{E_i^3}$$

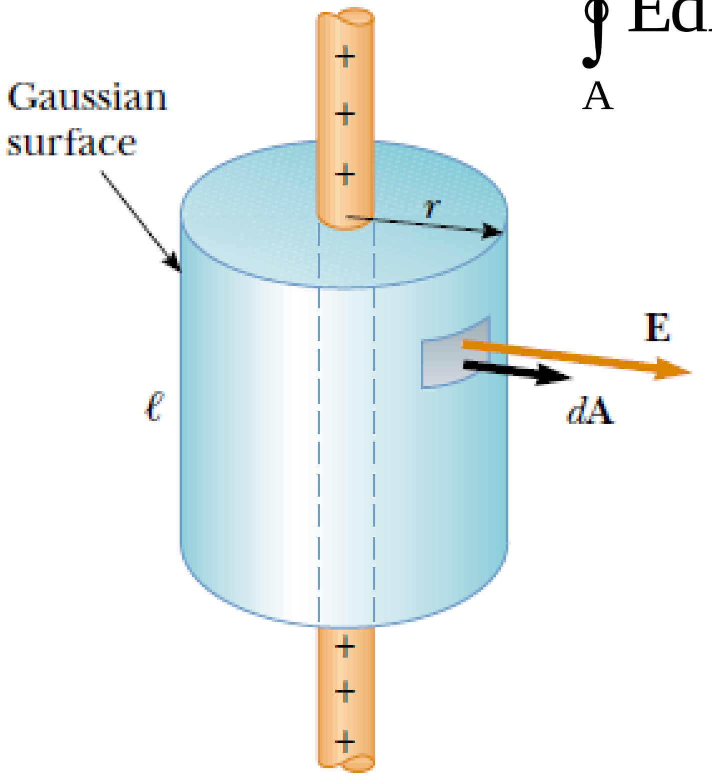
$$\phi_{zárt} = \sum \overline{E}_i \Delta\overline{A_i}$$

$$\phi_{zárt} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q_{bezárt}$$

Zárt felület fluxusa egyenlő a bezárt eredő töltés $1/\varepsilon_0$ – szorosával.

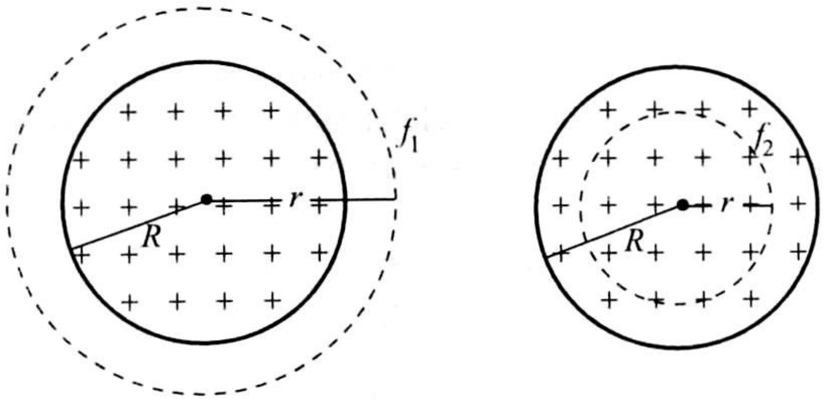
Gauss-tétel alkalmazása

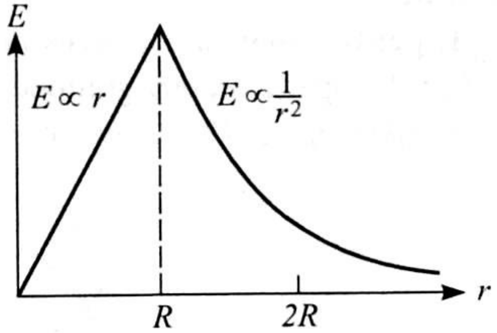
$$\oint_A \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q_ö}{\varepsilon_o}$$



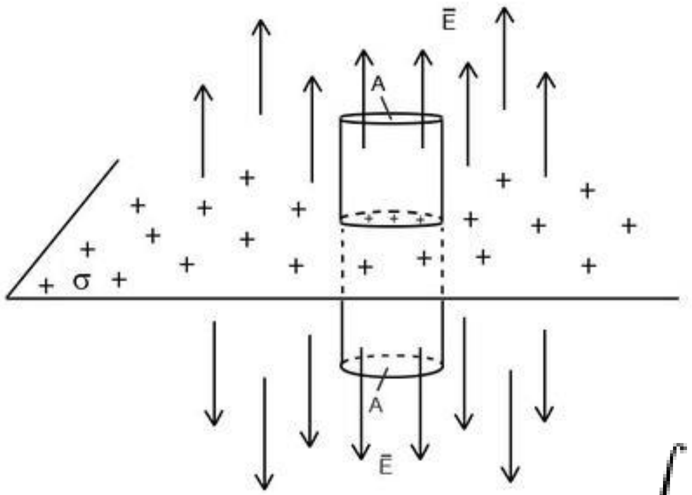
$$A = 2r\pi l \qquad Q = l\lambda \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$E2r\pi l = \frac{l\lambda}{\varepsilon_0}; E = \frac{\lambda}{2r\pi\varepsilon_0} = \frac{2k\lambda}{r}$$

