Fizika 1i, 2020 őszi félév, 1. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

F1. Jelöljük a folyó sebességét u-val, a motorcsónak vízhez viszonyított sebességét v-vel. Legyen a két város közötti távolság s. Folyásiránnyal ellentétesen haladva az út megtételéhez szükséges idő $s/(v-u)$, folyásirányban haladva pedig $s/(v+u)$. A feladat szövegének megfelelően:

$$\frac{s}{v-u} = 1{,}5 \cdot \frac{s}{v+u}.$$

Átalakítás után a kérdéses arány $v/u = 5$.

F2*. *a*) Tegyük fel, hogy a városban megtett út s_1, a második szakaszon pedig s_2. Mindkét szakaszon ugyanannyi t ideig mozgott az autó, így $s_1 = v_1 t$, $s_2 = v_2 t$. Az autó teljes útra vonatkoztatott átlagsebessége:

$$v_{\text{átl.}} = \frac{s_1 + s_2}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 65\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

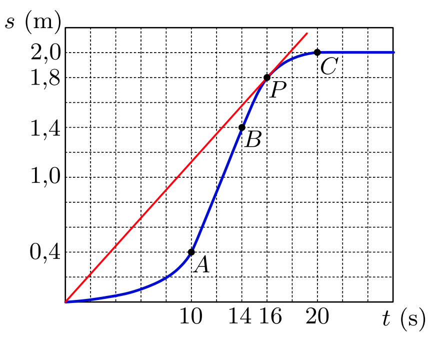
b) Ebben az esetben a városban eltöltött idő legyen t_1, azon kívül t_2. Az egyes szakaszokon megtett út legyen s. Tehát $t_1 = s/v_1$ és $t_2 = s/v_2$. Az átlagsebesség:

$$v_{\text{átl.}} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \approx 55\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ezt a kifejezést v_1 és v_2 harmonikus közepének nevezik.

F3*. *a*) A test 20 másodpercig mozog (az *ábrán* ezt a C pont jelöli), hiszen ezután a megtett út nem növekszik tovább. Eddig az időpillanatig a test 200 cm utat tesz meg, így átlagsebesége $v_{\text{átl.}} = 10$ cm/s .

b) A pillanatnyi sebesség akkor a legnagyobb, amikor az elmozdulás-idő grafikon a legmeredekebb. Ez hozzávetőlegesen a 12. másodpercnél történik meg. Ennek a pontnak a környezetében a függvény az *ábrán* látható AB egyenes szakasszal jól közelíthető, melynek meredeksége 100 cm/4 s = 25 cm/s .



c) A pillanatnyi sebesség az $s(t)$ grafikon adott pontbeli érintőjének meredekségével egyenlő. Az átlagsebesség az összes megtett út és az addig eltelt idő hányadosa, ez tehát az $s(t)$ grafikonon az origóból kiinduló, adott ponthoz húzott szelő meredeksége. A keresett időpillanatban tehát az origóból húzott szelő és az érintő egybeesik (piros vonal), ez az *ábrán* látható P pontra igaz. Az átlagsebesség tehát $t_0 = 16$ s időpillanatban egyezik meg a pillanatnyi sebességgel.

F4*. *a*) Az átlagsebesség a teljes megtett út és az eltelt idő hányadosa. A test az 5. másodpercben megáll, és onnantól visszafelé mozog. A visszefele történő mozgás során megtett utat pozitív előjellel kell figyelembe venni az átlagsebességben. A megtett út a görbe alatti terület, azaz a két trapéz területének összege:

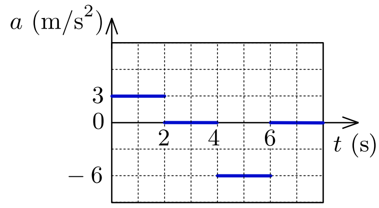
$$s = \frac{5\ \text{s} + 2\ \text{s}}{2} \cdot 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{3\ \text{s} + 2\ \text{s}}{2} \cdot 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 36\ \text{m}.$$

A mozgás teljes ideje 8 másodperc, ezzel az átlagsebesség: 36 m/8 s = 4,5 m/s.

b) A mozgás a gyorsulás szempontjából négy szakaszra bontható:

1. 0 és 2 másodperc között egyenletesen gyorsul fel álló helyzetből 6 m/s sebességre, így a gyorsulása $6/2 = 3$ m/s^2.
2. 2 és 4 másodperc között megtartja az elért sebességet, tehát a gyorsulása nulla.
3. 4 és 6 másodperc között egyenletesen lassul, majd megáll, és ellentétes irányban gyorsul. A gyorsulásvektor iránya mindvégig ugyanabba az irányba mutat. Tehát a gyorsulás: $(-6-6)/2 = -6$ m/s^2.
4. Végül 6 és 8 másodperc között ismét állandó sebességgel halad ellentétes irányban, ezért a gyorsulása ekkor már nulla.

