Optika Gyakorlat ZH

2017. november 23. - munkaidő 90 perc

1. példa: Geometriai optika

Egy $n = \sqrt{2}$ törésmutatójú üvegből készült félkör alapú hasáb egyenes felületére párhuzamos fénysugarak esnek 45^0-os beesési szöggel. A sugarak egy a félhenger tengelyére merőleges síkban vannak. A hengeres felület mely részein léphetnek ki azok a fénysugarak melyek nem szenvedtek teljes visszaverődést az üvegben?
8 pont
Megoldás:

Az üvegbe való belépéskor a fénysugarak törési szöge a Snellius-Descartes törvény alapján határozható meg:

$$n_0 \cdot sin(\alpha) = n \cdot sin(\beta)$$

Felhasználva, hogy $n_0 = 1$ a levegő és $n = \sqrt{2}$ az üveg törésmutatója, illetve, hogy a fénysugarak beeséi szöge $\alpha = 45^0$, a törési szögre $\beta = 30^0$ adódik.
Ahhoz, hogy a fénysugár kiléphessen a félhengerből a hengerfelülethez érkező fénysugár γ beesési szöge kisebb kell, hogy legyen mint a határszög. Az optikailag sűrűbb közegből optikailag ritkább közegbe való kilépés határszöge:

$$sin(\gamma_h) = \frac{n_0}{n}$$

Felhasználva a törésmutatókra megadott számértékeket a határszögre $\gamma_h = 45^0$ adódik.
Határozzuk meg, hogy a γ beesési szög milyen kapcsolatban áll a hengerfelületen való pozíciót jelölő ϕ szöggel. Ehhez húzzuk be a fénysugarak útját az üvegben, illetve a henger kilépési ponthoz tartozó sugarát, ami egyben a beesési merőleges is. Majd írjuk fel, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180^0. Két külön esetet kell vizsgálnunk, attól függően, hogy a henger középpontjához képest hol éri el a belépő fénysugár a síkfelületet.
Az első esetben a háromszög belső szögeire vonatkozó egyenelet:

$$(90^0 + \beta) + \gamma + \phi = 180^0$$

Amiből felhasználva, hogy $\beta = 30^0$ és $\gamma < 45^0$, kapjuk:

$$\phi > 15^0$$

A középpont másik oldalán való belépés esetén pedig:

$$(90^0 - \beta) + \gamma + (180 - \phi) = 180^0$$

Ismét felhasználva a numerikus értékeket kapjuk:

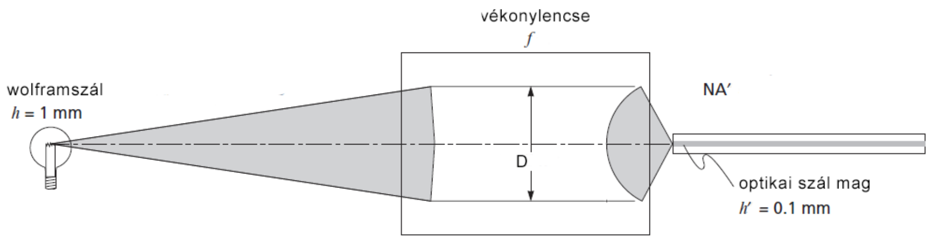
$$\phi < 105^0$$

Tehát a hengerpalás azon részén léphetnek ki olyan fénysugara melyek nem szenvedtek teljes visszaverődést ahol: $15^0 < \phi < 105^0$-

2. példa: Paraxiális optika

Egy $n_1 = 1.57$ törésmutatójú maggal és $n_2 = 1.55$ törésmutatójú köpennyel rendelkező optikai szálba szeretnénk egy $h = 1mm$ nagyságú wolfram izzószál fényét a lehető legnagyobb hatásfokkal becsatolni. A szál magjának átmérője $h' = 100\mu m$. Az izzót $d = 110mm$ távolságra rögzítjük a szál végétől. A becsatoláshoz egy f fókuszú vékonylencsét szeretnénk felhasználni.

Paraxiális közelítésben tervezd meg a becsatoló optikai rendszert:
a) Mekkora az optikai szál numerikus apertúrája? (2 pont)
b) Mekkora laterális nagyítással rendelkezzen a leképező optika? (2 pont)
c) Mekkora f fókusztávolságú lencsét válasszunk ehhez a feladathoz? (2 pont)
d) Hova helyezzük az f fókusztávolságú lencsét? (2 pont)
e) Mekkora a tárgyoldali numerikus apertúrát kell biztosítanunk a leképezéshez? (2 pont)
f) Ehhez mekkora lencseátmérőt (D apertúrát) válasszunk? (2 pont)
g*) Becsüld meg a becsatolás hatásfokát, ha feltételezzük, hogy az izzószál pontszerű, és minden térszögbe ugyanakkora intenzitást sugároz! (0 pont)



1. ábra. Optikai szálba történő becsatolás

12 pont.