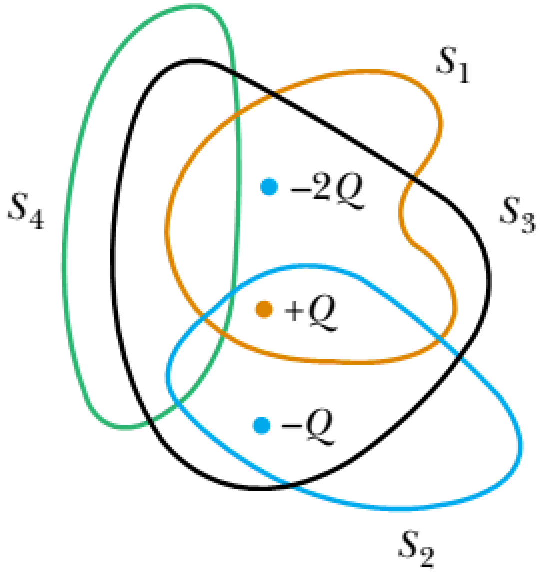




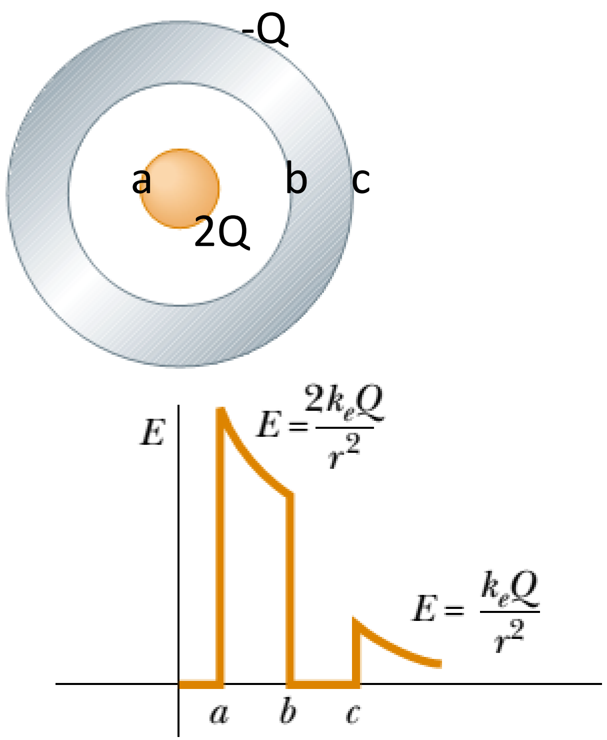
$$A = 4r^2\pi \qquad Q = \frac{4r^3\pi}{3}\varrho \qquad E = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}r$$



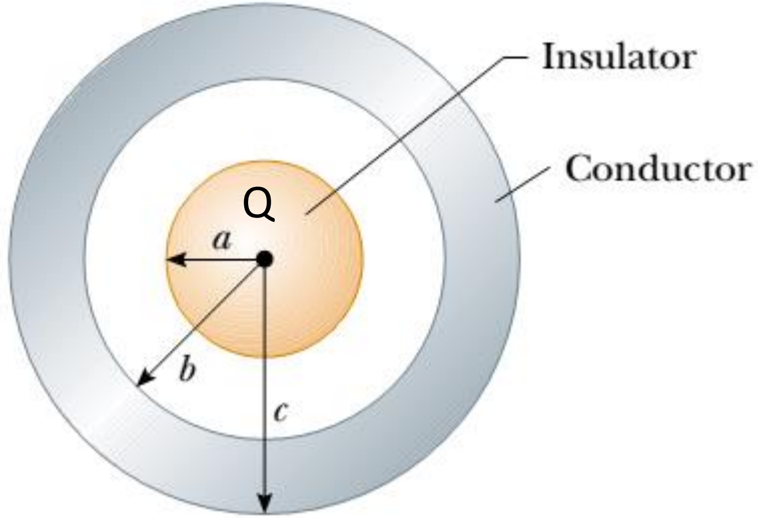
$$\int_A \vec{E}\, d\vec{A} = 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



S_1
S_2
S_3
S_4
$-2Q$
$+Q$
$-Q$

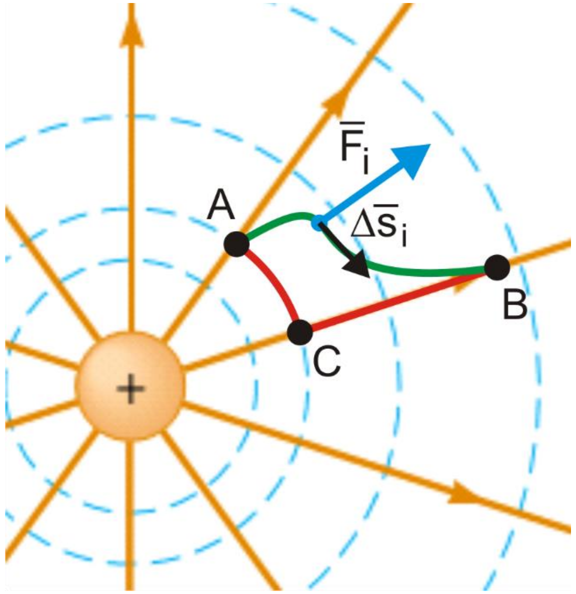


-Q
a
b
c
2Q
E
$E = \frac{2k_eQ}{r^2}$
$E = \frac{k_eQ}{r^2}$
a
b
c



Insulator
Conductor
Q
a
b
c

Elektromos potenciál és energia I.