A kívánt grafikon az alábbi ábrán látható.



c) A test hely-idő diagramjára vagyunk kíváncsiak, nem az út-idő diagramra. Jelen mozgás esetén a kettő nem azonos, mert a test egy idő után visszafelé mozog. Ismét bontsuk fel szakaszokra a mozgást.

1. 0 és 2 s között a mozgás gyorsuló álló helyzetből indulva, így a test helye

$$x_1(t) = \frac{3\ \text{m/s}^2}{2} \cdot t^2,$$

ami a hely-idő grafikonon egy ágaival felfelé nyíló parabola. A 2. másodperc végére az $x = 0$ helyől eltávolodott 6 m-re.

2. Ezt követően 2 és 4 s között állandó sebességgel tovább távolodik, azaz

$$x_2(t) = 6\ \mathrm{m} + 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (t - 2\ \mathrm{s}) = 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 6\ \mathrm{m},$$

ami egy pozitív meredekségű egyenes. A 4. másodperc végére a kezdőponttól már 18 m távol van.

3. 4 és 5 másodperc alatt tovább távolodik, de lassuló mozgást végez a test, a hely-idő függvény egy ágaival lefelé nyíló parabola:

$$x_3(t) = 18\ \mathrm{m} + 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (t - 4\ \mathrm{s}) - \frac{6\ \mathrm{m/s^2}}{2} \cdot (t - 4\ \mathrm{s})^2.$$

Átalakítva:

$$x_3(t) = -3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 54\ \mathrm{m}.$$

Az 5. másodpercben megáll, ekkor a kiindulási ponttól mért távolsága 21 m.

4. Miután megállt a test, 5 és 6 s között visszafelé mozog gyorsulva, így a hely-idő grafikon ismét egy parabola:

$$x_4(t) = 21\ \mathrm{m} - \frac{6\ \mathrm{m/s^2}}{2} \cdot (t - 5\ \mathrm{s})^2,$$

ami átalakítva természetesen a 4. pontban kapott $x_3(t)$ függvényre vezet. A parabola maximuma 5 másodpercnél van, hiszen onnantól csökken a kezdőponttól mért távolság. A 6. másodperc végére a test origótól mért távolsága 18 m.

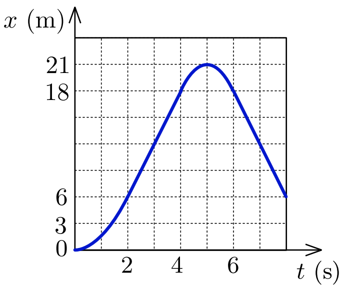
5. Végül 6 m/s sebességgel közeledik az origó felé 6 és 8 s között:

$$x_5(t) = 18\ \mathrm{m} - 6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (t - 6\ \mathrm{s}) = -6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t + 54\ \mathrm{m}.$$

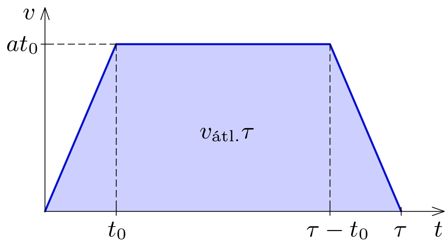
Tehát a 8. másodperc végére az $x = 0$ helytől 6 m-re van.

Megjegyzés: A grafikon elkészítéséhez nem várjuk el a függvények megadását. Elegendő meghatározni a töréspontokra jellemző adatokat és azokat összekötni parabolával vagy egyenessel aszerint, hogy gyorsul vagy állandó sebességgel halad. De figyelni kell, hogy a parabola felfelé vagy lefelé nyílik, illetve az egyenes meredeksége pozitív vagy negatív.

A kívánt grafikon az alábbi ábrán látható.



F5.** Jelölje a gyorsítás időtartamát t_0, ezzel az autó legnagyobb sebessége at_0. Mivel az autó ugyanolyan ütemben lassít, mint amilyen ütemben növelte sebességét a mozgás kezdetén, így a lassítás időtartama is t_0. Az átlagsebesség definíciója alapján a jármű által megtett teljes út $v_{\text{átl.}}\tau$ alakban írható fel.