Megoldás:

a) A szál numerikus apertúrája:

$$NA' = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0.25$$

b) Az optikai leképezésben egy kicsinyített, valódi képre van szükségünk. Ezért egy fókuszáló gyűjtőlencsét kell választanunk ($f > 0$).

Definíció szerint a rendszer nagyítás (fordított állású kép):

$$m = -\frac{h'}{h} = -0.1$$

c+d) Vezessünk le egy összefüggést a fókusztávolságra, a tárgy- és képtávolságra, ha ismert a nagyítás és a tárgy-kép távolsága.

$$\left.\begin{array}{r} m = s'/s \\ -s + s' = d \end{array}\right\}$$

A fenti egyenletrendszert megoldva kapjuk:

$$-s + ms = d$$

$$s(m-1) = d$$

$$s = \frac{d}{m-1} = -100mm$$

$$s' = \frac{md}{m-1} = 10mm$$

$$f = \frac{-ss'}{-s+s'} = 9.1mm$$

e) A tárgy- és képoldali numerikus apertúrák közötti összefüggés:

$$NA = \frac{D}{-2s} \qquad NA' = \frac{D}{2s'}$$

$$\frac{NA}{NA'} = \frac{s'}{-s} = -m$$
$$\longrightarrow \quad NA = 0.1 \cdot NA' = 0.025$$

f) A tárgyoldali NA tartaásához szükséges lencseapertúra átmérő:

$$D = NA \cdot (-2s) = 0.025 \cdot 200 = 5mm$$

Ennél nagyobb átmérőjű lencsére nincs szükségünk, mert a becsatolás hatásfokát már nem javítja.

g) A becsatolás hatásfokát az optikai tengelyre merőleges x- és y-irányú numerikus apertúrák által kijelölt térszög és a teljes térszög aránya határozza meg:

$$\eta \approx \frac{2NA_x \cdot 2NA_y}{4\pi} = \frac{4 \cdot 0.025^2}{4\pi} = 0.2\%$$

3. példa: Interferencia

Egy Young-féle kétréses interferométer egyik rése elé egy $l = 25$ mm hosszú levegővel töltött üvegkamrát helyezünk. Ezt követően a levegőt kiszivattyúzzuk és ismeretlen összetételű gázt töltünk a helyére. A légcsere eredményeként azt tapasztaljuk, hogy az ernyőn kialakuló interferenciakép 21 vonalpárnyival mozdul el az üvegkamrával ellátott oldal irányába.
a) Határozzuk meg a gáz törésmutatóját ha $\lambda = 656$ nm és a levegő törésmutatója $n_0 = 1$!
b) Határozzuk meg a szomszédos maximumhelyek távolságát ha a rések távolsága $d = 5$ mm és az ernyő a résektől $D = 1$ méterre helyezkedik el!

10 pont.
Megoldás:

a) Mivel az interferenciakép az üvegkamrával ellátott oldal irányába mozdult el, ezért a gáz törésmutatója nagyobb kell, hogy legyen a levegő törésmutatójánál.
A gázcsere következtében az optikai úthossz megváltozása:

$$OPD = (n - n_0) \cdot l$$

Az ebből származó fázistolás:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot OPD$$

Ugyanakkor mivel az interferenciakép 21 vonalpárnyival mozdult el, ezért a fázistolás:

$$\Delta\Phi = 21 \cdot 2\pi$$

A fázistolás két kifejezését egyenlővé téve:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot OPD = 21 \cdot 2\pi$$

Átrendezve az egyenletet:

$$\frac{OPD}{\lambda} = 21$$
$$\frac{(n - n_0) \cdot l}{\lambda} = 21$$
$$n = \frac{21 \cdot \lambda}{l} + n_0$$

Behelyettesítve a megadott numerikus értékeket a törésmutatóra $n = 1,00055$ adódik.

b) Az gázcsere csak eltolja az interferenciaképet, így a maximum és minimumhelyek egymástól mért távolsága nem változik meg.
A két résből érkező nyalábok közötti optikai úthosszkülönbség:

$$OPD = n_0 \cdot d \cdot sin(\alpha)$$

Az ebből származó fázistolás:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot OPD$$

Ugyanakkor mivel a szomszédos maximumok közötti fázistolás 2π:

$$\Delta\Phi = 2\pi$$

A fázistolás két kifejezését egyenlővé téve:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot OPD = 2\pi$$