Az elektromos erőtér által végzett munka:

$$\int \boldsymbol{E} d\boldsymbol{s}$$

$$W_{AB} = \sum \boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i = q \sum \boldsymbol{E}_i \Delta \boldsymbol{s}_i$$

$$W_{AB} = q \sum |\boldsymbol{E}_i| \underbrace{|\Delta \boldsymbol{s}_i| cos\varphi}_{\text{sugárirányú elmozdulás}} \Rightarrow W_{AB} = W_{ACB}$$

Ponttöltés terében a mező próbatöltésen végzett munkája
Független az úttól, csak a kezdő és végpont helyzetétől függ.

A töltött részecske potenciális energiájának megváltozása: $\Delta E_p = -\int_A^B q\vec{E}\, d\vec{s}$

Def.: az elektromos potenciálkülönbség: $\Delta U_{AB} = \frac{\Delta E_p}{q} = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s}$

Elektromos potenciál és energia II.

Potenciális energiaváltozás: $\Delta E_p = q\Delta U$

Homogén térben: $\Delta U_{AB} = -\vec{E}\vec{s}$

A tér által végzett munka: $W_{tér} = -q\Delta U_{AB}$

$W_{tér} = \Delta E_k$ ill. $-q\Delta U_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$

Ponttöltés elektromos potenciálja

$$\Delta U_{AB} = -\int_A^B \vec{E} d\vec{s} = -\int_A^B k \frac{Q}{r^2} \vec{n} d\vec{s}$$

$$\Delta U_{AB} = kQ \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Ha az A pont a ∞ – ben van ($r_A = \infty$) és $r_B = r$: $U(r) = k\frac{Q}{r}$

$$U(r = \infty) = 0$$

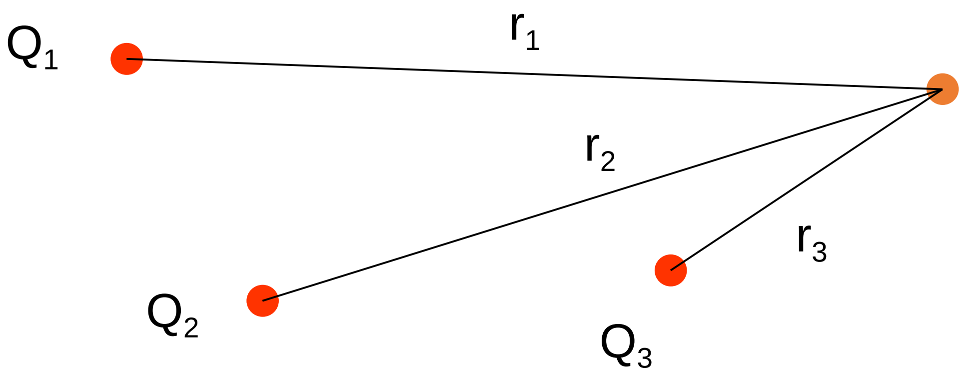
Ponttöltések terében az elektromos potenciál

Láttuk: szuperpozíció

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots$$

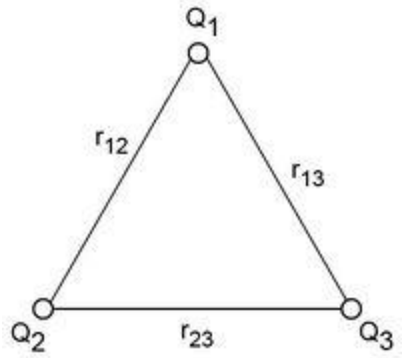
$$\Delta U_{AB} = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s} = -\int_A^B (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots)\, \mathrm{d}\vec{s} = -\int_A^B \vec{E}_1\, \mathrm{d}\vec{s} - \int_A^B \vec{E}_2\, \mathrm{d}\vec{s} - \ldots$$

$$U(r) = \sum_i U_i = \sum_i k \frac{Q_i}{r_i}$$



Töltésrendszer elektrosztatikus energiája

$$U(r) = k\frac{Q_1}{r} \longrightarrow E_p(r) = Q_2 U(r) = k\frac{Q_1 Q_2}{r}$$



A Q_1 töltés helyén az elektromos potenciál: $$U_{Q_1} = k\frac{Q_2}{r_{12}} + k\frac{Q_3}{r_{13}}$$