Célszerű az autó mozgását sebesség-idő grafikonon ábrázolni, ez tartalmazza ugyanis a lehető legtöbb információt (lásd az *ábrát*). A megtett út a görbe alatti terület (trapéz) segítségével fejezhető ki:

$$v_{\text{átl.}}\tau = \frac{\tau + (\tau - 2t_0)}{2} at_0\,,$$

amely t_0-ra egy másodfokú egyenletté rendezhető:

$$at_0^2 - a\tau t_0 + v_{\text{átl.}}\tau = 0\,.$$

Az adatokat behelyettesítve, majd az egyenletet megoldva t_0-ra két gyök adódik, melyek közül a fizikailag értelmes (pozitív) $t_0 = 5$ s. Ekkora tehát a gyorsítás és a lassítás ideje, az autó tehát $\tau - 2t_0$=15 másodpercig mozgott állandó sebességgel.

F6*. *a*) A test sebességének megváltozását az $a(t)$ grafikonon a görbe alatti terület adja meg. A sebességet a kezdeti sebesség ismeretében adhatjuk meg. A grafikonon az látszik, hogy 3 s-nál a gyorsulás irányt vált, azaz onnantól a test lassulni fog. 3 s-ig a sebesség megváltozása és egyben a sebessége, hiszen a test álló helyzetből indult

$$\frac{3\ \mathrm{m/s^2} \cdot 3\ \mathrm{s}}{2} = 4{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

3 és 5 s között a sebességcsökkenés:

$$\frac{2\ \mathrm{m/s^2} \cdot 2\ \mathrm{s}}{2} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Vagyis a test sebessége az 5. másodpercben $4{,}5 - 2 = 2{,}5$ m/s.

b) Az 5. másodperc után a test gyorsulása állandó. Innentől számítva a test sebességének még 2,5 m/s-t kell csökkennie, hogy az nulla legyen. 2 m/s^2 lassulással ehhez $2{,}5/2 = 1{,}25$ s idő szükséges. Az indulástól tekintve tehát 6,25 s múlva lesz nulla a test sebessége.

c) A 3. másodpercben változik meg a gyorsulás iránya. Ekkor a sebessége az *a*) kérdés alapján 4,5 m/s. A test a megállás után visszafele mozog 8 s-ig. Ezalatt a sebessége 2 m/s^2 · (8 s – 6,25 s) = 3,5 m/s-mal növekszik. Ez kisebb, mint a 3. s-ban elért sebesség, azaz a legnagyobb sebesség 4,5 m/s az ábrázolt időtartam alatt.

F7*. *a*) Legyen a talaj szintje az x tengely, és az épület az y tengely mentén helyezkedjen el. Ebben a koordináta-rendszerben a kő helyét az alábbi egyenletek adják meg:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t,$$
$$y(t) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2.$$

A kő akkor éri el a talajt, ha $y(t) = 0$, azaz

$$\frac{g}{2}t^2 - v_0 \sin\alpha \cdot t - h = 0.$$

Ebbe behelyettesítve a megadott adatokat, a másodfokú egyenlet pozitív megoldása adja az eredményt, ami 4,2 s.

b) Amikor a kő eléri pályájának legmagasabb pontját, függőleges sebességkomponense zérus. Ezt a pontot

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \approx 1 \text{ s}$$

idő alatt éri el az indítástól számítva. A legnagyobb távolságot a fenti $y(t)$ kifejezés felhasználásával kapjuk, ha behelyettesítjük ezt az időadatot:

$$y_{\max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \approx 50 \text{ m}.$$

c) A vízszintes irányú sebességkomponens állandó: $v_0 \cos\alpha \approx 17$ m/s. A kő a tetőponttól nézve kb. 3,2 s alatt éri el a talajt. Ezalatt a függőleges sebességkomponens zérusról éri el a 9,8 m/s^2 $\cdot$ 3,2 s $\approx$ 31 m/s sebességet. A kő sebessége tehát

$$\sqrt{17^2 + 31^2} \approx 35 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

F8*. Legyen a test sebessége a körmozgás során v. Amikor a fonál elszakad, a test vízszintes irányban indul el. Innentől mérve a test a talajra $t = \sqrt{2h/g}$ alatt ér. Ezalatt s utat tett meg, azaz a hajítás kezdősebessége:

$$v = \frac{s}{t} = \sqrt{\frac{gs^2}{2h}}.$$

A körpályán mozogva a test gyorsulásának nagysága:

$$a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{r} = \frac{s^2}{2hr} \cdot g \approx 55 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$