Átrendezve az egyenletet:

$$\frac{OPD}{\lambda} = 1$$

$$\frac{n_0 \cdot d \cdot sin(\alpha)}{\lambda} = 1$$

Kis α szögek esetén alkalmazhatjuk az alábbi közelítést:

$$\alpha \approx sin(\alpha) \approx tg(\alpha)$$

Továbbá az elrendezés geometriájából adódóan:

$$tg(\alpha) = \frac{\Delta y}{D}$$

Ezt felhasználva kapjuk:

$$\frac{n_0 \cdot d \cdot \frac{\Delta y}{D}}{\lambda} = 1$$

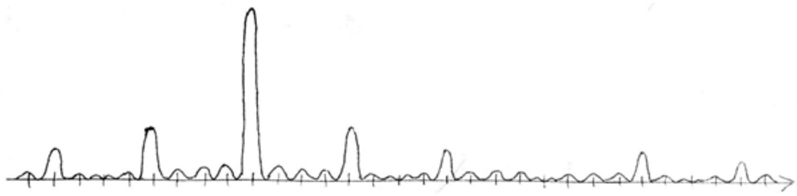
4. példa: Diffrakció (2 feladat)

4A. Az alábbi ábrán egy sokrés Fraunhofer intenzitási kép látható.
a) Adja meg a képet létrehozó rések (N) számát!
b) Rajzolja az ábrába az intenzitáseloszlás burkológörbéjét!
c) Adja meg a főmaxiumok helyét (magas fésűfogak) meghatározó matematikai összefüggést. Mekkora a rések távolságának és szélességének (a/b) aránya (egyszerű levezetéssel)?

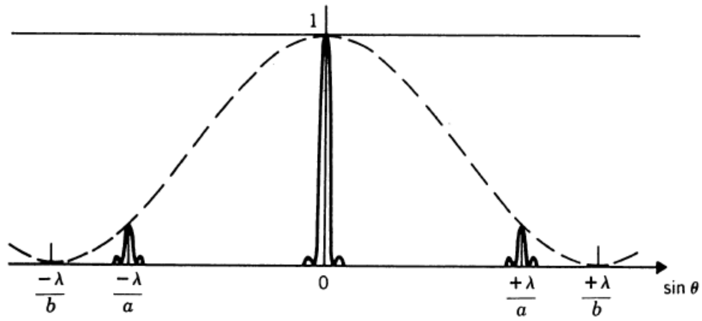
4B. Egy 20M Ft értékű optikai rács $\rho = 1000$ vonal/mm vonalsűrűségű. Szeretnénk felbontani vele a HeNe lézer 632.8 nm-es vonalának spektrumkomponenseit. A spektrum két szimmetrikus vonalból áll a a 632.8 nm hullámhossz körül, egymástól 450 MHz-re.
a) Legalábbb milyen d szélességben világítsuk ki az optikai rácsot, hogy meg tudjuk különböztetni a két vonalat?

Megoldás 4A:
Az intenzitás értékére az órán levezettük:

$$I = \frac{E_0^2}{(\lambda z')^2} \cdot |T(f_x)|^2 = \frac{E_0^2}{(\lambda z')^2} \cdot |T_1(f_x)|^2 \cdot \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = \frac{E_0^2 b^2}{(\lambda z')^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi f_x b)}{(\pi f_x b)^2} \cdot \frac{\sin^2(N\pi f_x a)}{\sin^2(\pi f_x a)}$$



2. ábra. Sokrés interferencia



3. ábra. A rács eredő diffrakciós képe a fésű függvény és az amplitudó moduláció szorzata

, ahol

A főmaximumok helye:
$$f_x = \frac{x'}{\lambda z'} = \frac{sin\Theta}{\lambda}$$
$$sin\Theta = m \cdot \frac{\lambda}{a}$$
$$x' = m \cdot \frac{\lambda z'}{a}$$

A főmaximumok között N-1 db lokáliks minimumhely helyezkedik el. Jelen esetben $N-1=4$. Tehát $N=5$.
A diffrakciós minimumok helye:
$$sin\Theta = m \cdot \frac{\lambda}{b}$$
$$x' = m' \cdot \frac{\lambda z'}{b}$$

Jelen esetben a 3. főmaxium helye egybeesik az 1. diffrakciós miniumum helyével:
$$3 \cdot \frac{\lambda}{a} = 1 \cdot \frac{\lambda}{b} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{a}{b} = 3$$

Megoldás 4B:
Az optikai rács felbontóképessége:
$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \cdot N$$
,ahol m a rend száma és N a rácsvonalak száma.

A két szimmetrikus vonal felbontásához legalább $\Delta\lambda$ hullámhossz különbséget fel kell tudnunk bontanunk.
$$\Delta\nu = c \cdot (\frac{1}{\lambda 1} - \frac{1}{\lambda 2}) = c\frac{\lambda 1 - \lambda 1}{\lambda 1 \lambda 2} =\approx c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$
$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \cdot \Delta\nu}{c} =$$

ezt felhasználva:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \cdot N = m \cdot \rho \cdot d = \frac{c}{\lambda \cdot \Delta\nu}$$

m = 1 esetén:

$$d = \frac{c}{\lambda \cdot \Delta\nu \cdot \rho} = 1053.5 \text{ [mm]}$$