A Q_1 töltés potenciális energiája:

$$Q_1 U_{Q_1} = k\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + k\frac{Q_1 Q_3}{r_{13}}$$

A töltésrendszer potenciális energiája: $$E_p = k\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + k\frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + k\frac{Q_2 Q_3}{r_{23}}$$

Ált.: $$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} k\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}}$$ ahol $i \neq j$ ill.: $$E_p = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})U(\vec{r})\mathrm{d}V$$

Elektromos erőtér származtatása az elektromos potenciálból

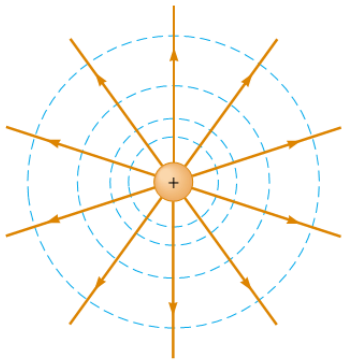
$$\mathrm{d}U = -E_x \mathrm{d}x$$

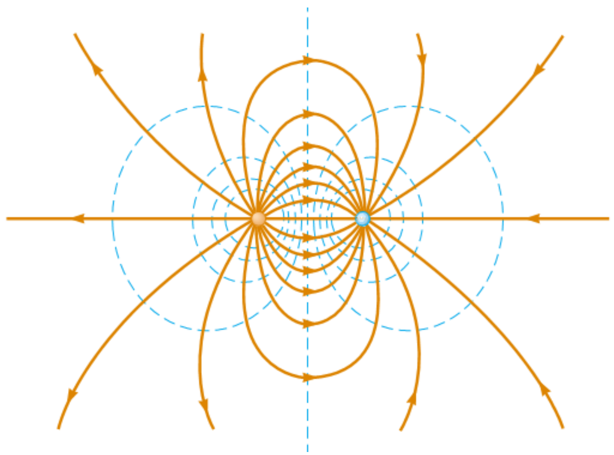
$$E_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

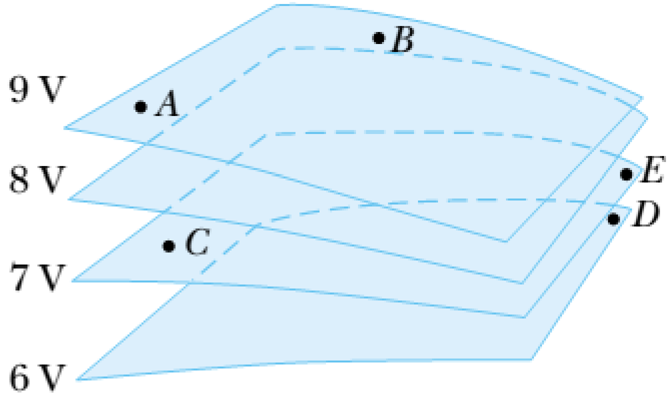
$$\vec{E} = -\mathrm{grad}U(x, y, z)$$

$$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = 0 \qquad \text{, mert} \qquad \mathrm{rot}(\vec{E}) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(U(\vec{r}))) = 0$$

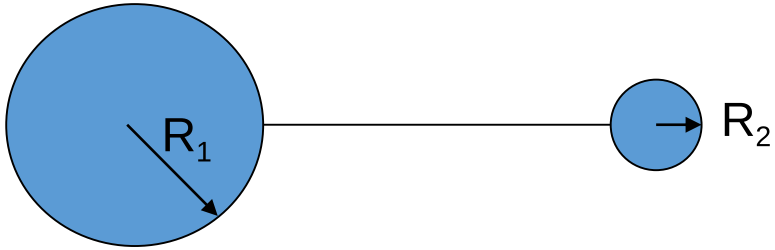
Ekvipotenciális felületek …







A csúcshatás



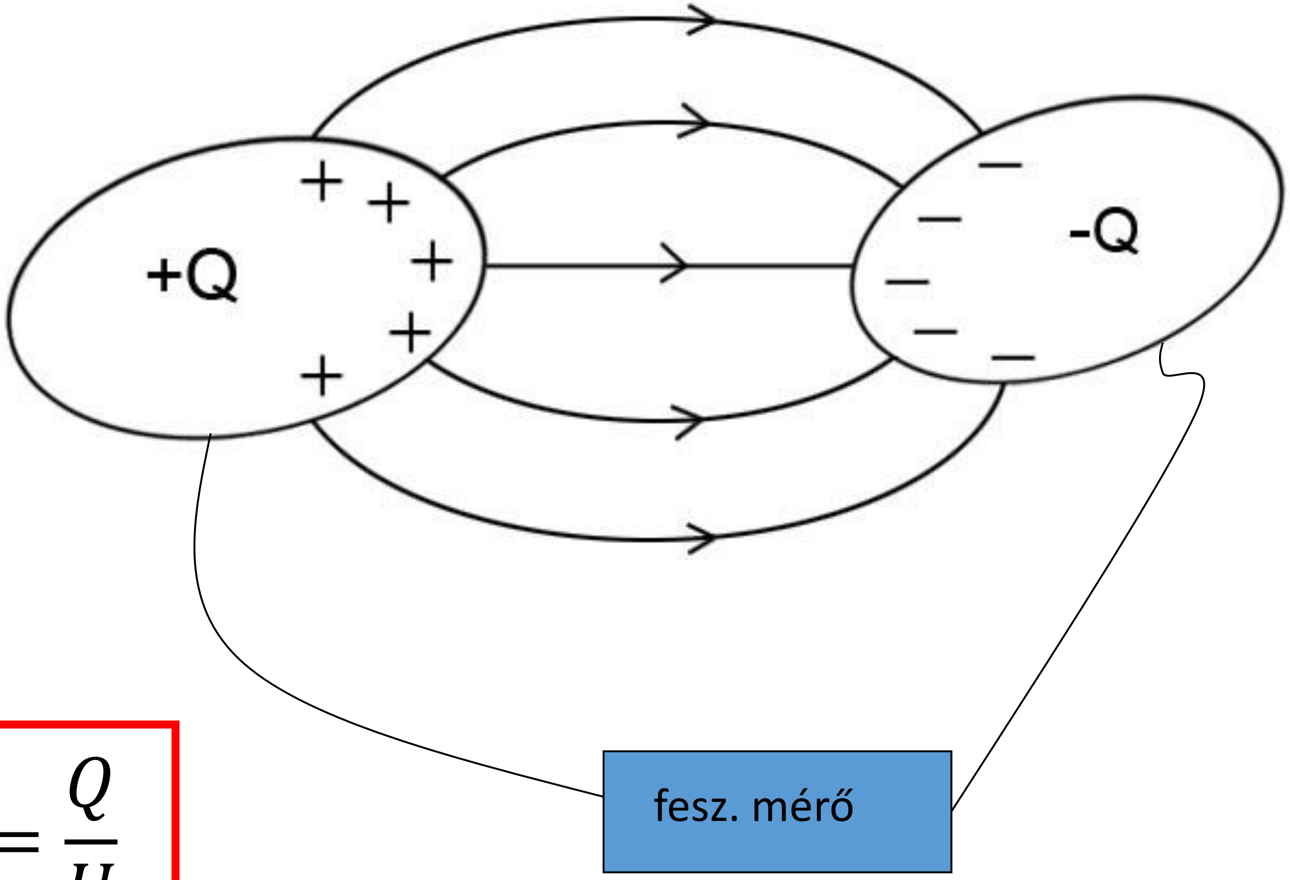
$$k\frac{Q_1}{R_1} = k\frac{Q_2}{R_2}$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{R_1^2} \qquad \text{ill.} \qquad E_2 = \frac{Q_2}{R_2^2}$$

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

Pl.: Szent-Elmo tüze (koronakisülés)

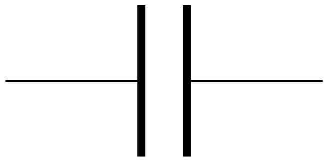
Kapacitás



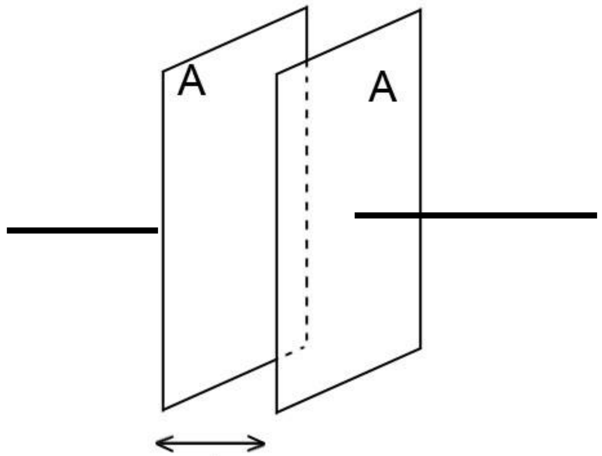
$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

Mértékegység: $\left[\mathrm{F} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} \text{, farad} \right]$

Jelölés:

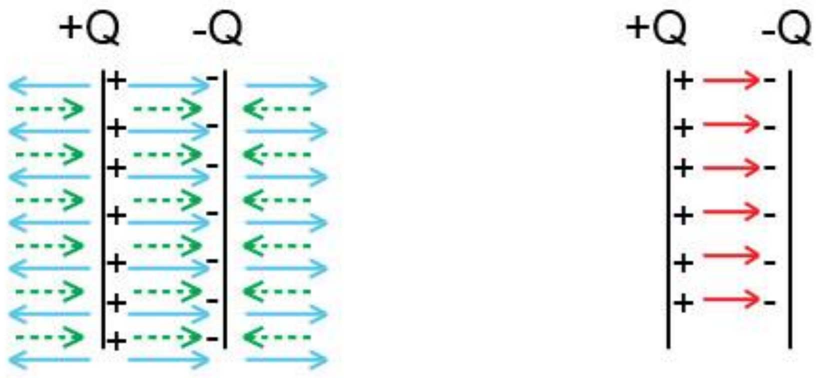


Síkkondenzátor I.



Láttuk, hogy nagy egyenletesen töltött sík tere:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



a.) b.)

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Síkkondenzátor II.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \sigma = \frac{Q}{A}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} \longrightarrow \boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

Példa: gömbkondenzátor, hengerkondenzátor

Kondenzátor energiája

$$dW = Udq$$

$$U = \frac{q}{C}$$

$$dW = \frac{1}{C} qdq$$

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$Q = CU$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2}$$

Az elektromos mező energiája

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Síkkondenzátor:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_o A} \longrightarrow Q = \varepsilon_o AE$$

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{d}$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 Ad$$

Téfrogat: Ad

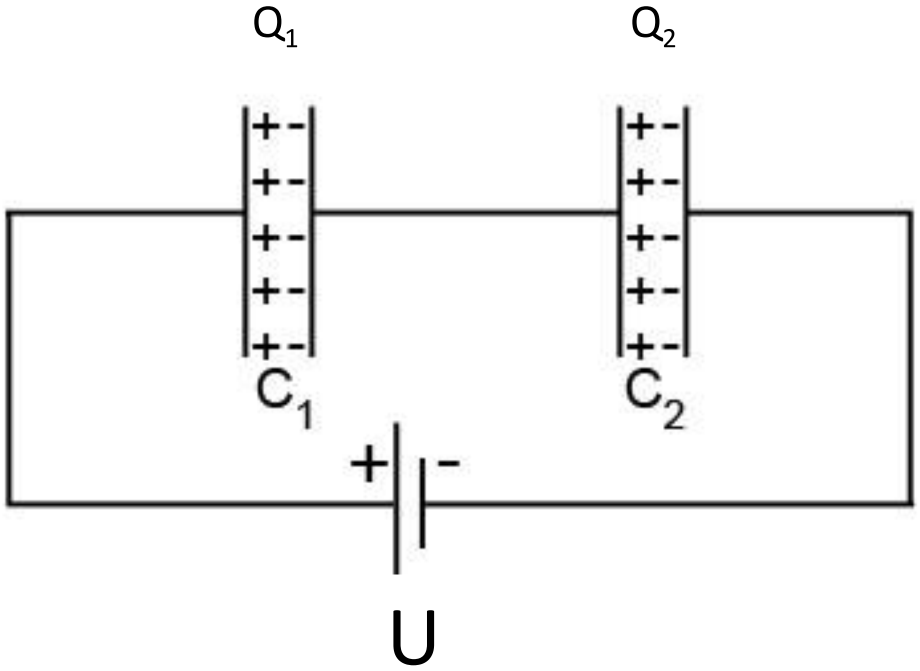
$$\boxed{\varepsilon_E = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2}$$

energiasűrűség

Egy V térfogatú tartomány elektrosztatikus energiája:

$$W = \int_V \varepsilon_E dV$$

Sorosan kötött kondenzátorok



$$U_1 + U_2 = U$$

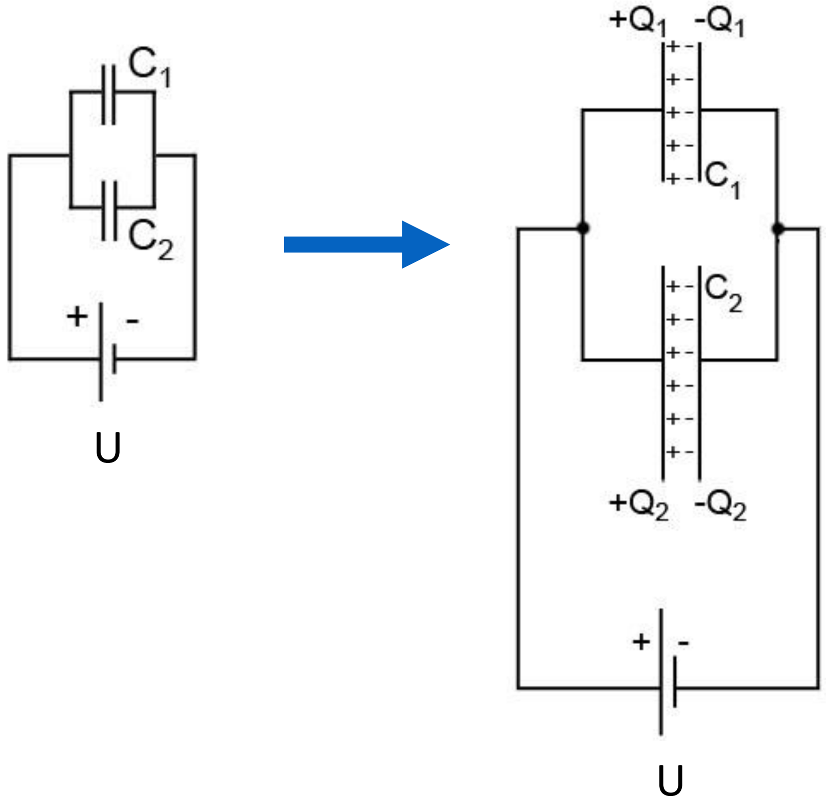
$$Q_1 = Q_2$$

$$U = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{Q}{C_e} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_e} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

Párhuzamosan kötött kondenzátorok



$$Q = Q_1 + Q_2 \;\Rightarrow\; UC_e = UC_1 + UC_2 \;\text{ tehát }\; C_e = C_1 + C_2$$

$$\boxed{C_e = \sum_i C_i}$$

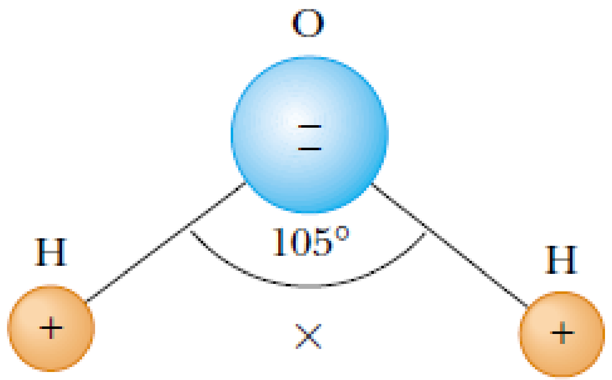
Dielektrikumok

Egy szigetelő (dielektrikum) elektromos tér hiányában elektromosan semleges viselkedést mutat, és saját tere nincs.

Dielektrikumot elektromos térben: az anyag "válaszol" a külső térre, polarizálódik.

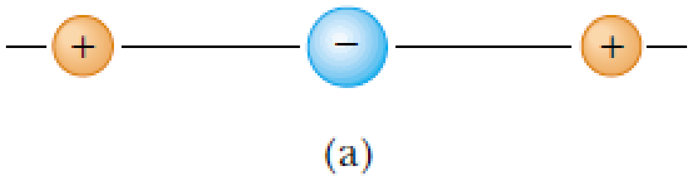
poláros dielektrikum

poláros molekula



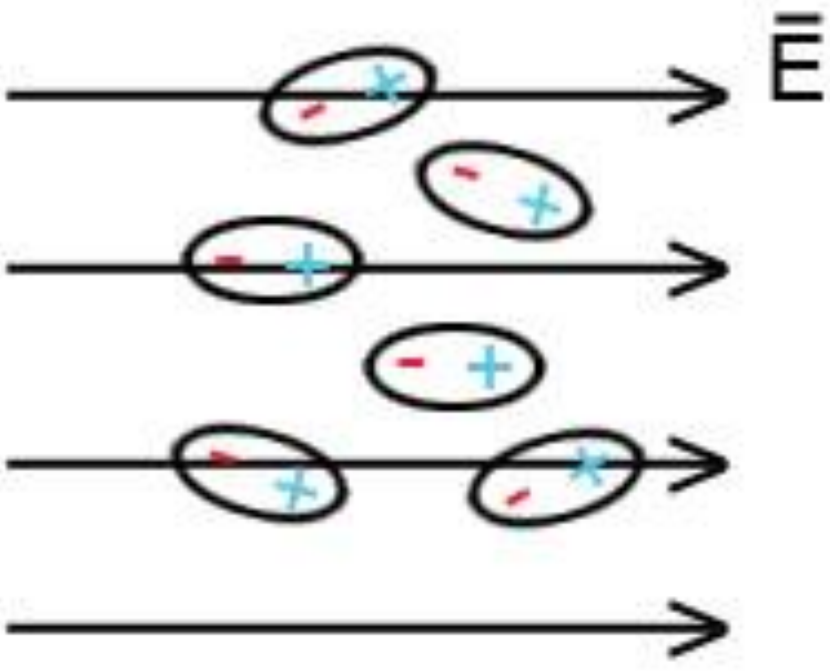
nem poláros dielektrikum

nem poláros molekula



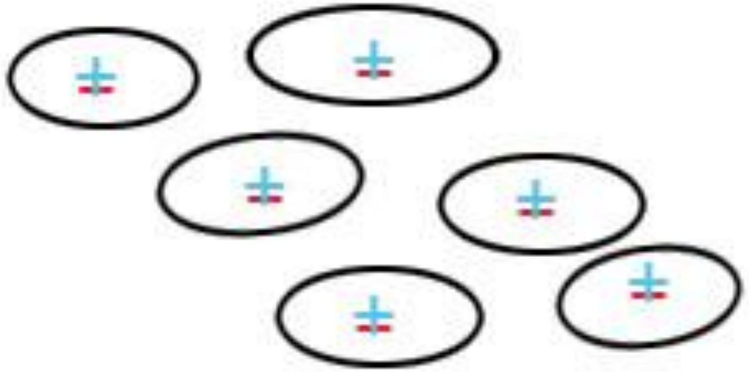
Dielektrikumok

Poláros dielektrikum külső tér hiányában

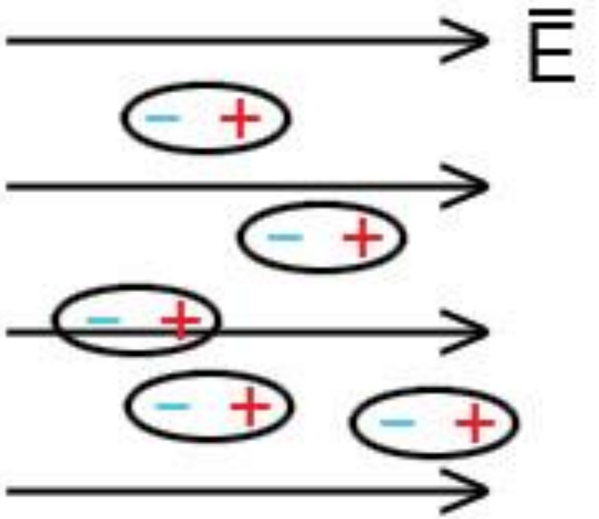


Poláros dielektrikum külső elektromos térben

Dielektrikumok



Nempoláros dielektrikum külső tér hiányában



Nempoláros dielektrikum külső elektromos térben

Mind a poláros, mind a nem poláros dielektrikum esetében a polarizációs hatás a külső elektromos térrel arányos.

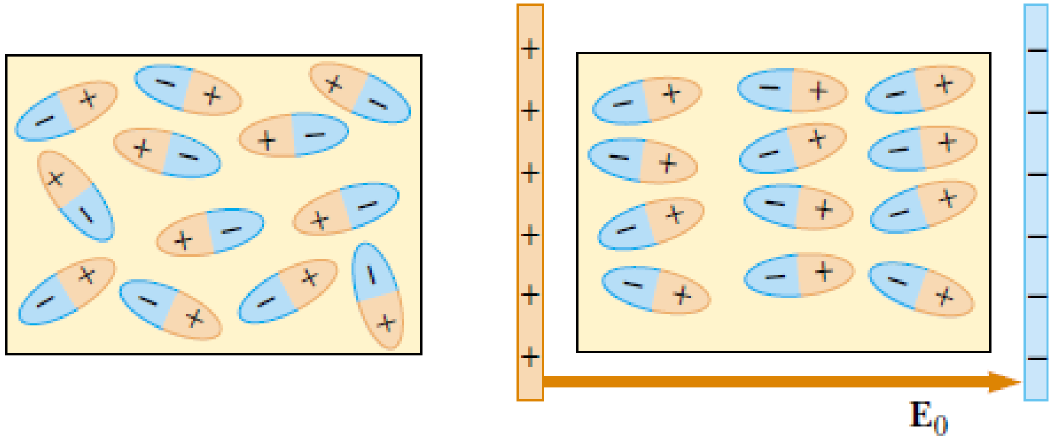
Az anyagban kialakuló dipólmomentum-sűrűség (az ún. **polarizáció)** a külső térrel egyenesen arányos:

$$P = \varepsilon_o \chi E$$

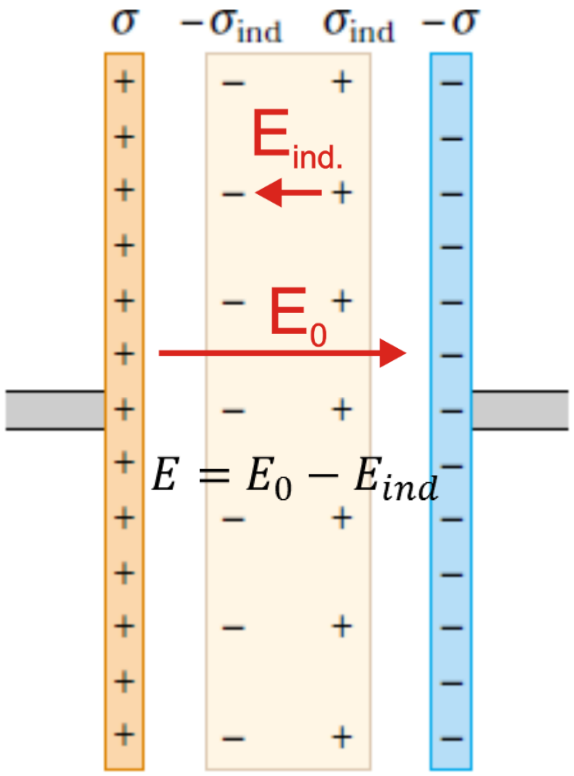
χ az adott anyagra jellemző **szuszceptibilitás**

Anyag	szuszceptibilitás
paraffin	0.9 - 1.2
csillám	3 - 7
üveg	4 - 15
porcelán	5
víz	80
etilalkohol	20
száraz levegő	0.00059

Dielektrikumok



(a) (b)



A dielektrikum dipólmomentuma:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}V = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} A d = Q_{ind} d$$

$$E = \frac{Q - Q_{ind}}{\varepsilon_0 A} \qquad Q = Q_{ind} + \varepsilon_0 E A = \varepsilon_0 \chi E A + \varepsilon_0 E A = \varepsilon_0 (\chi + 1) E A$$

$$U = Ed \longrightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 (\chi + 1) E A}{E d} \qquad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}}$$

relatív dielektromos állandó ill relatív permittivitás: $(\varepsilon_r = \chi + 1)$